

# DIFERENÇAS DE VELOCIDADES NA TURBULÊNCIA: ANÁLISE PROBABILÍSTICA VIA FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL

Leonardo Silva de Souza, leosouza@ufba.br<sup>1,2</sup>

Ernesto Pinheiro Borges, ernesto@ufba.br<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal da Bahia (UFBA), Rua Aristides Novis, 02, Federação, 40210-630, Salvador, Bahia, Brasil.

<sup>2</sup>Programa de Pós-graduação em Engenharia Industrial

**Resumo.** *Analizamos as funções densidade de probabilidade (PDF) das diferenças de velocidade de um sistema de Couette–Taylor simulado em regime turbulento com o uso de fluidodinâmica computacional. O sistema de Couette–Taylor consiste em dois cilindros coaxiais que contêm na região anular um fluido incompressível. Nesse sistema o cilindro interno gira com velocidade angular  $\Omega$  constante. Distribuições de probabilidade de velocidade medidas nas baixas escalas são razoavelmente representadas por distribuições que emergem da mecânica estatística não-aditiva enquanto em altas escalas os dados se ajustam a uma gaussiana.*

**Palavras-chave:** *Turbulência, experimento de Couette–Taylor, superestatística, fluidodinâmica computacional.*

## 1. INTRODUÇÃO

O processo de desenvolvimento da turbulência consiste na transferência de energia das grandes escalas para escalas menores, até as escalas dissipativas, processo conhecido como cascata de energia (Frisch, 1995). Na faixa da escala limitada pelo comprimento característico do sistema e o comprimento de Kolmogorov essa transferência independe das condições iniciais dessas grandes escalas. Um importante parâmetro na caracterização da turbulência é a função distribuição de probabilidade (FDP) para as diferenças de velocidade entre dois pontos separados por uma distância  $r$ , em diferentes escalas. Perto das grandes escalas, essas FDP's tendem a ser gaussianas, enquanto em escalas menores, as FDP's se afastam desse tipo de distribuição (Sunghwan Jung, 2005). A não-gaussianidade das FDP's da diferenças de velocidades a pequenas escalas tem sido estudada com a ajuda da superestatística, que tem como caso particular a mecânica estatística não aditiva (Beck, 2004). Nas últimas duas décadas vem sendo desenvolvida uma estatística baseada em uma forma generalizada da entropia (Tsallis, 1988):

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad (1)$$

que tem demonstrado superar dificuldades da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, que é baseada na entropia  $S = -k \sum_i p_i \ln p_i$ . Temos que  $q$  é o índice entrópico também chamado de grau de não-extensividade (Tsallis, 1999),  $p_i$  é a probabilidade do sistema estar no microestado  $i$ ,  $k$  é uma constante positiva e  $W$  é o número total de possibilidades microscópicas do sistema. Esta expressão recupera a forma usual da entropia de Boltzmann-Gibbs no limite  $q \rightarrow 1$ . Dessa generalização surge a mecânica estatística não aditiva que possibilita obter uma FDP generalizada, conhecida como  $q$ -gaussiana, que tem a gaussiana como caso particular. Outras estatísticas também foram generalizadas como a superestatística- $\chi^2$ , superestatística- $\chi^2$  inversa e a superestatística log-normal, que também possuem suas FDP características e têm a  $q$ -gaussiana como caso particular (Beck, 2004, 2002, 2000; Beck *et al.*, 2005a,b).

O nosso trabalho consiste em estudar as distribuições de velocidade obtidas através de simulação fluidodinâmica computacional de um sistema de Couette–Taylor, em regime turbulento para diferentes valores de  $r$ . Alguns estudos mostram que as distribuições de probabilidade das diferenças de velocidade a altos números de Reynolds (Eq. 2) são melhor representadas pelas funções de probabilidade baseadas na superestatística (Beck *et al.*, 2001) se comparado com a gaussiana.

