

MÉTODOS ESPECTRAIS E SEUS DERIVADOS

Jáuber C. Oliveira

Departamento de Matemática
 Universidade Federal de Santa Catarina
 88040-900 Florianópolis, SC, Brasil
 e-mail: jauber@mtm.ufsc.br

PREÂMBULO

Neste texto, apresentamos os aspectos introdutórios fundamentais à compreensão dos denominados métodos espectrais e discutimos também outros métodos derivados dessa classe. Em cada caso, procurou-se apresentar os resultados teóricos essenciais juntamente com exemplos ilustrativos e uma discussão das idéias centrais.

Almeja-se que o texto sirva de trampolim para os livros e artigos citados na bibliografia (algumas sugestões, dependentes do rumo a seguir, são discutidas na última seção).

1. INTRODUÇÃO: ASPECTOS GERAIS

Os métodos espectrais tem origem histórica atribuída por alguns a C. Lanczos (Lanczos, 1938). No entanto, a viabilidade destes métodos na resolução de EDP's tornou-se possível apenas no final da década de 60 com os trabalhos de Orszag (Orszag, 1969; Orszag, 1970) e Eliassen, Machenhauer e Rasmussen, 1970. A principal barreira vencida naquela época foi o desenvolvimento de transformadas, necessárias no esquema espectral-Galerkin para a avaliação das somas de convolução originárias dos termos não-lineares. Kreiss e Olinger, 1972, e Orszag, 1972, foram pioneiros na aplicação dos métodos espectrais por colocação.

Os métodos espectrais são caracterizados por empregar expansões em série de certas funções ortogonais infinitamente diferenciáveis. Tais expansões são rapidamente convergentes se os dados do problema (forçantes, coeficientes da EDO/EDP, contornos do domínio) são suficientemente suaves. A resolução das equações diferenciais emprega o formalismo variacional (os métodos espectrais representam uma sub-classe dos métodos de resíduos ponderados), ou seja, minimiza-se o resíduo da equação diferencial de três formas alternativas (dependentes da escolha das funções teste): (a) nos métodos pseudo-espectrais torna-se o resíduo nulo em pontos de colocação previamente escolhidos, (b) no esquema de Galerkin, as funções teste são iguais as funções tentativa e ortogonais ao resíduo da equação diferencial, (c) no método espectral-tau, o resíduo é também ortogonal às funções teste, mas essa condição é imposta para um subconjunto do total das funções teste. Os graus de liberdade restantes são empregados para impor as condições de contorno que, diferentemente das duas outras classes, não são satisfeitas automaticamente pelas funções tentativa.

A propriedade fundamental destas expansões em série, que deram nome ao mé-

todo, é a seguinte: o erro de truncamento entre a série com um número finito de termos, digamos N , e a função a ser aproximada decai a zero mais rapidamente que qualquer potência de $1/N$, se a função é infinitamente diferenciável ou analítica. Este tipo de convergência é denominado de *convergência espectral*. Por exemplo, é sabido que expansões em séries de Fourier aproximam com acurácia espectral funções infinitamente diferenciáveis e periódicas (a função juntamente com todas as suas derivadas). Estas características tornaram os métodos espectrais bastante atrativos como instrumento de resolução computacional de equações diferenciais. A monografia de Gottlieb e Orszag (Gottlieb e Orszag, 1977) e os trabalhos publicados por Orszag (Orszag, 1980; Orszag, 1971a; Orszag, 1969; Orszag, 1971b), dentre outros) e outros autores trouxeram contribuições fundamentais à viabilidade computacional e disseminação do método (Fornberg e Sloan, 1994; Fornberg, 1998; Funaro, 1992; Funaro, 1997; Trefethen, 2000; com destaque para Boyd, 1989).

Até recentemente (Guo, 1998), Canuto et al., 1988, representou a análise mais detalhada (em livro) da teoria matemática dos métodos espectrais. As aproximações ortogonais em espaços de Sobolev (ver, por exemplo, Canuto e Quarteroni, 1982) tem papel de destaque na teoria, principalmente após a extensão dos métodos espectrais a problemas com geometria complicada através de esquemas de decomposição do domínio (que incluem os *métodos dos elementos espectrais*, propostos por Patera, 1984, como caso particular).

O método dos elementos espectrais, termo cunhado por Patera, combina a elevada acurácia dos métodos espectrais "puros" com a flexibilidade e robustez computacional do método dos elementos finitos. Esta combinação permite resolver equações diferenciais em geometrias complicadas com facilidade na implementação das condições de contorno, termos fontes (forçantes), etc. Contudo, a vantagem principal desta combinação é o fato de que resolve-se com elevada precisão problemas envolvendo dados irregulares, pois refina-se a malha computacional nas regiões envolvendo elevados gradientes, o que torna esse método semelhante a versão h-p dos elementos finitos (ver, por exemplo, Patera, 1986).

Algumas interessantes alternativas aos esquemas básicos já citados serão consideradas na última seção.

2. ESPAÇOS FUNCIONAIS

Nesta seção, apresentamos notações e definições fundamentais referentes aos espaços de funções relevantes a algumas seções deste texto. As propriedades e resultados fundamentais sobre a teoria destes espaços podem ser encontradas em Oden e Demkowicz, 1996, Adams, 1975, Lions e Magenes, 1972 e Rivera, 1999.

O símbolo $:=$ denota definição. $j = \overline{0, n}$ denota $j = 0, 1, \dots, n$.

Ω representa um subconjunto aberto, limitado do \mathbb{R}^n . Ω possui contorno suficientemente regular (por exemplo, pode ter forma poligonal, mas não pode ter cúspides) para que sejam válidos alguns dos resultados fundamentais referentes aos espaços de Sobolev.

A grosso modo, a medida de um conjunto é definida pelo limite da soma dos volumes dos cubos de uma partição do \mathbb{R}^n , cujos fechos estão contidos nesse conjunto.

O limite é tomado quando a norma da partição tende a zero. Um subconjunto M do \mathbb{R}^n é (Lebesgue) mensurável se for possível aproximá-lo, em medida, por uma seqüência de conjuntos abertos que o contenha. Desse modo, todo conjunto aberto é mensurável. Porém, subconjuntos de conjuntos mensuráveis podem não ser mensuráveis. Uma função f é mensurável se seu domínio $\text{dom}(f)$ for um conjunto mensurável do \mathbb{R}^n e para todo número real α , o conjunto $\{x \in \text{dom}(f) \mid f(x) < \alpha\}$ é mensurável.

A integral de Lebesgue de uma função f mensurável, não-negativa, sobre $\text{dom}(f)$ é definida como a medida do conjunto

$$\{(x, y) \in \text{dom}(f) \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}.$$

A integral de f sobre um conjunto mensurável M é definida como a integral da restrição de f a este conjunto. Uma função mensurável arbitrária f possui parte positiva definida por $f^+ := \max\{f, 0\}$. A parte negativa de f é a função $f^- := \max\{-f, 0\}$. Assim, f^+ e f^- são funções não-negativas e $f = f^+ - f^-$. A integral (de Lebesgue) de f é definida por $\int f = \int f^+ - \int f^-$.

Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, representa o espaço linear formado pelas (classes de equivalência de) funções (mensuráveis) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $|f|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω . $L^p(\Omega)$, munido com a norma $\|f\|_p = (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{1/p}$, é um espaço de Banach (isto é, um espaço linear normado completo - teorema de Riesz-Fischer). $L^\infty(\Omega)$ é formado pelas funções que são limitadas a menos de um conjunto de medida nula. Este conjunto munido com a norma $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)|, x \in \Omega\}$ também é um espaço de Banach.

$C^k(\Omega)$ é o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ contínuas que possuem derivadas parciais contínuas até a ordem k . Denota-se $C^0(\Omega)$ por $C(\Omega)$. $C^k(\overline{\Omega})$ é o conjunto das funções $f \in C^k(\Omega)$ cujas derivadas parciais até a ordem k podem ser estendidas continuamente até o fecho (menor conjunto fechado que contém Ω) $\overline{\Omega}$ de Ω . Diz-se que $f \in C^\infty(\Omega)$ se $f \in C^k(\Omega)$ para todo $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Define-se $C^\infty(\overline{\Omega})$ de forma análoga. $C_0^\infty(\Omega)$ representa o conjunto das funções de $C^\infty(\Omega)$ que se anulam fora de um subconjunto limitado e fechado de Ω (isto é, tem suporte compacto contido em Ω).

É usual denotar

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

com $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Diz-se que uma função $f \in L^p(\Omega)$ possui derivada generalizada $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ se existe uma função $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} f(x) (D^\alpha \varphi)(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha(x) \varphi(x) dx$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Nesse caso, define-se $D^\alpha f = v_\alpha$.

Para $1 \leq p < \infty$, os espaços de Sobolev de ordem $m \in \mathbb{N}$ são definidos por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

Tem-se que $\|f\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}$ é uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$ e $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p,\Omega})$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, o espaço é denotado $H^m(\Omega)$ em vez de $W^{m,p}(\Omega)$. A norma em $H^m(\Omega)$, $\|\cdot\|_{m,\Omega} := \|\cdot\|_{m,2,\Omega}$, é gerada pelo seguinte produto interno: $(f, g)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2\Omega}$. Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, prova-se que $H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid J_m \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$, sendo $J_m(x) := (1 + |x|^2)^{m/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, e \hat{f} é a transformada de Fourier de f . $\|f\| := \left\|J_m \hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é uma norma equivalente à norma de Sobolev $\|\cdot\|_{m,\mathbb{R}^n}$ em $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Desse modo, define-se para $s \in \mathbb{R}^+$, $H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in L^2(\Omega) \mid J_s \hat{f} \in L^2(\Omega)\right\}$.

Tem-se que $H^s(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \left\|J_s \hat{f}\right\|_{L^2\mathbb{R}^n}$ é um espaço de Hilbert (espaço de Banach com produto interno que induz a norma).

Para $s \in \mathbb{R}^+$ e Ω aberto do \mathbb{R}^n com fronteira regular, o espaço de Sobolev $H^s(\Omega)$ é definido por $H^s(\Omega) = \{f|_\Omega \mid f \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$. $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert quando munido da seguinte norma:

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} = \inf \left\{ \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \mid g|_\Omega = f, g \in H^s(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

3. UMA INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS ESPECTRAIS

3.1. Problemas periódicos

3.1.1. Introdução

A origem dos métodos espectrais está associada à resolução de problemas (envolvendo dados suaves) com condições de contorno periódicas através dos métodos de Fourier. Estes métodos são extremamente eficientes, pois empregam as transformadas rápidas de Fourier (Fast Fourier Transforms - FFT) a fim de reduzir o custo computacional do cálculo das transformadas discretas de Fourier (direta e inversa) entre o espaço físico e o espaço transformado.

Observação 1 *Tipicamente, o espaço físico seria o L^2 , o espaço das funções cujo quadrado é (Lebesgue) integrável, e o espaço transformado, o espaço l^2 das seqüências complexas cujo quadrado é somável. Um teorema de F. Riesz caracteriza \mathbb{F} como um isomorfismo entre $L^2(0, 2\pi)$ e l^2 (de fato, qualquer espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isomórfico ao espaço l^2 - ver p. ex. Chae, 1995).*

3.1.2. Revisão de resultados fundamentais

Antes de detalhar os procedimentos de resolução de problemas deste tipo, é fundamental revisar alguns resultados teóricos (teoria da aproximação) que esclarecem como surge a denominada *convergência espectral* em problemas deste tipo.