O artigo está separado por seções: Na seção 2 descrevemos o funcionamento do sistema de Couette–Taylor e a simulação executada. Na seção 3 apresentamos um breve resumo sobre a proposta de modelagem das FDP's das diferenças de velocidade de sistemas turbulentos com base na superestatística. Na seção 4 comparamos os dados obtidos através de simulação fluidodinâmica e os modelos reportados na literatura.

## 2. MODELO UTILIZADO E A SIMULAÇÃO.

A simulação foi conduzida em um sistema Couette–Taylor (Fig. 1), que consiste em dois cilindros concêntricos de mesmo comprimento  $L = 0,30$  m e raios interno e externo,  $R_1 = 0,159$  m,  $R_2 = 0,221$  m respectivamente. A Eq. 2 fornece o número de Reynolds para o sistema onde:  $\Omega_1$  é velocidade angular do cilindro interno e  $\nu$  é a viscosidade cinemática.

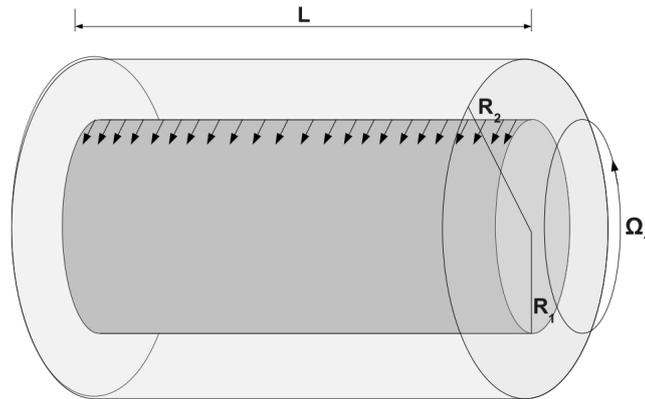


Figura 1. Sistema Couette–Taylor.

$$Re = \frac{\Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu} \quad (2)$$

Construímos o modelo computacional do sistema Coutte–Taylor no software GAMBIT<sup>®</sup> 2.2 com dimensões que estão de acordo com as relações reportadas no artigo (Swinney, 1999):  $R_2 - R_1 = 0,062$  m e  $\eta = \frac{R_1}{R_2} = 0,72$ . Utilizamos um número de Reynolds de 69000, coletamos os dados no ponto médio entre os dois cilindros, com um intervalo de tempo  $\Delta t = 3 \times 10^{-5}$  s. O fluido de referência utilizado na região anular foi a água com temperatura de 298 K (sistema isotérmico). Para esse trabalho, fizemos uma malha com uma distancia média de 0,01 m entre os pontos formados por elementos finitos dos tipos triangulares e quadráticos. O método de resolução do problema da turbulência utilizado foi a Simulação em Grandes Escalas (SGE), que consiste em dividir as variáveis que possuem alta variabilidade em duas partes: uma média local espacial (correspondente as grandes escalas e resolvidas por equações da fluidodinâmica) e as flutuações em torno da média (correspondente as escalas menores, que são modeladas). O software utilizado foi o Fluent<sup>®</sup> 6.2 O tratamento dos dados fundamenta-se na hipótese de Taylor para turbulência, onde a flutuação temporal de velocidade em um ponto do sistema reflete sua flutuação espacial em um determinado instante de tempo(Beck *et al.*, 2001).

### 3. PROPOSTA DE FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE PARA AS DIFERENÇAS DE VELOCIDADE EM SISTEMAS TURBULENTOS

Diversos exemplos de aplicação de FDP's oriundas da superestatística e da mecânica estatística não-aditiva têm sido reportados na literatura: o estudo do formato da FDP de sinais climatológicos do fenômeno El Niño (Ausloos and Petroni, 2007), estudos comparativos da velocidade turbulenta da superfície limite da atmosfera sobre camadas geladas, campos e florestas (Katul *et al.*, 2006), mercado financeiro (Ramos *et al.*, 1999), turbulência hidrodinâmica e atmosférica (Beck, 2004; Gotoh and Kraichnan, 2004; Shivamoggi, 2003; Peyrard and Daumont, 2002; Beck, 2002; Ramos *et al.*, 2001; Neto *et al.*, 2001; Beck *et al.*, 2005a). No artigo (Beck, 2004), identificou-se que as distribuições de diferenças de velocidade de sistemas em regime de turbulência completamente desenvolvida são bem representadas por funções densidade de probabilidade da superestatística- $\chi^2$ . Um distribuição, Eq 3, derivada da  $q$ -gaussiana surge da superestatística- $\chi^2$  e é bem adequada à descrição dos dados experimentais obtidos por (Beck *et al.*, 2001).

$$p(u) = \frac{1}{Z_q} [1 + \beta(q-1)\epsilon(u)]^{\frac{-1}{q-1}}, \quad (3)$$

onde  $Z_q$  é o fator de normalização,  $u$  é a diferença de velocidade  $u = v(t - \Delta t) - v(t)$  e  $\beta = \frac{1}{5-3q}$  é um parâmetro que pode ser relacionado com a dissipação da energia do escoamento (Beck, 2004). O termo  $\epsilon(u)$  e chamado da energia efetiva associada as diferenças de velocidade  $u$ :

$$\epsilon(u) = \frac{1}{2}|u|^{2\alpha} - c\sqrt{\gamma\tau}sgn(u)(|u|^\alpha - \frac{1}{3}|u|^{3\alpha}), \quad (4)$$

sendo  $\gamma^{-1}$  o tempo de relaxamento da dinâmica,  $\tau$  é a escala de tempo em que alcança-se um equilíbrio local em uma janela de tempo  $T$  e  $c$  é um parâmetro que depende do sistema estudado e do parâmetro  $q$ . Note que  $\alpha = 1$  e  $c = 0$  tornam a Eq. 3 uma  $q$ -gaussiana (Tsallis *et al.*, 1995, 1996) (com média 0 e variância 1) e além disso, se  $q \rightarrow 1$ , a gaussiana é enfim recuperada. A variação do termo  $\alpha$  permite que outros níveis de energia sejam alcançados. A superestatística- $\chi^2$  é uma das possibilidades de estatísticas que emergem da superestatística: outras possíveis estatísticas também são propostas para esse tipo de tratamento, tais como a superestatística- $\chi^2$  inversa e estatística log-normal. Em (Beck et al, 2001) empiricamente é proposto que o parâmetro  $\alpha$  seja dado em função de  $q$ :  $\alpha = 2 - q$  e  $c\sqrt{\gamma\tau} = 0,124(q - 1)$ . Entretanto, se  $c \neq 0$  e  $\beta$  for ainda mantido igual a  $\frac{2}{(5 - 3q)}$ , a média de  $u$  é da ordem de  $\sqrt{\gamma\tau}$  e a variância  $\sigma = (\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$  é

ligeiramente diferente de 1. Um média de 0 e variância de 1 é alcançada com a renormalização  $\tilde{p}(u) = \sigma p\left(\frac{u - \langle u \rangle}{\sigma}\right)$ .

Para maiores informações sobre as  $q$ -gaussiana e sobre a mecânica estatística não-aditiva recomendamos os artigos (Tsallis *et al.*, 1998; Prato and Tsallis, 1999) e em (Tsallis, 2009). Uma bibliografia constantemente atualizada sobre mecânica estatística não-aditiva é obtida em <http://tsallis.cat.cbpf.br/TEMUCO.pdf>

#### 4. COMPARAÇÃO ENTRE A FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE PROPOSTA E OS DADOS DE DIFERENÇA DE VELOCIDADE SIMULADOS.

Comparamos as funções densidade de probabilidade das diferenças de velocidade em diferentes escalas  $l$  com as funções densidade de probabilidade (FDP) reportadas na literatura. O resultado para o Reynolds de 69000 é mostrado na Fig. 2.