Primeiramente define-se a *transformada contínua finita de Fourier* de uma função $v \in L^2(0, 2\pi)$:

$$\mathbb{F}(v)_k = \hat{v}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Observação 2 \hat{v} é o coeficiente de Fourier de v . A longa designação é necessária para distinguir da transformada de Fourier de funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{u} = \mathbb{F}u := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

Então,

Proposição 3 Se $v \in C^m[0, 2\pi]$ e $v^{(k)}$ são periódicas para $k = 1, 2, \dots, m-2$, então $\hat{v}_n = O(n^{-m})$.

Conclui-se que se uma função possui apenas um número finito (m) de derivadas contínuas ou, no caso de possuir mais de m derivadas contínuas, se apenas $m-2$ delas forem periódicas então a taxa de decaimento dos coeficientes de Fourier é algébrica (ordem m). Obviamente, se v possui derivadas de todas as ordens contínuas (é C^∞) e periódicas, então teremos um decaimento a zero mais acentuado que qualquer potência do inverso de n , a *convergência espectral*. É instrutivo observar que este resultado é de fácil obtenção. O argumento, em linhas gerais, segue após a realização sucessiva de integrações por partes na expressão que define os coeficientes de Fourier \hat{v}_n e do fato de que a periodicidade da função anula os "termos de contorno".

Esta noção tão fundamental a esta classe de métodos (para problemas periódicos) é conhecida há bastante tempo. Na teoria das séries de Fourier, define-se o espaço linear $C_p^\infty(\mathbb{R})$ das *funções periódicas suaves*, formada pelas funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas periódicas (período 2π) e infinitamente diferenciáveis, isto é, $C_p^\infty = C_p \cap C^\infty$. Neste contexto, define-se que uma seqüência complexa $\{c_n\}_{-\infty}^\infty$ tem *decréscimo rápido* se dado um número s positivo, existe uma constante C (possivelmente dependente de s) tal que: $|c_n| \leq C |n|^{-s}$. Então (ver detalhes em Beals, 1973),

Teorema 4 Uma seqüência complexa $\{c_n\}_{-\infty}^\infty$ é uma seqüência de coeficientes de Fourier de uma função $v \in C_p^\infty$ se e somente se a seqüência tem *decréscimo rápido*.

Seja $S_{2N} \in L^2(0, 2\pi)$ o subespaço gerado pelo seguinte sistema ortogonal: $\{e^{inx}, n = -N, \dots, N\}$. O operador de projeção $P_N: L^2(0, 2\pi) \rightarrow S_{2N}$ dado por

$$P_N v := \sum_{n=-N}^N \hat{v}_n e^{inx} \quad (2)$$

é definido a fim de estabelecer cotas para o erro de truncamento $(v - P_N v)$ em determinadas normas com base na regularidade da função aproximada. No caso a seguir, o erro é mensurado na norma natural do subespaço do espaço de Hilbert $H^m(0, 2\pi)$, formado pelas funções com $m-1$ derivadas periódicas e denotado $H_p^r(0, 2\pi)$.

Seja $|v|_r$ é uma semi-norma definida por $|v|_r = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2r} |\hat{v}_n|^2\right)^{1/2}$. Esta semi-norma é equivalente a $\|\cdot\|_r$, que pode ser associada (é equivalente - ver, por exemplo, Kress, 1989) à norma $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)^r |\hat{v}_n|^2\right)^{1/2}$. Então (Guo, 1998),

Teorema 5 (Cota para o erro de truncamento) *Se $r \geq 0$ e $\mu \leq r$, então $\forall v \in H_p^r(0, 2\pi)$, $\|v - P_N v\|_\mu \leq c N^{\mu-r} |v|_r$.*

Analogamente, define-se o operador de interpolação $I_N: C[0, 2\pi] \rightarrow S_{2N}$ por

$$I_N v := \sum_{n=-N}^N \tilde{v}_n e^{inx}, \quad (3)$$

onde $\tilde{v}_n = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=0}^{2N} v(x_j) e^{-inx_j}$ e $x_j = \frac{2\pi j}{2N+1}$. \tilde{v}_n é a transformada discreta de Fourier. Então (Guo, 1998),

Teorema 6 (Cota para o erro de interpolação) *Se $r > 0$ e $0 \leq \mu \leq r$, então $\forall v \in H_p^r(0, 2\pi)$, $\|v - I_N v\|_\mu \leq c N^{\mu-r} |v|_r$.*

Se v é analítica e periódica com período 2π , $v \in An_p$, obtém-se uma cota superior $O(e^{-Ns})$ para a norma do máximo do erro de interpolação:

Teorema 7 (Kress, 1989) *Seja $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica e periódica com período 2π , então existe uma região $D = \mathbb{R} \times (-s, s) \subset \mathbb{C}$ com s positivo tal que v admite uma extensão holomórfica, limitada e periódica com período 2π , $v: D \rightarrow \mathbb{C}$. O resto na interpolação trigonométrica pode ser estimado uniformemente sobre $[0, 2\pi]$ por*

$$\|I_N v - v\|_\infty \leq M \frac{\cotgh(s/2)}{\sinh(Ns)}, \quad (4)$$

onde M denota uma cota para a função holomórfica v sobre D .

A diferença $I_N v - P_N v$, denominada *erro de alunha* (em inglês, *aliasing*), satisfaz o seguinte "teorema de Pitágoras" em L^2 , isto é, o erro de alunha é ortogonal ao erro de projeção (ver, por exemplo, Canuto et al., 1988):

$$\|v - I_N v\|^2 = \|v - P_N v\|^2 + \|A_N v\|^2 \quad (5)$$

O erro de alunha é caracterizado pela relação entre os coeficientes \hat{v}_n e \tilde{v}_n :

$$\tilde{v}_n = \hat{v}_n + \sum_{0 \neq m = -\infty}^{+\infty} \hat{v}_{n+Nm} \quad (6)$$

\tilde{v}_n representa uma aproximação do coeficiente de Fourier \hat{v}_n . \tilde{v}_n difere de \hat{v}_n por uma soma de harmônicas distintas da n -ésima por múltiplos de N . Como $e^{in x_j} = e^{i(n+Nm)x_j}$, estes modos são indistinguíveis e as frequências destas harmônicas sobrepõe-se à n -ésima frequência. Estes erros são conhecidos por causarem instabilidades numéricas em problemas não-lineares. Conforme destacado por Boyd, 1989, os erros de alunha não são relevantes se os coeficientes de Fourier apresentam decaimento espectral.

3.1.3. Exemplos ilustrativos

Nosso primeiro exemplo de resolução de uma equação diferencial foi escolhido propositalmente neste contexto de problemas periódicos por estar de acordo com a história do surgimento do método (suas "raízes"). Observaremos que várias destas características se mantêm no caso de problemas não-periódicos mediante uma escolha apropriada das funções de base.

Exemplo 8 *Considere o seguinte problema a valores no contorno:*

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \pi^2 \operatorname{sen}^2(x) v = f(x), \quad 0 < x < 2\pi \quad (7)$$

com condições de contorno de Dirichlet homogêneas e função forçante igual a $f(x) = -\pi \cos(x) \cos(\pi \cos(x))$.

Este exemplo foi construído artificialmente para fins ilustrativos, partindo da função $u = \sin(\pi \cos(x))$ e diferenciando-a duas vezes para encontrar a equação diferencial que a tem por solução (prática comum na validação de qualquer código computacional que resolva EDOs/EDPs). Na tabela 1 apresentamos a evolução do máximo erro entre a aproximação por série de Fourier e a solução exata (uma aproximação para o erro de projeção) em função do número de termos empregados. Neste caso o erro atingiu o limite da precisão da máquina empregada (os cálculos foram feitos no software MATLAB). As figuras 1 e 2 ilustram a convergência uniforme e espectral da aproximação de Fourier em relação à solução exata.

| N | 4 | 8 | 16 | 32 |
|--------------------|--------|-----------|-----------|------------|
| $\ e\ _{\infty}^r$ | 0,6753 | 9,2137E-4 | 1,1174E-9 | 3,7192E-15 |

Tabela 1: Erro máximo na expansão de Fourier (Galerkin) em função de N .

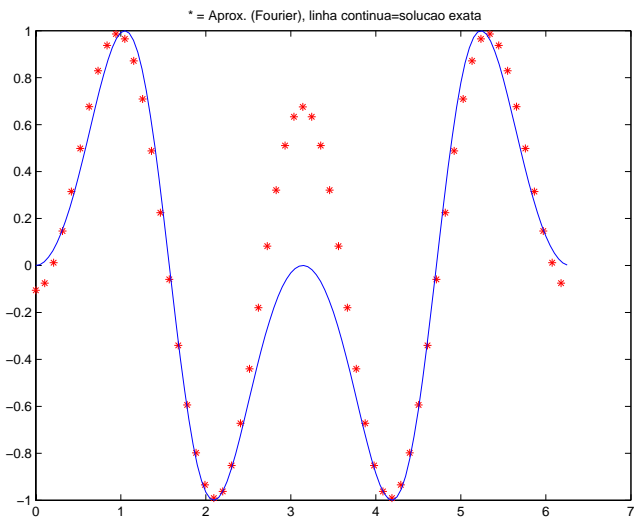


Figura 1: Aproximação de Fourier-Galerkin versus solução exata para $N=4$.

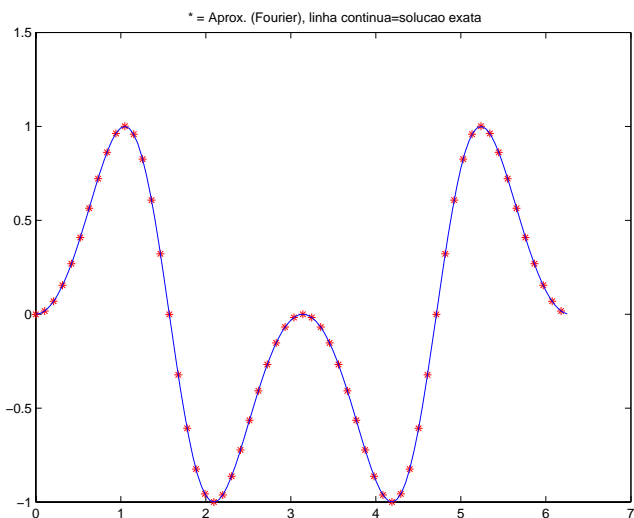


Figura 2: Aproximação de Fourier-Galerkin versus solução exata para $N=8$.

A aproximação numérica $v_N = \sum_{k=-N}^N c_k \varphi_k(x)$ para a solução desta equação diferencial foi construída a partir da formulação variacional (Galerkin):

$$\langle R_N, \varphi_j \rangle_{L^2} = 0, \quad -N \leq j \leq N \quad (8)$$

onde $R := L v_N - f$, $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ e $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_0^{2\pi} f \bar{g} dx$. Esta discretização resulta em um sistema linear algébrico $\mathbf{M} \mathbf{c} = \mathbf{F}$, onde

$$\begin{aligned} M_{j,k} &= -2\pi k^2 \delta_{j,k} + \\ &\pi^2 \{ \langle \text{sen}^2(x), \cos(k-j)x \rangle_{L^2} + i \langle \text{sen}^2(x), \text{sen}(k-j)x \rangle_{L^2} \}, \\ F_j &= 2\pi \hat{f}_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Exemplo 9 Revisitemos o problema a valores no contorno descrito no exemplo anterior. Desta vez construiremos uma solução aproximada segundo o esquema variacional por colocação.