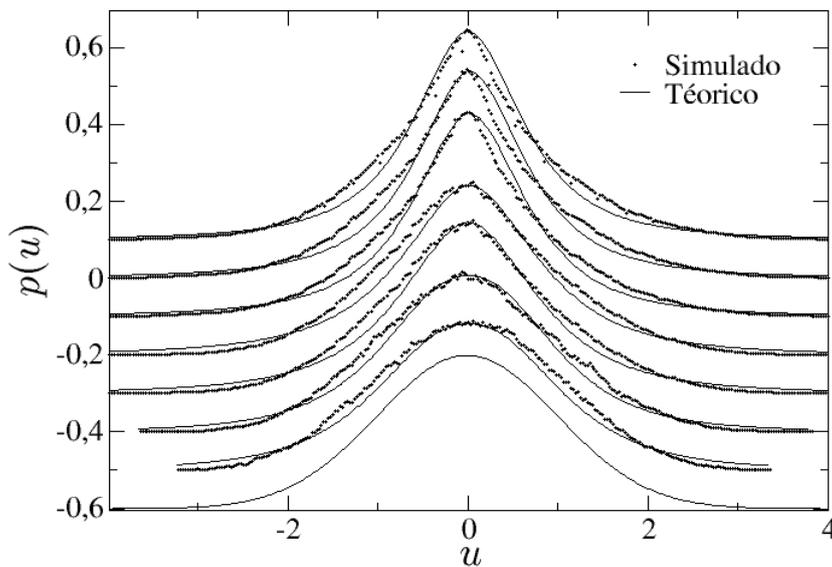


Figura 2. PDF's das diferenças de velocidade para  $Re = 69000$ , em diferentes escalas de tempo (em segundos) comparadas com o modelo teórico 3 (de cima para baixo):  $\Delta t = 3 \times 10^{-4}$ ;  $3 \times 10^{-3}$ ;  $9 \times 10^{-3}$ ;  $15 \times 10^{-3}$ ;  $3 \times 10^{-2}$ ;  $3 \times 10^{-1}$ . O última curva é uma gaussiana, posta aqui para efeito de comparação. Os valores de  $q$  são (de cima para baixo): 1,15; 1,43; 1,41; 1,20; 1,14; 1,12. O gráficos estão deslocados de  $-0,1$  para melhor visualização.

A Fig. 2 mostra que as  $q$ -gaussianas podem ser aproximadas para representar o comportamento dos dados simulados para pequenas escalas de tempo. Para escalas de tempo maiores, observamos que o comportamento dos dados tendem a ser gaussianas. Apesar da literatura propor uma relação empírica entre os parâmetros  $\alpha$  e  $q$ , não encontramos um relação consistente entre eles nos nossos dados.

Calculamos doze diferentes escalas de tempo e o resultado é mostrado na Fig. 3. É possível identificar que o parâmetro  $q$  varia com o aumento da escala de tempo de forma inversa. A literatura reporta que para pequenos valores de  $\Delta t$  o valor de  $q$  tende 1,185, para nossos dados, a tendência foi de convergir para o valor de 1,429 enquanto que para valores grandes de  $\Delta t$  o valor encontrado na literatura é de 1,03, sendo que encontramos valores próximos de 1,120.