Neste caso, definimos inicialmente o espaçamento e os pontos de colocação: $h := \frac{2\pi}{N}$, $x_j = j h$, $j = 0, \overline{N}$. Na formulação variacional por colocação, impõe-se que o resíduo seja nulo nos pontos de colocação: $R_N(x_j) = 0$, $1 \leq j \leq N$. Obtém-se o seguinte sistema linear algébrico: $\mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{G}$, onde

$$N_{j,k} = [-k^2 + \pi^2 \text{sen}^2(x_j)] e^{i k x_j}, \quad (11)$$

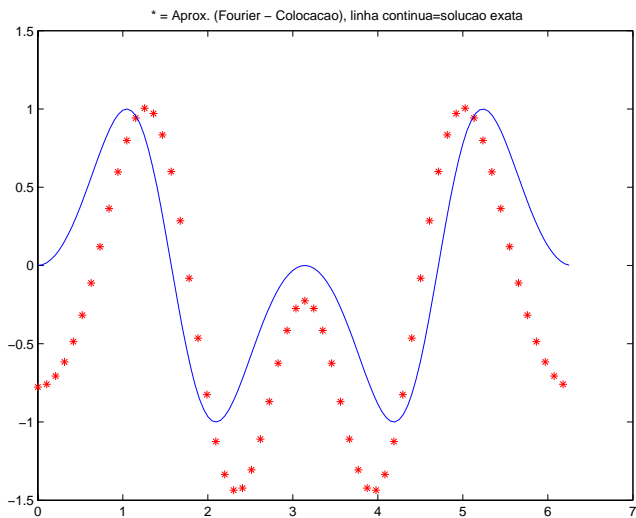
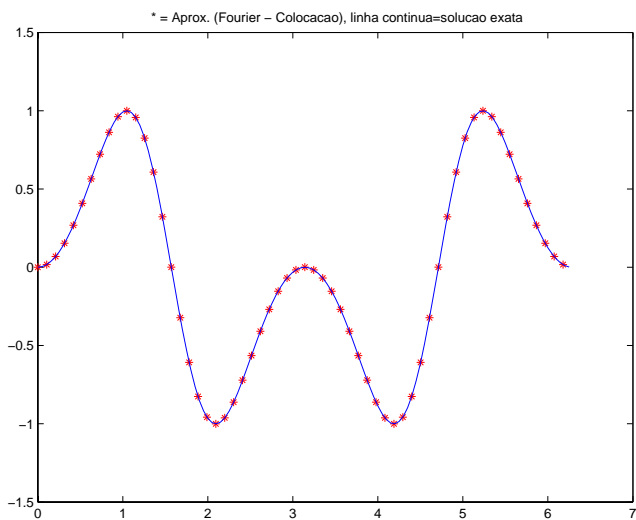
$$G_j = f(x_j). \quad (12)$$

Na tabela 2, apresentamos o erro máximo em função de N entre a aproximação por colocação $v_N(x) = \sum_{k=-N}^N d_k e^{i k x}$ e a solução exata. As figuras 3 e 4 também ilustram a rápida convergência obtida.

Os resultados teóricos e exemplos apresentados reforçam o ponto central desta seção: os métodos de Fourier não tem competidores no que diz respeito a resolução aproximada de equações diferenciais associadas a problemas periódicos com dados suaves. Além da rápida taxa de convergência, os métodos de Fourier permitem o uso da transformada rápida de Fourier a fim de reduzir significativamente o custo computacional na avaliação das transformadas discretas.

| N | 4 | 8 | 16 | 32 |
|--------------------|--------|-----------|------------|------------|
| $\ e\ _{\infty}^F$ | 0,7766 | 5,2863E-4 | 2,2321E-11 | 1,2212E-15 |

Tabela 2: Erro máximo na expansão de Fourier (colocação) em função de N .

Figura 3: Aproximação de Fourier-colocação versus solução exata para $N=4$.Figura 4: Aproximação de Fourier-colocação versus solução exata para $N=8$.

3.2. As transformadas discretas de Fourier

A avaliação computacional das transformadas finitas de Fourier presentes em esquemas espectrais envolve a necessidade de discretização, que conduz naturalmente às transformadas discretas de Fourier.

Seja $x_j = j \frac{2\pi}{N}$, $j = \overline{0, N-1}$. Consideramos a seguinte definição (adequada quando emprega-se a versão mais simples da transformada rápida de Fourier, onde é necessário que N seja uma potência de 2) para a transformada discreta de Fourier:

$$\mathbb{D}(u_j)_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-i k x_j}, \quad (13)$$

para $k = -N/2, \dots, N/2 - 1$.

A transformada inversa é dada por:

$$\mathbb{D}^{-1}(c_k)_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} c_k e^{i k x_j}. \quad (14)$$

para $j = \overline{0, N-1}$.

Além da transformada discreta de Fourier, a transformada discreta em cossenos (denotada DCT), definida por,

$$\mathbb{D}_c(u_j)_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} u_j \cos\left(\frac{\pi j k}{N}\right), \quad k = \overline{0, N}, \quad (15)$$

tem grande importância no contexto das expansões em polinômios de Chebyshev (detalhadas nas próximas seções).

$$\mathbb{D}_c^{-1}(U_k)_j := 2 \sum_{k=0}^N \frac{1}{c_k} U_k \cos\left(\frac{\pi j k}{N}\right), \quad j = \overline{0, N}, \quad (16)$$

é a transformada discreta inversa em cossenos (usualmente denotada IDCT), que difere da transformada direta apenas por um escalar.

A resolução aproximada de EDOS/EDPs por métodos espectrais ganha considerável eficiência computacional se for possível empregar transformadas rápidas para avaliar as transformadas discretas em $O((5/2)N \log_2 N)$ operações. Recomendamos Van Loan, 1992, para maiores detalhes sobre FFT/DCT e Briggs e Henson, 1995, para um estudo profundo sobre DFTs e suas múltiplas facetas.

Encerramos esta seção com um resultado que relaciona as transformadas contínua (finita) e discreta de Fourier quando aplicadas a funções periódicas suaves (C^∞ ou analíticas).

Proposição 10 *O erro entre $\mathbb{D}(v_j)_k$ e $\mathbb{F}(v)_k$ decai mais rápido que algebricamente com N no caso de funções C_p^∞ ou An_p (ver, p. ex., Briggs e Henson, 1995; Kress,*

1989).

3.3. Problemas não-periódicos

3.3.1. Introdução

Problemas a valores no contorno envolvendo condições de fronteira não-periódicas também podem ser resolvidos aproximadamente por métodos espectrais. Problemas envolvendo domínios infinitos ou semi-infinitos não serão considerados neste texto (Boyd, 1989; Boyd, 2001; Boyd, 1987; Boyd, 1982). O procedimento de resolução é similar ao caso periódico, porém apenas com a escolha adequada das funções de base obtém-se a acurácia espectral (associada a problemas envolvendo dados suaves). As funções de base apropriadas pertencem a uma família de polinômios ortogonais originada de um problema de Sturm-Liouville singular. Expansões em auto-funções originadas de problemas de Sturm-Liouville regulares apresentam taxa de convergência algébrica, pois nestes casos a taxa de convergência é limitada não apenas pela regularidade dos dados como também pelas condições de fronteira.

3.3.2. Resultados fundamentais

Antes de descrevermos os métodos espectrais cujas funções tentativa são os polinômios ortogonais citados, apresentamos uma breve revisão de alguns resultados elementares da teoria da aproximação no espaço de Hilbert $H := (L_w^2(a, b), \langle \cdot, \cdot \rangle)$. H é formado pelo conjunto das funções cujo quadrado é (Lebesgue) integrável em relação à função peso w equipado com o produto interno $\langle f, g \rangle_{L_w^2(a, b)} := \int_a^b w f \bar{g} dx$ (ou seja, $\int_a^b w |f|^2 dx < \infty$, onde w é uma função peso contínua e positiva sobre (a, b)). Esta revisão propiciará uma caracterização mais clara das propriedades de (rápida) convergência do método.

Primeiramente, citamos uma propriedade bem conhecida das seqüências polinômiais mônicas e ortogonais em H .

Lema 11 *Se uma seqüência de polinômios $\{p_k\}$ é mônica e ortogonal, então o polinômio de grau $n+1$, p_{n+1} , é ortogonal (com relação ao espaço $L_w^2(a, b)$) a qualquer polinômio q de grau $\leq n$.*

O lema seguinte (demonstrado, por exemplo, em Rivlin, 1969) fornece uma relação de recorrência satisfeita por polinômios ortogonais em $L_w^2(a, b)$. Dado um intervalo e função peso, a partir deste resultado podemos construir uma seqüência (única) de polinômios ortogonais.

Lema 12 *Dada uma função peso positiva $w(x)$ sobre (a, b) , definimos $p_0 := 1$, $p_1 := x - a_1$ com $a_1 = \frac{\int_a^b x w(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}$, e*

$$p_{n+1} := (x - a_{n+1}) p_n - b_{n+1} p_{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (17)$$

onde $a_{n+1} = \frac{\int_a^b x w p_n^2(x) dx}{\int_a^b w p_n^2(x) dx}$, $b_{n+1} = \frac{\int_a^b x w p_n p_{n-1} dx}{\int_a^b w p_{n-1}^2 dx}$.

Então, $\{p_n\}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais em $L_w^2(a, b)$.

Lema 13 A seqüência de polinômios ortogonais mônicos em $L_w^2(a, b)$ é única, onde $w(x)$ é uma função peso positiva sobre (a, b) .

Uma vez que os zeros de polinômios ortogonais tem grande importância nos esquemas de integração numérica e resolução de equações diferenciais por colocação, o próximo resultado merece citação.

Teorema 14 (Davis, 1975, pg. 236) Os zeros de p_{n+1} são reais, simples e jazem no intervalo (a, b) .

A partir do resultado enunciado no lema 2, define-se a família dos polinômios ortogonais de Jacobi.

Definição 15 Os polinômios de Jacobi, denotados $J_n^{\alpha, \beta}(x)$, são gerados a partir das equações do Lema 2 com $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ para $\alpha, \beta > 1$ e $(a, b) = (-1, 1)$ com $J_n^{\alpha, \beta}(1) := 1$.

OBS.: Sub-famílias de polinômios conhecidos que estão contidas na família recém caracterizada:

- a. $\alpha = \beta > -1$: polinômios de Gegenbauer
- b. $\alpha = \beta = 0$: polinômios de Legendre
- c. $\alpha = \beta = -1/2$: polinômios de Chebyshev

Condição de Ortogonalidade:

$$\int_{-1}^1 J_n^{\alpha, \beta}(x) J_m^{\alpha, \beta}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 0, m \neq n. \quad (18)$$

Outro teorema caracterizador desta família de polinômios:

Teorema 16 (ver, por exemplo, Funaro, 1992) Os polinômios de Jacobi são soluções do seguinte problema de Sturm-Liouville em $(-1, 1)$: $\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) w \frac{d}{dx} J_n^{\alpha, \beta} \right\} + \lambda_n w J_n^{\alpha, \beta} = 0$, onde $w = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ e $\lambda_n = n(n+1+\alpha+\beta)$.

Uma peculiaridade importante dos polinômios de Jacobi é fornecida pela seguinte proposição (ver Canuto et al., 1988, pg. 286):

Proposição 17 As únicas autofunções polinomiais de um problema de Sturm-Liouville singular são os polinômios de Jacobi.