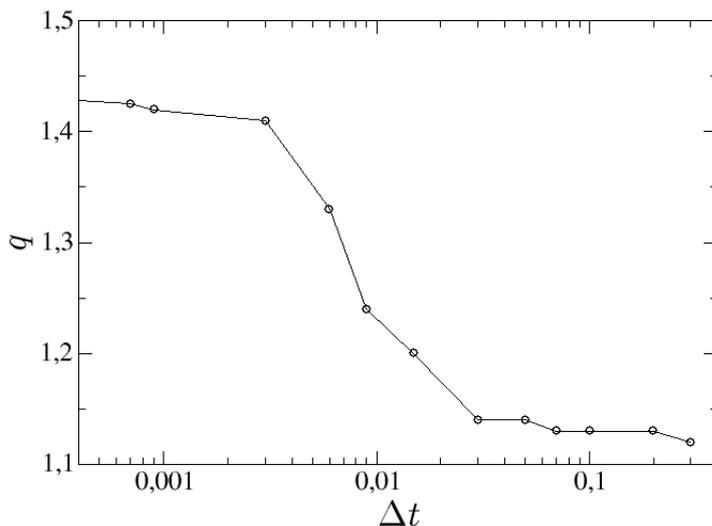


Figura 3. Parâmetro  $q$  como função do intervalo de tempo  $\Delta t$ .

O parâmetro  $\tau$ , que é a escala de tempo onde se alcança o equilíbrio, pode ser estimado com o cálculo do decaimento exponencial da função de correlação  $C_u(\Delta t) = \langle u(t)u(t + \Delta t) \rangle$ , sendo  $C_u(\tau) = \exp^{-1} C_u(0)$  (Beck *et al.*, 2005b).

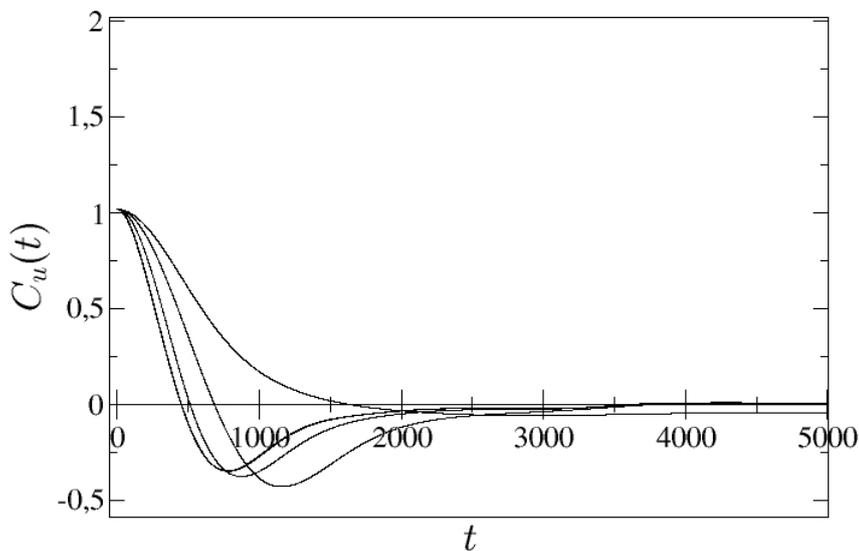


Figura 4. Gráfico da função de correlação a diferentes escalas de tempo (em segundos) para  $Re = 69000$ :  $C_u(\Delta t) = \langle u(t)u(t + \Delta t) \rangle$ :  $\Delta t = 3 \times 10^{-1}$ ;  $3 \times 10^{-2}$ ;  $15 \times 10^{-3}$ ;  $9 \times 10^{-3}$ ;  $3 \times 10^{-3}$ ;  $3 \times 10^{-4}$ ;  $3 \times 10^{-5}$ , correspondentes à  $\tau = 0,0217$ ;  $0,01482$ ;  $0,00936$ ;  $0,01101$ ;  $0,00933$ ;  $0,00927$ ;  $0,00924$  em segundos, respectivamente.

Diversas propostas de representações das FDP's para dados das diferenças de velocidade são reportados na literatura, mas não temos um modelo que represente bem todas as partes da FDP, isto é, representar bem a cauda e o pico com uma função. A Fig. (5) mostra a distribuição de probabilidade das diferenças de velocidade com  $\Delta t = 3 \times 10^{-5}$  s como forma de comparação com os modelos sugeridos nesse trabalho. É possível ver que o modelo proposto com base na mecânica estatística não-aditiva representa melhor os dados.