Finalmente, encerramos esta breve revisão com um teorema que estabelece uma cota para o erro de truncamento (em $L_w^2(-1, 1)$) para o caso em que a série de polinômios de Jacobi com N termos aproxima uma função v pertencente ao espaço de Sobolev $H_w^k(-1, 1)$ (v juntamente com suas derivadas até a ordem k são funções do

$L_w^2(-1, 1)$ com $w = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. O resultado garante convergência algébrica ($O(N^{-k})$) se $v \in H_w^k(-1, 1)$, mas $v \notin H_w^{k+1}(-1, 1)$. A convergência depende portanto apenas da suavidade da função a ser aproximada. Se v é suficientemente suave, por exemplo, v for C^∞ , então o teorema assegura o erro de truncamento (na norma de H) decai mais rapidamente que qualquer potência de $1/N$ (*convergência espectral*).

Teorema 18 (Erro de Truncamento (Jacobi), Funaro, 1992) *Seja $k \in \mathbb{N}$ e $I := (-1, 1)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que $\forall v \in H_w^k(I)$*

$$\|v - P_N v\|_{L_w^2(I)} \leq C N^{-k} \left\| (1-x^2)^{k/2} v^{(k)} \right\|_{L_w^2(I)}, \tag{19}$$

$\forall N > k$, onde $P_N v$ representa a série truncada em polinômios de Jacobi

$$P_N v(x) = \sum_{n=0}^N \hat{v}_n J_n^{\alpha, \beta}(x).$$

3.3.3. Aproximação por polinômios de Chebyshev

A construção de soluções aproximadas para equações diferenciais com condições de contorno não-periódicas geralmente envolve a escolha de polinômios de Chebyshev ou de Legendre. Neste texto, consideramos apenas séries em polinômios de Chebyshev.

Observação 19 *Os polinômios de Chebyshev (de primeira espécie) $T_n(x)$ tem várias propriedades marcantes:*

- (a) $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $k = 0, 1, \dots$, ou ainda, $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$,
- (b) são autofunções do seguinte problema de Sturm-Liouville singular:

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{1-x^2} \frac{dv}{dx} \right) + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} v = 0, \tag{20}$$

- (c) relação de recorrência: $T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$ com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$,
- (d) são ortogonais sobre $[-1, 1]$ com relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_{ch} \equiv \langle f, g \rangle_{L_w^2(-1, 1)} = \int_{-1}^1 \frac{f(x) \overline{g(x)}}{\sqrt{1-x^2}},$$

onde $w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ou seja,

$$\langle T_n, T_m \rangle_{ch} = \frac{\pi}{2} \tilde{c}_n \delta_{n,m}, \tag{21}$$

onde $\tilde{c}_n = 1$ se $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{c}_0 = 2$ e $\delta_{n,m}$ denota o delta de Kronecker,

- (e) nos pontos de Gauss-Lobatto, $x_j = \cos(y_j)$ com $y_j = \pi j/N$ e $j = \overline{0, N}$, a

seguinte relação de ortogonalidade discreta é válida:

$$\sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} T_j(x_n) T_j(x_m) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} T_n(x_j) T_m(x_j) = \frac{c_n}{2} N \delta_{n,m}, \quad (22)$$

onde $c_0 = c_N = 2$ e $c_j = 1$ para $j = 1, 2, \dots, N-1$.

(f) $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$, $T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n+1} n^2$ e $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$,

(g) Relação de recorrência para o cálculo de derivadas:

$$v'_N = \sum_{n=0}^N \hat{v}_n^{(1)} T_n(x), \quad (23)$$

onde

$$c_{n-1} \hat{v}_{n-1}^{(1)} = \hat{v}_{n+1}^{(1)} + 2n \hat{v}_n \quad (24)$$

para $k = N-1, N-2, \dots, 1$ e

$$\hat{v}_N^{(1)} = 0, \quad \hat{v}_{N-1}^{(1)} = 2N \hat{v}_N. \quad (25)$$

3.3.4. Exemplos ilustrativos

No exemplo a seguir, a solução de uma equação diferencial com condições de contorno de Dirichlet homogêneas é aproximada por uma expansão com convergência espectral. O procedimento de resolução empregado ilustra o fato de que resolver uma equação diferencial em série de polinômios de Chebyshev equivale a resolver um problema com solução par que satisfaz certas restrições no contorno que propiciam sua representação por uma expansão (espectral) em cossenos.

Exemplo 20 Consideremos o seguinte problema a valores no contorno:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + (4x^2 + 2) u = (4x^2 + 2), \quad -1 < x < 1 \quad (26)$$

com condições de contorno de Dirichlet homogêneas.

A solução exata desta equação é $u(x) = e - e^{x^2}$. Neste exemplo, efetuamos a mudança de variáveis, $x = \cos(y)$ a fim de transformar a EDO em outra com coeficientes periódicos. Definindo $v(y) := u(x)$, obtêm-se a seguinte EDO:

$$-\frac{d^2 v}{dy^2} + \cot g(y) \frac{dv}{dy} + 2 \operatorname{sen}^2 y (2 \cos^2 y + 1) v = f(y) \quad (27)$$

para $0 < y < \pi$, onde $f = e (4 \cos^2 y + 2) \operatorname{sen}^2 y$.

Define-se o espaçamento e os pontos de colocação: $h := \frac{\pi}{N+1}$, $y_j = \frac{h}{2} + (j-1)h$, com $j = \overline{1, N+1}$. Estes pontos de colocação são exatamente os zeros de $T_{N+1}(x)$.

Observação 21 A escolha destes pontos minimiza o erro de aproximação (interpolação) entre v e sua série aproximante (interpolante), produzindo a seguinte cota para o erro de interpolação (ver, p. ex., Gautschí, 1997): $\|v - I_N v\|_\infty \leq \frac{\|v\|_\infty}{(N+1)!} \frac{1}{2\pi}$.

Adotando novamente a formulação variacional por colocação, impõe-se que $R_N(y_j) = 0$ para $1 \leq j \leq N-2$. Este procedimento novamente resulta em um sistema linear algébrico: $\mathbf{M} \mathbf{v} = \mathbf{F}$, onde

$$M_{j,k} = -\varphi_k''(y_j) + \cotg(y_j) \varphi_k'(y_j) + 2 \operatorname{sen}^2(y_j) (2 \cos^2(y_j) + 1) \varphi_k(y_j) \quad (28)$$

para $1 \leq j, k \leq N-1$.

$$F_j = f(y_j). \quad (29)$$

Neste problema "recombinamos" (termo cunhado por Boyd, 1989) as funções de base de modo que estas satisfaçam automaticamente as condições de contorno. Ou seja, empregamos:

$$\varphi_k(x) = \cos(ky) - 1 \quad (30)$$

para k par, e

$$\varphi_k(x) = \cos(ky) - \cos(y) \quad (31)$$

para k ímpar.

A tabela 3 e as figuras 5 e 6 ilustram o fato de que a série

$$\sum_{k=1}^{N-1} \tilde{v}_k \varphi_{k+1}(y) \quad (32)$$

converge a uma taxa espectral para a solução $v(y)$ da EDO. De fato, como já observamos que o erro entre \tilde{v}_k e \hat{v}_k decai a zero espectralmente com N no caso de funções C_p^∞ ou An_p , e

$$\begin{aligned} \hat{v}_k &:= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{-2}{\pi n} \int_0^\pi v^{(1)}(x) \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= \frac{-2}{\pi n^2} \int_0^\pi v^{(2)}(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi n^3} \int_0^\pi v^{(3)}(x) \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi n^4} \int_0^\pi v^{(4)}(x) \cos(kx) dx \end{aligned}$$

etc.

As integrações por partes podem ser efetuadas indefinidamente: quando há derivada ímpar de v no integrando, o termo de contorno contém $\text{sen}(x)$ e portanto anula-se; quando há derivada par de v no integrando, o termo de contorno contém uma derivada ímpar de v , e também anula-se pois *todas as derivadas ímpares de $v(y)$ anulam-se no contorno*.

Conclusão: \hat{v}_k (e portanto \tilde{v}_k) converge a zero quando $k \rightarrow \infty$ a uma taxa mais rápida que qualquer potência de $1/N$.

Observação 22 *A expansão em polinômios de Chebyshev, que está associada à EDO para v descrita no exemplo, tem acurácia espectral porque: (a) v é uma função par (independente do fato de u ter ou não paridade) e periódica (juntamente com todas as suas derivadas) com período 2π , (b) as derivadas ímpares de v anulam-se nos extremos, e (c) os coeficientes e forçante da EDO são suaves (pelo menos C^∞ , se não forem analíticos).*

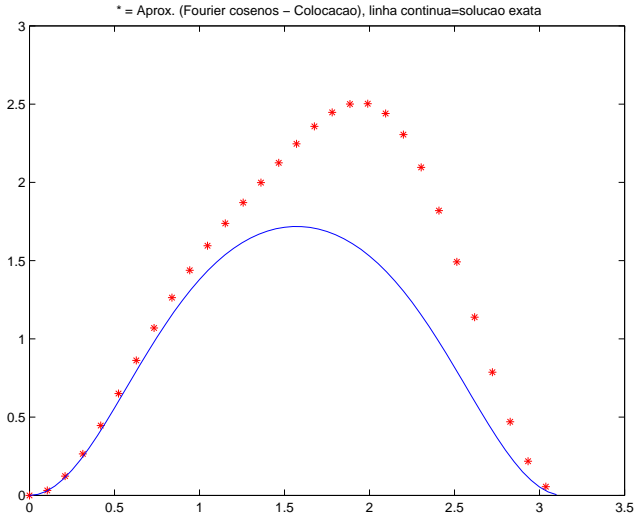


Figura 5: Aproximação por série em cossenos ($N=4$) e solução exata.

| N | 4 | 8 | 16 | 32 |
|------------------|--------|--------|-----------|------------|
| $\ e\ _\infty^p$ | 1,0060 | 0,0134 | 7,5002E-8 | 1,4294E-15 |

Tabela 3: Erro máximo na expansão espectral em cossenos em função de N .

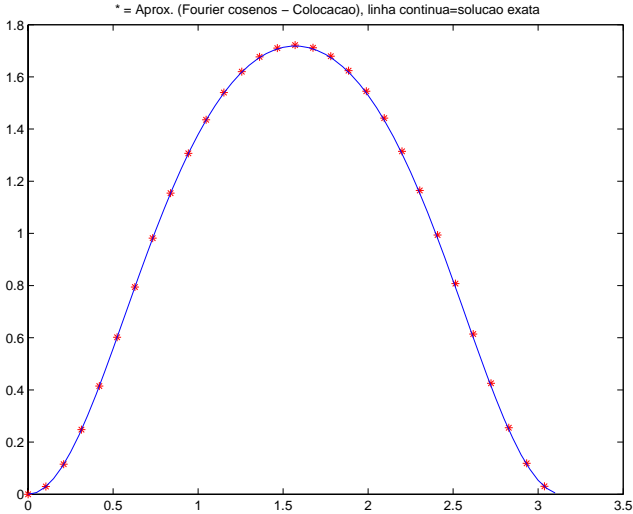


Figura 6: Aproximação por série em cosenos ($N=8$) e solução exata.

Obviamente, quando aproximamos a solução de uma EDO/EDP por série de polinômios de Chebyshev, evitamos a mudança de variável dependente (de u para v), conforme fizemos no exemplo. Resolve-se a equação diferencial diretamente para u em termos da variável independente x . Como neste caso, $x_j = \cos(h/2 + (j-1)h)$, obtém-se a característica distribuição de pontos nodais com espaçamento $O(1/N^2)$ próximo ao contorno.

Como discutimos a taxa de convergência da série de polinômios de Chebyshev para o caso de funções C^∞ , e muitas delas são analíticas na região de definição dos polinômios T_n , convém apresentar a seguinte cota $O(R^{-N})$ referente a aproximação de funções analíticas (similar ao teorema 7).

Teorema 23 (Kress, 1989) *Seja $v : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ analítica. Então existe uma elipse E com focos em -1 e 1 tal que v admite uma extensão holomórfica, limitada $v : D \rightarrow \mathbb{C}$, onde D denota o interior aberto de E . A expansão ortonormal com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{ch}$ em polinômios de Chebyshev*

$$v = \frac{a_0}{2} T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n \quad (33)$$

com coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\pi} (v, T_n)_{ch} \quad (34)$$

é uniformemente convergente com a seguinte cota para o erro:

$$\left\| v - \frac{a_0}{2} T_0 - \sum_{n=1}^N a_n T_n \right\|_{\infty} \leq \frac{2M}{R-1} R^{-N} \quad (35)$$

onde R é dado pelos semi-eixos a e b de E , $R = a + b$, e M é uma cota para v sobre D .

Exemplo 24 Neste exemplo adicional, resolvemos aproximadamente a equação diferencial $Lv = f(x)$ para $-1 < x < 1$, onde

$$L = -\frac{d^2(\cdot)}{dx^2} + 2x \frac{d(\cdot)}{dx} + 2(\cdot) \quad (36)$$

e $f(x) = 2x e^{x^2} + 2e(1 + 2x)$. As condições de contorno são $v(-1) = v(1) = 0$. A solução exata desta EDO é $v_{sol} = (1 + x) (e - e^{x^2})$.

Optamos pelo método de colocação. Seleccionamos os $N + 1$ pontos nodais (de Gauss-Lobatto, zeros do polinômio $(1 - x^2) \frac{dT_N}{dx}$) $x_k = \cos(y_k)$, onde $y_k = \pi j/N$ e $k = \overline{0, N}$. Construímos a aproximação Lagrangeana

$$v_N(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{v}_k h_k(x) \quad (37)$$

onde $v_N(x_k) = \tilde{v}_k$ e

$$h_k(x) := \frac{2}{c_k N} \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} T_n(x_k) T_n(x) \quad (38)$$

para $k = \overline{0, N}$.

Observação 25 Observa-se que, em decorrência da propriedade de ortogonalidade discreta dos polinômios de Chebyshev, $h_k(x_j) = \delta_{j,k}$.

Os valores aproximados para a solução nos pontos nodais são obtidos impondo que o resíduo seja zero nos pontos de colocação internos:

$$(Lv_N - f)|_{x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (39)$$

Esta equação, juntamente com as condições de contorno, resultam no seguinte sistema linear:

$$\sum_{k=1}^{N-1} M_{j,k} \tilde{v}_k = f|_{x_j}, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (40)$$

onde $M_{j,k} = Lh_k|_{x_j} = -h_k''(x_j) + 2x_j h_k'(x_j) + \delta_{j,k}$.

Ao resolvermos este sistema linear, obtêm-se valores nodais aproximados para

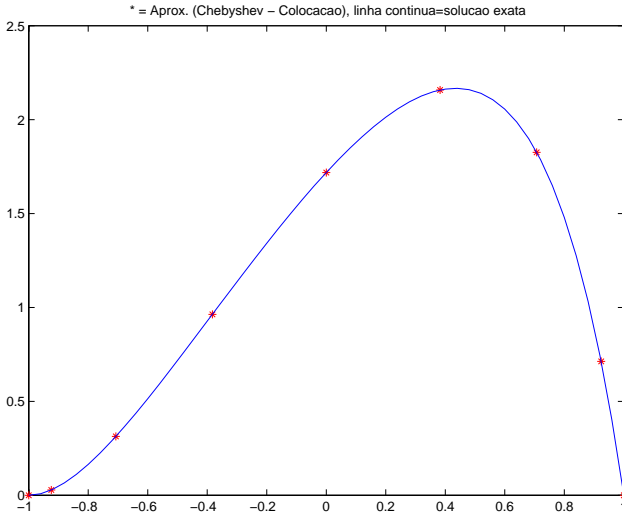


Figura 7: Aproximação por expansão Lagrangeana em polinômios de Chebyshev ($N=8$) e solução exata.

| N | 4 | 8 | 16 | 32 |
|------------------------|------------|-----------|------------|------------|
| $\ e\ _{\infty}^{L^r}$ | 0,96467E-1 | 1,9960E-4 | 1,9613E-10 | 1,1990E-14 |

Tabela 4: Erro máximo entre a aproximação por expansão Lagrangeana em polinômios de Chebyshev e a solução exata em função de N .

a solução da EDO. A figura 7 ilustra o fato de que com apenas 9 pontos nodais obtém-se uma boa aproximação para a solução do problema (erro máximo da ordem de 10^{-4} , ver também tabela 4). O rápido decaimento do erro à medida que incrementamos o número de pontos nodais rapidamente atinge os limites de precisão da máquina utilizada para resolver numericamente o problema.

3.3.5. O cálculo de derivadas

A matriz $h'_k(x_j)$ é denominada *matriz diferenciação de Chebyshev* e denotada $(D_N)_{j,k}$. Embora laborioso, não é difícil mostrar que:

$$D_{j,k} = \frac{c_j}{c_k} \frac{(-1)^{j+k}}{(x_j - x_k)}, \quad j, k = \overline{0, N}, \quad j \neq k, \quad (41)$$

$$D_{j,j} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (42)$$

$$D_{0,0} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad D_{N,N} = \frac{-2N^2 + 1}{6}. \quad (43)$$

Na construção de tal matriz, é usual calcular os coeficientes da diagonal através da identidade

$$D_{j,j} = - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N D_{j,k}, \quad j = \overline{0, N},$$

seguindo uma recomendação de Bayliss et al., 1994. Uma outra alternativa é calcular os coeficientes da matriz a partir de

$$D_{j,k} = \frac{l_j}{l_k (x_j - x_k)}, \quad j \neq k \quad (44)$$

e

$$D_{j,j} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k)^{-1}, \quad (45)$$

onde

$$l_j := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_k - x_j).$$

Dado que

$$v_N''(x) = (v_N')' = \sum_j h_j'(x) v_N'(x_j) = \sum_j h_j'(x) \left[\sum_k h_k'(x_j) v_N(x_k) \right],$$

tem-se

$$v_N''(x_l) = \sum_k v_N(x_k) \left(\sum_j h_j'(x_l) h_k'(x_j) \right),$$

ou seja, $D_{l,k}^{(2)} = \sum_j D_{l,j} D_{j,k}$, ou ainda, $D^{(2)} = D^2$ (a matriz derivada segunda é o quadrado da matriz diferenciação).

O cálculo de derivadas através da matriz diferenciação envolve $O(2N^2)$ operações (produto $\mathbf{D} \mathbf{w}$, $w_j = v_N(x_j)$). Reduz-se este custo computacional calculando a derivada no espaço das freqüências, através da transformada discreta em cossenos (eficientemente avaliada em $O(N \log N)$ operações, via FFT) e relações de recorrência descritas nas equações (24) e (25). De fato,

Observação 26 *A expansão Lagrangeana empregada coincide com a série de po-*

linômios de Chebyshev do método de colocação:

$$I_N v = \sum_{k=0}^N \tilde{v}_k T_k(x). \quad (46)$$

Os coeficientes \tilde{v}_k são determinados a partir da condição $I_N v(x_j) = v(x_j)$, $j = \overline{0, N}$. Dado que $v_N(x_j) = v(x_j)$, $j = \overline{0, N}$, tem-se

$$\tilde{v}_j = \sum_{k=0}^N \tilde{v}_k T_k(x_j), \quad j = \overline{0, N}. \quad (47)$$

Invertendo-se a ordem dos somatórios em nas equações (37)-(38) e comparando com a equação anterior, obtém-se

$$\tilde{v}_k = \frac{2}{c_k} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} \tilde{v}_j T_k(x_j), \quad k = \overline{0, N}. \quad (48)$$

Levando em conta as equações (15) e (16), conclui-se que

$$\tilde{v}_k = \frac{2}{c_k} \mathbb{D}_c (\tilde{v}_j)_k, \quad \tilde{v}_j = \mathbb{D}_c^{-1} \left(\frac{c_k}{2} \tilde{v}_k \right)_j, \quad (49)$$

ou seja, podemos avaliar \tilde{v}_k (ou \tilde{v}_j) eficientemente através da transformada discreta em cossenos (ou transformada discreta inversa em cossenos).

Em suma, dados os valores nodais $v_N(x_j)$ para $j = \overline{0, N}$ calcula-se os coeficientes \tilde{v}_k pela transformada discreta em cossenos, obtém-se os coeficientes da expansão em polinômios de Chebyshev para a derivada de v_N através das relações de recorrência (24), (25), e então calcula-se os valores nodais da derivada através da transformada discreta inversa em cossenos.

Observação 27 (1) Claramente os métodos descritos não restringem-se a problemas com domínio $(-1, 1)$. Se o domínio do problema for (a, b) com $a \neq -1$ e/ou $b \neq 1$, então, efetua-se uma mudança de coordenadas para o intervalo padrão $(-1, 1)$, (2) Em problemas bidimensionais (tridimensionais), domínios retangulares (prismas) devem ser também mapeados para $(-1, 1)^2$ $(-1, 1)^3$. Os princípios de discretização são similares ao caso unidimensional. Mas, detalhes adicionais como indexação de nós e incógnitas, métodos de solução dos sistemas lineares resultantes, etc., tornam o procedimento de implementação mais laborioso quando comparado aos problemas unidimensionais.

Observação 28 Tadmor, 1986, contém cotas para o erro envolvido na diferenciação pseudo-espectral por Fourier ou Chebyshev para o caso em que a função diferenciada é analítica. O trabalho apresenta cotas com decaimento exponencial a zero.

Exemplo 29 (Método espectral por colocação 2D) *Considere a equação de Helmholtz bidimensional com condições de contorno homogêneas de Dirichlet:*

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \gamma^2 v = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = (-1, 1)^2. \quad (50)$$

Empregamos a seguinte representação Lagrangeana

$$v_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_y} \tilde{v}_{k,l} h_k(x) h_l(y). \quad (51)$$

Então,

$$-\sum_k \sum_l \tilde{v}_{k,l} h_k''(x_i) h_l(y_j) - \sum_k \sum_l \tilde{v}_{k,l} h_k(x_i) h_l''(y_j) = f(x_i, y_j)$$

para $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$. Logo,

$$-\sum_k \tilde{v}_{k,j} D_{i,k}^{(2)} - \sum_l \tilde{v}_{i,l} D_{j,l}^{(2)} = f(x_i, y_j)$$

para $i = \overline{1, N_x - 1}$, $j = \overline{1, N_y - 1}$, ou seja,

$$-\tilde{\mathbf{D}}^{(2)} \mathbf{v} - \mathbf{v} \left[\tilde{\mathbf{D}}^{(2)} \right]^T = \tilde{\mathbf{F}}. \quad (52)$$

$\tilde{\mathbf{D}}^{(2)}$ e $\tilde{\mathbf{F}}$ representam, respectivamente, as matrizes $\mathbf{D}^{(2)}$ e \mathbf{F} após removermos as linhas e colunas referentes as condições de contorno de Dirichlet (condensação matricial). Este sistema linear é resolvido por métodos iterativos (gradientes conjugados).

Na próxima seção descrevemos o método dos elementos espectrais para problemas bidimensionais, e comparamos os resultados do esquema espectral "puro" por colocação com o resultados por elementos espectrais quando o número de elementos IEL é maior ou igual a um.