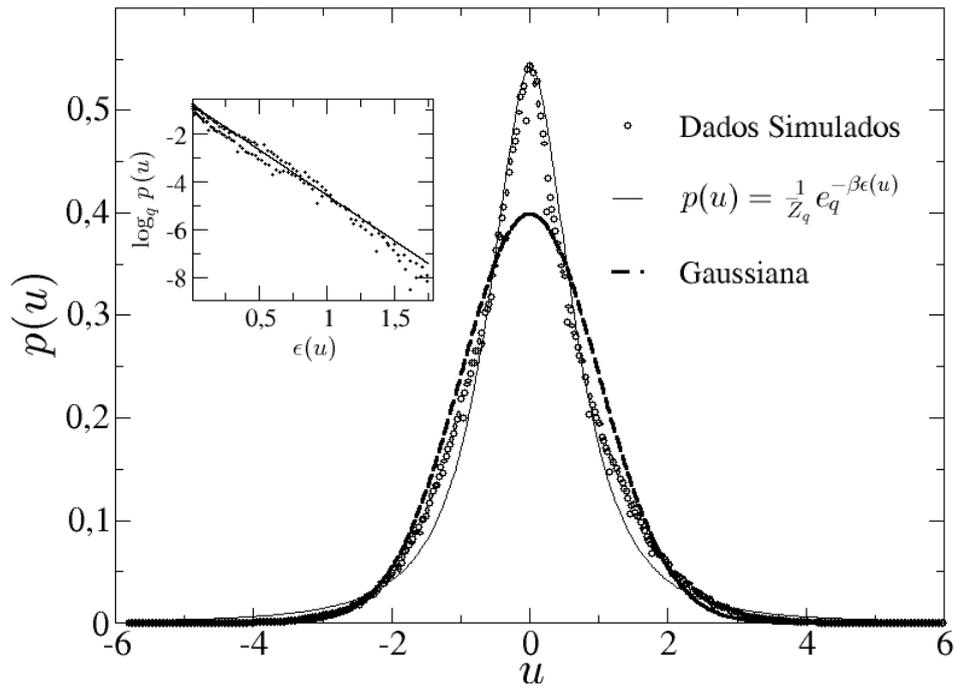


Figura 5. Comparação entre a  $q$ -gaussiana e a gaussiana na representação dos dados simulados

Modelos de FDP com base da superestatística têm sido usadas com muito sucesso na descrição das distribuições de velocidade de sistemas turbulentos. Identificamos nesse trabalho que FDP's das diferenças de velocidades simulados em um modelo de Couette–Taylor acompanha o comportamento previsto pela superestatística aplicada a sistemas turbulentos, apesar de não termos obtidos os mesmos valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\tau$  e  $q$ . Isso pode ser justificado, pois o modelo computacional é deveras simplificado quando comparado com experimentos reais: regime isotérmico, única condição inicial, não influência da gravidade e a simplificação numérica intrínseca do simulador usado. Para trabalhos futuros visa-se malhas mais finas e usar diversos pontos na região anular para medir a velocidade em diferentes pontos, consideração da gravidade nos cálculos, considerar equação da energia (modelo não-isotérmico).

## 5. AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao FESC - Grupo de Física Estatística e Sistemas Complexos do Instituto de Física da UFBA pelo uso de seus recursos computacionais. Esse trabalho recebeu auxílio de bolsa de mestrado da FAPESB - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia.

## 6. REFERÊNCIAS

- Ausloos, M. and Petroni, F., 2007. “Tsallis non-extensive statistical mechanics of el niño southern oscillation index”. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, Vol. 373, pp. 721–736.
- Beck, C., 2000. “Application of generalized thermostatistics to fully developed turbulence”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 277, No. 1-2, pp. 115–123.
- Beck, C., 2002. “Nonextensive methods in turbulence and particle physics”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 305, No. 1-2, pp. 209–217.
- Beck, C., 2004. “Superstatistics in hydrodynamic turbulence”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 193, No. 1-4, pp. 195–207. Anomalous distributions, nonlinear dynamics, and nonextensivity.
- Beck, C., Cohen, E.G. and Rizzo, S., 2005a. “Atmospheric turbulence and superstatistics”. *Europhysics News*, Vol. 36, No. 6, pp. 189–191.
- Beck, C., Cohen, E.G.D. and Swinney, H.L., 2005b. “From time series to superstatistics”. *Phys. Rev. E*, Vol. 72, No. 5, p. 056133.
- Beck, C., Lewis, G.S. and Swinney, H.L., 2001. “Measuring nonextensivity parameters in a turbulent couette-taylor flow”. *Phys. Rev. E*, Vol. 63, No. 3, p. 035303.
- Frisch, U., 1995. *Turbulence: The legacy of A. N. Kolmogorov*, Vol. 1. Cambridge University Press, 1st edition.
- Gotoh, T. and Kraichnan, R.H., 2004. “Turbulence and tsallis statistics”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 193, No. 1-4, pp. 231–244. Anomalous distributions, nonlinear dynamics, and nonextensivity.

- Katul, G., Porporato, A., Cava, D. and Siqueira, M., 2006. "An analysis of intermittency, scaling, and surface renewal in atmospheric surface layer turbulence". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 215, No. 2, pp. 117–126.
- Neto, C.R., Zanandrea, A., Ramos, F.M., Rosa, R.R., Bolzan, M.J.A. and Sá, L.D.A., 2001. "Multiscale analysis from turbulent time series with wavelet transform". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 295, No. 1-2, pp. 215–218.
- Peyrard, M. and Daumont, I., 2002. "Statistical properties of one-dimensional 'turbulence'". *EPL (Europhysics Letters)*, Vol. 59, No. 6, pp. 834–840.
- Prato, D. and Tsallis, C., 1999. "Nonextensive foundation of lévy distributions". *Phys. Rev. E*, Vol. 60, No. 2, pp. 2398–2401.
- Ramos, F.M., Rosa, R.R., Neto, C.R., Bolzan, M.J.A., Sá, L.D.A. and Velho, H.F.C., 2001. "Non-extensive statistics and three-dimensional fully developed turbulence". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 295, No. 1-2, pp. 250–253.
- Ramos, F., Rodrigues Neto, C. and Rosa, R., 1999. "Intermittency and nonextensivity in turbulence and financial markets". *ArXiv Condensed Matter e-prints*.
- Shivamoggi, B.K., 2003. "Non-extensive statistical mechanics of compressible turbulence". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 318, No. 3-4, pp. 358–370.
- Sunghwan Jung, H.L.S., 2005. "Velocity difference statistics in turbulence". *Phys. Rev. E*, Vol. 72, No. 2, p. 026304.
- Swinney, G.S.L..H.L., 1999. "Velocity structure functions, scaling, and transitions in high-reynolds-number couette-taylor flow". *Phys. Rev. E*, Vol. 59, No. 5, pp. 5457–5467.
- Tsallis, C., 1988. "Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics". *Journal of Statistical Physics*, Vol. 52, No. 1-2, pp. 479–487.
- Tsallis, C., 1999. "Nonextensive statistics: Theoretical, experimental and computational evidences and connections". *Braz. J. Phys.*, Vol. 29, p. 1.
- Tsallis, C., 2009. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a complex world*, Vol. 1. Springer New York.
- Tsallis, C., Levy, S.V.F., Souza, A.M.C. and Maynard, R., 1995. "Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of lévy distributions in nature". *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 75, No. 20, pp. 3589–3593.
- Tsallis, C., Levy, S.V.F., Souza, A.M.C. and Maynard, R., 1996. "Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of the lévy distributions in nature". *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 77, No. 27, p. 5442.
- Tsallis, C., Mendes, R.S. and Plastino, A.R., 1998. "The role of constraints within generalized nonextensive statistics". *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, Vol. 261, No. 3-4, pp. 534 – 554.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluso no seu trabalho.