4. O MÉTODO DOS ELEMENTOS ESPECTRAIS

4.1. Introdução

Os métodos espectrais tem aplicabilidade limitada a problemas envolvendo domínios cuja simplicidade viabilize a representação da solução por uma aproximação global, isto é, uma única série que aproxima a solução da equação diferencial em qualquer ponto do domínio. Em Gottlieb e Orszag, 1977, e Orszag, 1980, duas alternativas são propostas para estender a aplicabilidade dos métodos espectrais a problemas envolvendo geometrias complicadas. A primeira alternativa tem por objetivo obter uma transformação de coordenadas que permita mapear o domínio complicado em outro mais simples de forma que a equação diferencial transformada

seja resolvida neste segundo domínio por métodos espectrais. A segunda proposta, denominada "patching", consistia em subdividir a região complicada em sub-regiões mais simples, utilizar representações em séries para cada subregião, impor condições de continuidade nas fronteiras entre subregiões, e resolver o sistemas de equações discretas associadas a cada subregião juntamente com as condições de continuidade nas interfaces.

Patera, 1984, propôs um método que denominou "elementos espectrais" que combina as técnicas de elementos finitos para lidar com a complexidade da geometria do domínio e incorpora as expansões empregadas nos métodos espectrais a fim de assegurar elevada acurácia (espectral, se os dados do problema forem suficientemente suaves). Dentro de cada elemento existe um conjunto de nós internos (os pontos de colocação de Chebyshev-Gauss-Lobatto) associados à série que representa (globalmente no elemento) a aproximação Lagrangeana de alta ordem para a solução naquele elemento. As questões de continuidade entre elementos são resolvidas através do formalismo variacional clássico dos elementos finitos (as funções tentativa são C^0 no contorno entre elementos e obtém-se a continuidade de fluxos como parte do processo de convergência). A extensão do método a escoamentos transitórios tridimensionais em geometrias complexas foi realizada em Amon, 1993.

4.2. A formulação variacional

Descrevemos a formulação variacional por elementos espectrais resolvendo a equação de Helmholtz bidimensional:

$$-\nabla^2 v + \gamma^2 v = f(x, y), (x, y) \in \Omega := (0, 1) \times (0, 1) \quad (53)$$

com condições de contorno homogêneas de Dirichlet.

Seja $U := H_0^1(\Omega)$. O problema variacional associado é o seguinte: encontre $u \in U$ tal que

$$a(u, \varphi) = b(\varphi), \forall \varphi \in U, \quad (54)$$

onde $a(u, \varphi) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\Omega + \gamma^2 \langle u, \varphi \rangle$ e $b(\varphi) := \langle f, \varphi \rangle$.

Dado que $a : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica, contínua e coerciva, e $b : U \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo sobre U , por um teorema clássico sobre problemas variacionais quadráticos (o princípio de Dirichlet, ver p. ex. Zeidler, 1995, pg. 121), este problema tem solução única e é equivalente ao seguinte problema de minimização: encontre $u \in U$ tal que

$$J(u) := \frac{1}{2} a(u, u) - b(u) = \min! \quad (55)$$

4.3. Formulação variacional discreta

A fim de minimizar (aproximadamente) o funcional J , divide-se o domínio computacional $\Omega_h \equiv \Omega$ em IEL $:= N_x \times N_y$ macro-elementos Ω_i , e impõe-se que

$\delta J(u) = 0$ (ou seja, a primeira variação de J deve ser nula):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{IEL} \left\{ \frac{md^{(i)}}{(mb^{(i)})^2} \left\langle \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x_s}, \frac{\partial \delta u^{(i)}}{\partial x_s} \right\rangle_{\widehat{\Omega}} + \frac{md^{(i)}}{(ma^{(i)})^2} \left\langle \frac{\partial u^{(i)}}{\partial y_s}, \frac{\partial \delta u^{(i)}}{\partial y_s} \right\rangle_{\widehat{\Omega}} \right. \\ & \left. + md^{(i)} \left[\gamma^2 \left\langle u^{(i)}, \delta u^{(i)} \right\rangle_{\widehat{\Omega}} - \left\langle f^{(i)}, \delta u^{(i)} \right\rangle_{\widehat{\Omega}} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

onde

$$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\widehat{\Omega}} := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi \Psi \, dx_s \, dy_s, \quad (57)$$

$$ma^{(i)} := LY^{(i)}/2, \quad mb^{(i)} := LX^{(i)}/2, \quad md^{(i)} := ma^{(i)} mb^{(i)}, \quad (58)$$

$$\widehat{\Omega} := (-1, 1) \times (-1, 1), \quad (59)$$

$$\Omega_i := \left(a_x^{(i)}, a_x^{(i)} + LX^{(i)} \right) \times \left(a_y^{(i)}, a_y^{(i)} + LY^{(i)} \right), \quad (60)$$

e

$$x = (x_s + 1) \frac{LX^{(i)}}{2} + a_x^{(i)}, \quad y = (y_s + 1) \frac{LY^{(i)}}{2} + a_y^{(i)}. \quad (61)$$

Em cada macro-elemento, representamos $u^{(i)}$, sua primeira variação e $f^{(i)}$ por expansões Lagrangeanas em polinômios de Chebyshev:

$$u^{(i)} = u^{(i)}(x_s, y_s) \cong u_N^{(i)} = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N u_{j,k}^{(i)} h_j^{(i)}(x_s) h_k^{(i)}(y_s), \quad (62)$$

$$\delta u^{(i)} = \delta u^{(i)}(x_s, y_s) \cong \delta u_N^{(i)} = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \delta u_{j,k}^{(i)} h_j^{(i)}(x_s) h_k^{(i)}(y_s), \quad (63)$$

$$h_j^{(i)}(\xi_s^{(i)}) := \frac{2}{c_j N} \sum_{n=0}^N \frac{T_n(\xi_j^{(i)}) T_n(\xi_s^{(i)})}{c_n}, \quad (64)$$

onde $c_0 = c_N = 2$ e $c_j = 1$ para $j = 1, 2, \dots, N-1$.

A aproximação por elementos espectrais minimizam o seguinte funcional:

$$J(u) = \min!$$

para $u \in P_{h,N,0}(\Omega)$, o subespaço (de dimensão finita) de $H_0^1(\Omega)$ formado pelas funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$ que são polinômios de grau menor ou igual a N em cada variável quando restritas a cada subdomínio Ω_i , com $i = \overline{1, IEL}$, e que anulam-se nos contornos do domínio.

Estas equações conduzem a um sistema linear algébrico $\mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{F}$ para as incógnitas $u_{j_1, k_1}^{(i)}$ para $i = \overline{1, IEL}$ e $j_1, k_1 = \overline{0, N}$. Estas incógnitas aproximam os valores nodais da solução u procurada.

4.4. Exemplo ilustrativo

| IEL | N | NGL | $\ e\ _{\infty}^k$ | $k_1(\mathbf{M})$ |
|-----|----|------------|--------------------|-------------------|
| 1 | 7 | 49 | 1,4102E-3 | 14 |
| 1 | 11 | 121 | 2,8192E-6 | 22 |
| 1 | 15 | 225 | 7,2445E-10 | 49 |
| 4 | 7 | 169 | 1,4290E-5 | 64 |
| 4 | 11 | 441 | 5,8796E-10 | 338 |
| 9 | 7 | 361 | 2,5084E-6 | 106 |
| 9 | 11 | 961 | 2,7721E-11 | 774 |

Tabela 5: Erro máximo entre a aproximação por elementos espectrais com expansão Lagrangeana em polinômios de Chebyshev e a solução exata em função de IEL, N. Apresenta-se também o número de condição k_1 em cada caso.

Escolhemos $\gamma = \pi$, $f(x, y) = 3 \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)$ de modo que a equação de Helmholtz com condições de contorno de Dirichlet homogêneas tem por solução exata: $v(x, y) = \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)$. Na tabela 5 apresentamos o erro máximo (nos pontos nodais do domínio) em função dos parâmetros IEL, N e NGL, que denotam, respectivamente, o número total de elementos, o número de nós por elemento em cada direção coordenada e número de graus de liberdade (por simplicidade, os elementos estão distribuídos de forma uniforme sobre Ω).

Conforme os resultados da tabela apresentada, é computacionalmente eficaz escolher o número mínimo de elementos que particionam Ω , confinando possíveis singularidades ou fortes gradientes da solução em pequenos sub-elementos, e então, fixado o número de elementos, elevar o grau do polinômio a fim de atingir a acurácia desejada. Neste exemplo, onde a solução é bastante suave, o caso $IEL = 1$ tem desempenho superior ao esquema híbrido dos elementos espectrais. No entanto, basta introduzir forçantes irregulares para que ocorra o contrário, ou seja, a expansão global necessitará de um número bem maior de termos para atingir uma certa tolerância. Isso resultará em uma grande matriz densa com conseqüente aumento significativo no número de condição $k_1(\mathbf{M}) := \|\mathbf{M}\|_1 \|\mathbf{M}^{-1}\|_1$.

Neste outro exemplo, consideramos o caso em que $\gamma = 0$, $f = 2\pi$, $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$, ou seja, a equação de Poisson com forçante constante e condições de contorno de Dirichlet homogêneas sobre o quadrado Ω . Neste caso, observando a tabela 6, percebe-se que o esquema multi-elemento apresenta resultados melhores que o caso $IEL = 1$, pois atinge-se a mesma acurácia com um número menor de graus de liberdade e número de condição. O último resultado da tabela coincide em 8 dígitos decimais com o apresentado em Funaro, 1992 (para $N = 12$). A título de comparação, incluímos a Tab. 7 que refere-se aos resultados do esquema espectral por colocação (apresentado na seção anterior para o caso unidimensional). Avaliamos $V(0, 0)$ e o número de condição do sistema linear. É clara a grande

| IEL | N | NGL | $v(0, 0)$ | $k_1(\mathbf{M})$ |
|-----|-----|-------------|------------|-------------------|
| 1 | 7 | 49 | 1,85157274 | 14 |
| 1 | 11 | 121 | 1,85157108 | 48 |
| 1 | 15 | 225 | 1,85156408 | 146 |
| 1 | 21 | 441 | 1,85156317 | 413 |
| 1 | 31 | 961 | 1,85156307 | 1622 |
| 1 | 35 | 1225 | 1,85156306 | 2395 |
| 16 | 7 | 625 | 1,85156309 | 536 |
| 16 | 11 | 1681 | 1,85156306 | 4029 |
| 25 | 7 | 961 | 1,85156306 | 1230 |

Tabela 6: Valor aproximado para $v(0, 0)$ calculado por elementos espectrais com expansão Lagrangeana em polinômios de Chebyshev em função de IEL, N . Apresenta-se também o número de condição k_1 em cada caso.

vantagem em acurácia do esquema espectral por colocação sobre o método dos elementos espectral, embora às custas do típico mal-condicionamento do sistema linear associado ($k_1(\mathbf{M}) \approx 0,051 N^{3,027}$).

| N | $v(0, 0)$ | $k_1(\mathbf{M})$ |
|-----|---------------|-------------------|
| 6 | 1,85171370267 | 60 |
| 10 | 1,85156286023 | 423 |
| 14 | 1,85156306194 | 1578 |
| 20 | 1,85156305805 | 6467 |
| 30 | 1,85156305799 | 32399 |
| 40 | 1,85156305799 | 102070 |

Tabela 7: Valor aproximado para $v(0, 0)$ calculado pelo método espectral por colocação com polinômios de Chebyshev em função de N . Apresenta-se também o número de condição k_1 em cada caso.

Observação 30 *No caso de domínios Ω mais complicados, particiona-se Ω em quadriláteros (não necessariamente retilíneos) que são mapeados isoparametricamente para o quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ através da mesma expansão utilizada para representar a variável dependente u (Eq. 62). Procedimento similar é realizado no caso tridimensional. As seguintes referências contém detalhes sobre esse assunto: Karniadakis e Sherwin, 1999, Korczyk e Patera, 1986, Amon, 1993, Karniadakis, 1989/90.*

5. ELEMENTOS ESPECTRAIS E AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Nesta seção apresentamos um esquema bastante empregado para resolução das equações de Navier-Stokes pelo método dos elementos espectrais.

Consideramos as equações de Navier-Stokes adimensionais em coordenadas cartesianas, válidas em um domínio adimensional $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$, que representam o escoamento incompressível bidimensional de um fluido Newtoniano com propriedades (densidade ρ e a viscosidade ν) constantes:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{Rey} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (66)$$

onde $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ é o vetor velocidade, $Rey = \frac{Q}{\nu L}$ é o número de Reynolds, Q é a vazão na entrada do domínio, ν é a viscosidade cinemática e L é um comprimento característico do problema .

As variáveis adimensionais são definidas por:

$$u = \frac{U}{Ve}, v = \frac{V}{Ve}, p = \frac{P}{\rho V e^2}, x = \frac{X}{L}, y = \frac{Y}{L}, t = \frac{T V e}{L}. \quad (67)$$

onde U, V denotam as componentes dimensionais do vetor velocidade, P denota a pressão dimensional e Ve é a velocidade média na entrada do domínio. X e Y correspondem às coordenadas dimensionais e T é o tempo dimensional.

Estas equações são complementadas com condições iniciais e de contorno adequadas. Por exemplo, condições de contorno de Dirichlet em uma parte do domínio Γ_e (a 'entrada' do domínio), condições de contorno de Neumann homogêneas em outra parte do domínio Γ_s (a 'saída' do domínio), e condições de contorno de não-deslizamento nos demais contornos Γ_{nd} .

Re-escrevemos as equações de conservação de momentum na forma rotacional, pois os métodos pseudo-espectrais conservam energia quando aplicados às equações de Navier-Stokes nesta forma (Canuto et al., 1988):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi v - \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{1}{Rey} \nabla^2 u \quad (68)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\chi u - \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{1}{Rey} \nabla^2 v \quad (69)$$

onde $\Pi = p + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ é a pressão dinâmica (adimensional) e $\chi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ é a vorticidade. Atinge-se elevada acurácia na discretização temporal através de métodos de passos fracionados de alta ordem associados a esquemas denominados 'splitting' (Canuto et al., 1988, Karniadakis e Sherwin, 1999, Marcus, 1984, Bell e Colella, 1989, Shen, 1996). Os termos não-lineares convectivos (envolvendo a vorticidade) são avaliados pseudo-espectralmente (i.e., por colocação) e tratados explicitamente via, por exemplo, esquema de Adams-Bashforth de 3a. ordem. Os termos difusivos e de pressão aparecem na forma de duas equações de Helmholtz (velocidades) com condições de contorno tipo Dirichlet e uma equação de Poisson (pressão dinâmica) com condição de contorno do tipo Neumann. O erro devido a este esquema é $O(\Delta t^2) + O(\Delta t/Rey)$. A discretização espacial é baseada no método dos elementos espectrais, conforme descrito em seção anterior.

Em suma, a cada passo no tempo, executa-se as seguintes etapas:

(i) **Passo não-linear:**

$$\hat{\mathbf{v}}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \Delta t \mathcal{AB}(\mathbf{v} \times \chi) \quad (70)$$

onde $\mathcal{AB}(\mathbf{v}) := \frac{23}{12} \mathbf{v}^n - \frac{16}{12} \mathbf{v}^{n-1} + \frac{5}{12} \mathbf{v}^{n-2}$ é o operador temporal associado ao esquema de 3^{a.} ordem de Adams-Bashforth.

(ii) **Passo da Pressão:**

$$\nabla^2 \Pi = \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{v}}^{n+1}}{\Delta t} \right) \text{ em } \Omega \quad (71)$$

Condição de contorno :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{n+1} \cdot \mathbf{n}}{\Delta t} \quad (72)$$

Observação 31 Outra condição de contorno também empregada, por ser mais precisa numericamente, é a seguinte (Orszag, Israeli e Deville, 1986): $\frac{\partial p}{\partial n} = -\left(\frac{1}{Re\gamma}\right) \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})]$. A condição 72 é atrativa para escoamentos a elevados números de Reynolds.

(iii) **Correção da velocidade** (satisfaz a eq. da continuidade):

$$\hat{\hat{\mathbf{v}}}^{n+1} = \hat{\mathbf{v}}^n - \nabla \Pi \Delta t \quad (73)$$

(iv) **Passo viscoso** (impõe condições de contorno):

$$(\nabla^2 - \gamma)(\mathbf{v}^{n+1} + \mathbf{v}^n) = -\gamma(\hat{\hat{\mathbf{v}}}^{n+1} + \mathbf{v}^n) \quad (74)$$

onde $\gamma = \frac{Re\gamma}{\Delta t}$.

6. O MÉTODO DE FOURIER-GEGENBAUER

Gottlieb et al., 1992, propuseram, sob certas hipóteses, uma metodologia para eliminar o fenômeno de Gibbs de representações em série de Fourier de funções não periódicas (descontínuas e analíticas por partes). O método proposto basicamente re-expande a série truncada em polinômios de Gegenbauer e obtém os coeficientes da nova série a partir dos coeficientes da série original. Este método despertou interesse porque o resultado final é uma série não só uniformemente convergente, como também espectralmente convergente.

A partir deste trabalho, várias extensões e alternativas tem sido propostas (Gottlieb e Shu, 1994; Gottlieb e Shu, 1995a; Gottlieb e Shu, 1995b; Gottlieb e Shu,

1996; Gelb e Gottlieb, 1997; Vozovoi, Israeli e Averbuch, 1996; Vozovoi, Weill e Israeli, 1997; Gottlieb e Hesthaven, 2001; Eckhoff, 1993; Eckhoff, 1995; Lyness, 1984).

6.1. Descrição dos Aspectos Fundamentais

Seja f uma função arbitrária no L^2 definida sobre o intervalo $[-1, 1]$. Seja $\{\varphi_k\}_{k \in \mathcal{N}}$ a base dos polinômios trigonométricos $\varphi_k(x) := \exp(i k \pi x)$. Assume-se que os primeiros $2N + 1$ coeficientes de Fourier c_k são dados por

$$c_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx. \quad (75)$$

Define-se:

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k \varphi_k(x). \quad (76)$$

A idéia central proposta por Gottlieb et al., 1992, é a reconstrução de f , com acurácia espectral na norma do máximo, a partir dos coeficientes de Fourier c_k . Esta meta é atingida através de uma expansão em polinômios de Gegenbauer de forma que os coeficientes da série sejam obtidos a partir dos coeficientes de Fourier. Mais especificamente, tem-se uma prova construtiva do seguinte teorema:

Teorema 32 (Gottlieb et al., 1992; *Eliminação do fenômeno de Gibbs*): *Considere uma função*

analítica e não-periódica $f(x)$, definida sobre o intervalo $[-1, 1]$, que satisfaz

$$\max \left| \frac{d^k f}{dx^k}(x) \right| \leq C(\rho) \frac{k!}{\rho^k}, \rho \geq 1. \quad (77)$$

Assumindo que os coeficientes de Fourier, dados por Eq.(75), são conhecidos para $-N \leq k \leq N$. Sejam d_l^λ ($0 \leq l \leq m$) os coeficientes de uma expansão de $f_N(x)$ em polinômios de Gegenbauer, os quais podem ser explicitados em termos dos coeficientes de Fourier c_k como

$$d_l^\lambda = \delta_{l0} c_0 + \Gamma(\lambda) i^l (l + \lambda) \sum_{0 < |k| \leq M} J_{l+\lambda}(\pi k) \left(\frac{2}{\pi k} \right)^\lambda c_k. \quad (78)$$

Se $\lambda = \alpha N$, $m = \beta N$ e $\lambda = \gamma m$, com $\alpha, \beta > 0$, então

$$\max \left| f(x) - \sum_{l=0}^m d_l^\lambda C_l^\lambda(x) \right| \leq A N^2 (q^T) + A^* (q^R), \quad (79)$$

onde $q^T := \frac{(\beta+2\alpha)^{\beta+2\alpha}}{(2\pi\epsilon)^\alpha \alpha^\alpha \beta^\beta}$, $q^R := \frac{(1+2\gamma)^{1+2\gamma}}{\rho^{2+2\gamma} \gamma^\gamma (1+\gamma)^{1+\gamma}}$ e $\rho (\geq 1)$ denota a distância do intervalo $[-1, 1]$ à singularidade mais próxima de $f(x)$ no plano complexo. $C_l^\lambda(x)$ denota o polinômio de Gegenbauer de ordem l . A e A^ são constantes.*

Nas condições do teorema, se α e β são escolhidos de modo que $q^T < 1$ (q^R é sempre menor que um, estritamente crescente e tende a $1/\rho$ quando γ tende ao infinito), então os erros de truncamento e de regularização são exponencialmente pequenos. Logo, podemos computar os coeficientes de Gegenbauer d_i^λ via (78) e aproximar $f(x)$ com acurácia espectral sobre o intervalo $[-1, 1]$ através da seguinte expansão:

$$G_m^\lambda := \sum_{i=0}^m d_i^\lambda C_i^\lambda(x) \quad (80)$$

6.2. Aplicação a Equações Diferenciais

O teorema descrito na subseção anterior teve um impacto bastante positivo nas aplicações onde a presença praticamente inevitável do fenômeno de Gibbs tornava necessário o uso freqüente de “filtros” (é comum o emprego de filtros em métodos espectrais e de elementos espectrais (Boyd, 1998)) a fim de atenuar seus efeitos. Como, a partir do teorema em questão, é possível eliminar completamente o fenômeno de Gibbs, e mais que isso, atingir acurácia exponencial, os denominados “Métodos de Fourier” tiveram um forte impulso, estendendo suas aplicações a problemas onde anteriormente tais métodos não apresentavam bom desempenho.

Um exemplo concreto disso, no âmbito dos problemas a valores no contorno (PVC), está presente na solução de problemas envolvendo condições de contorno não-periódicas, pois nestes casos o emprego de séries de Fourier clássicas não era recomendado (p. ex., Gottlieb e Orszag, 1977, Canuto et al., 1988).

A título de ilustração, considere a equação de Poisson unidimensional $-u'' = f$ sobre o intervalo $[-1, 1]$ com condições de contorno homogêneas e, por exemplo, $f = 2$. Podemos facilmente calcular uma aproximação dos coeficientes de Fourier (via FFT) \hat{u} de

$$\hat{u}_k = \frac{\hat{f}_k + \hat{f}_0 \cdot (-1)^k}{k^2 \pi^2}, \quad 0 < |k| \leq N \quad (81)$$

e (dado que o correto $\hat{u}_0 = -\sum (-1)^k \hat{u}_k$ tem convergência lenta e está sujeito a erros de arredondamento quando avaliado numericamente)

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 &= \frac{2\hat{f}_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{0 < |k| \leq N} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \hat{f}_k \\ &\cong \frac{\hat{f}_0}{3} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{0 < |k| \leq N} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \hat{f}_k. \end{aligned} \quad (82)$$

A representação em série de Fourier é afetada pela não periodicidade da solução e exhibe taxa de convergência algébrica ($\hat{u}_k \sim k^{-2}$). Na tabela 8, mostramos o resultado de pós-processarmos estes coeficientes através da Eq.(78), com $\alpha = \beta = 1/4$.

Como consequência da Eq.(79), a re-expansão em polinômios de Gegenbauer produz uma aproximação com acurácia espectral. No caso da equação de Helmholtz

| N | $\ E_{Fo}\ _{\infty}$ | $\ E_{FG}\ _{\infty}$ |
|----|-----------------------|-----------------------|
| 4 | 8,969E-2 | 7,492E-1 |
| 8 | 4,762E-2 | 4,153E-4 |
| 16 | 2,455E-2 | 1,796E-5 |
| 32 | 1,246E-2 | 9,216E-8 |
| 64 | 6,283E-3 | 1,459E-11 |

Tabela 8: Erro máximo entre aproximações de Fourier e de Fourier-Gegenbauer em função de N.

unidimensional: $-u'' + \lambda u = f$ para $-1 \leq x \leq 1$ com condições de contorno de Dirichlet homogêneas, este procedimento direto não tem sucesso. Ao aplicarmos a transformada finita de Fourier, obtemos

$$\hat{u}_k = \frac{\hat{f}_k + \mu_0 (-1)^k}{k^2 \pi^2 + \lambda}, \quad (83)$$

onde $\mu_0 := [u'(1) - u'(-1)]/2$. Calculamos o modo fundamental integrando a equação diferencial:

$$\hat{u}_0 = \frac{\hat{f}_0 + \mu_0}{\lambda} \quad (84)$$

e finalmente, obtemos a 3^a. equação (desconhecemos os coeficientes de Fourier \hat{u}_k , o modo fundamental \hat{u}_0 e μ_0) impondo as condições de contorno:

$$\hat{u}_0 = - \sum_{0 < |k| \leq N} \hat{u}_k (-1)^k. \quad (85)$$

Ao resolvermos estas três equações, obtemos expressões que conduzem a aproximações u_N que não convergem espectralmente à solução exata (denominamos este caso por helma) quando $N \rightarrow \infty$. Isso ocorre porque as expressões obtidas possuem somas que não possuem limites assintóticos em forma fechada (como no caso anterior), e convergem lentamente. Esta convergência lenta, juntamente com o acúmulo de erros de arredondamento, degradam a esperada acurácia espectral. Entretanto, ao empregarmos o resultado obtido no problema anterior a este caso (ou seja, fazendo $f_{anterior} = f - \lambda u$), recuperamos a acurácia desejada na aproximação u_N (caso helmb), conforme mostra a tabela 9. Observamos que, conforme citado anteriormente, no caso helma os erros de arredondamento rapidamente degradam a acurácia do MFG e o erro obtido iguala-se ao erro do método de Fourier sem pós-processamento (o MFG é inútil neste caso).

Mais especificamente, o caso helmb é fruto do seguinte *FATO*: Os coeficientes de Fourier do forçante f determinam unicamente o coeficiente

| N | $\ e\ _{\infty}^{helmb}$ | $\ e\ _{\infty}^{helma}$ | $\ e\ _{\infty}^{Fob}$ |
|-----|--------------------------|--------------------------|------------------------|
| 8 | 0,301 | 0,279 | 0,0299 |
| 16 | 0,0366 | 0,0526 | 0,0159 |
| 32 | 2,95E-6 | 0,0107 | 0,0082 |
| 64 | 3,68E-7 | 0,0042 | 0,0042 |
| 128 | 5,10E-8 | 0,0021 | 0,0021 |

Tabela 9: Comparações entre os erros máximos obtidos nos casos helma e helmb. Ambos os casos resolvem a equação de Helmholtz unidimensional com condições de contorno homogêneas, onde $f = (17 - 18x^2 + x^4)/12$. Incluímos também o resultado obtido pela aproximação de Fourier (em helmb) sem pós-processamento dos coeficientes.

fundamental \hat{u}_0 :

$$\omega_1 \hat{u}_0 = \hat{f}_0 \omega_2 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{0 < |k| \leq N} (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + k^2 \pi^2} \right) \frac{\hat{f}_k}{k^2} \quad (86)$$

onde

$$\omega_1 = 3 + \lambda \omega_2 \quad (87)$$

e

$$\omega_2 = 1 - \frac{3}{\pi^2} \sum_{0 < |k| \leq N} \frac{\lambda}{(\lambda + k^2 \pi^2) k^2} \quad (88)$$

Observa-se que se fizermos $\lambda = 0$, recuperamos o resultado obtido para o caso da equação de Poisson unidimensional, Eq. (82).

Este procedimento pode ser facilmente modificado para resolver EDPs pelo método de Fourier, seguido de um pós-processamento da solução obtida a fim de remover as oscilações espúrias associadas ao fenômeno de Gibbs e atingir taxas de convergência espectrais. Apresentamos a seguir um exemplo ilustrativo.

Este exemplo aparece em Gottlieb e Orszag, 1977. Considere a seguinte equação hiperbólica e condições de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = x + t, \quad 0 < x < t, \quad t > 0, \quad (89)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (90)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (91)$$

A solução exata deste problema é $u = xt$. Novamente violamos a regra tradicional que recomenda o emprego de expansões em termos de funções não-periódicas (por exemplo, polinômios de Chebyshev ou Legendre) e representamos u em termos

de um série de Fourier truncada.

$$u_N = \sum_{-N}^N \hat{u}_k e^{ikx}. \quad (92)$$

Então, obtemos o conjunto usual de equações diferenciais ordinárias para os coeficientes de Fourier:

$$\frac{d\hat{u}_k}{dt} = -ik\hat{u}_k + (\widehat{x+t})_k, \quad 0 < |k| \leq N, \quad (93)$$

$$\hat{u}_k(0) = 0,$$

onde o modo fundamental \hat{u}_0 é dado por $\hat{u}_0 = t^2/2$ (obtido naturalmente por integração direta da equação diferencial). Outras alternativas matematicamente equivalentes para este coeficiente (por exemplo, $\hat{u}_0 = \sum \frac{\hat{u}_k - (\widehat{x+t})_k}{ik}$) convergem lentamente e introduzem erros numéricos que impossibilitam a obtenção da acurácia espectral a partir do pós-processamento por Fourier-Gegenbauer. A tabela 10 contém resultados da comparação entre as aproximações de Fourier e Fourier-Gegenbauer.

| N | 8 | 16 | 32 | 64 |
|------------------|----------|----------|-----------|-----------|
| $\ e\ _\infty^G$ | 1,899E-3 | 8,850E-5 | 4,3506E-7 | 1,757E-11 |
| $\ e\ _\infty^F$ | 1,827E-1 | 9,835E-2 | 3,636E-2 | 2,100E-2 |

Tabela 10: Erro máximo da expansões de Fourier e de Gegenbauer em função do número de modos de Fourier ($\alpha_x = \alpha_y = 0, 25$) para a equação hiperbólica.

7. COMENTÁRIOS FINAIS

Citamos a seguir alguns assuntos importantes não foram abordados neste texto, juntamente com sugestões de algumas referências correspondentes: (a) expansões em polinômios de Legendre (Funaro, 1992, Funaro, 1997), (b) domínios semi- e infinitos (Boyd, 1989; Boyd, 2001; Boyd, 1987; Boyd, 1982; Matsushima e Marcus, 1997), (c) detalhes sobre os algoritmos relacionados a FFT (Van Loan, 1992), (d) ‘solvers’ para as equações algébricas associadas aos métodos espectrais (Canuto et al., 1988; Boyd, 1989; Funaro, 1997; Shen, 1994; Shen, 1995a; Shen, 1995b), (e) métodos de decomposição do domínio (Canuto et al., 1988; Peyret, 2002; Funaro, 1992; Boyd, 1989; Funaro, 1988), (f) os vários esquemas numéricos para as equações de Navier-Stokes (Peyret, 2002; Canuto et al., 1988), (g) teoria de estabilidade e convergência dos métodos espectrais (Canuto et al., 1988; Guo, 1998), (h) métodos espectrais para problemas hiperbólicos (Gottlieb e Hesthaven, 2001), (i) métodos espectrais para equações ‘stiff’ (Peyret, 2002), (j) outros esquemas híbridos elementos finitos/espectrais (Guo, 1998; Bernardi, Debit e Maday, 1990; Cai, Lee e Oh, 1993).

8. AGRADECIMENTOS

O autor agradece o convite feito pelos organizadores da III Escola de Primavera em Transição e Turbulência (ETT2002) para escrever este texto sobre métodos espectrais. Agradece também o apoio e orientações recebidas durante a elaboração do material.

9. REFERÊNCIAS

Livros sobre métodos espectrais

Boyd, J. P., Chebyshev and Fourier spectral methods, Springer-Verlag, 1989.

Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A., Spectral methods in fluid dynamics, Springer-Verlag, 1988.

Fornberg, B., A practical guide to pseudospectral methods, Cambridge monographs on applied and computational mathematics, Cambridge University Press, 1998.

Funaro, D., Polynomial approximation of differential equations, Springer-Verlag, 1992.

Funaro, D., Spectral elements for transport-dominated equations, Springer-Verlag, 1997.

Gottlieb, D., Orszag, S. A., Numerical analysis of spectral methods: theory and applications, SIAM-CBMS, 1977.

Guo, B. Y., Spectral methods and their applications, World Scientific Publishing, 1998.

Peyret, R., Spectral methods for incompressible viscous flow, Applied mathematical sciences, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 2002.

Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J., Spectral/hp element methods for CFD, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, 1999.

Korczak, K. Z., Patera, A. T., An isoparametric spectral element method for solution of the Navier-Stokes equations in complex geometry, J. Comput. Phys. 62, 361-382 (1986).

Trefethen, L. N., Spectral methods in Matlab, SIAM, 2000.

artigos

Amon, C. H., Spectral element-Fourier method for transitional flow in complex geometries, *AIAA Journal* 331 (1), 42-48 (1993).

Bayliss, A., Class, A., Matkowsky, B. J., Adaptive approximation of solutions to problems with multiple layers by Chebyshev pseudo-spectral methods, *J. Comput. Phys.* 116, 160-172 (1994).

Bernardi, C., Debit, N., Maday, Y., Coupling finite element and spectral methods: first results, *Math. Comp.* 54 (189), 21-39 (1990).

Bell, J. B., Colella, P., A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.* 85, 257-283 (1989).

Boyd, J. P., The optimization of convergence for Chebyshev polynomial methods in an unbounded domain, *J. Comput. Phys.*, 43-79 (1982).

Boyd, J. P., Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval, *J. Comput. Phys.* 69, 112-142 (1987).

Boyd, J. P., Two comments on filtering (artificial viscosity) for Chebyshev and Legendre spectral and spectral element methods: preserving boundary conditions and interpretation of the filter as a diffusion, *J. Comput. Phys.* 143, 283-288 (1998).

Boyd, J. P., Rational Chebyshev spectral methods for unbounded solutions on an infinite interval using polynomial-growth special basis functions, *Computers Math. Applic.* 41, 1293-1315 (2001).

Cai, W., Lee, H. C., Oh, H.-S., Coupling of spectral methods and the p-version of the finite element method for elliptic boundary value problems containing singularities, *J. Comput. Phys.* 108, 314-326 (1993).

Canuto, C., Quarteroni, A., Approximation Results for Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces, *Math. Comp.* 38 (157), 67-86 (1982).

Eckhoff, K. S., Accurate and efficient reconstruction of discontinuous functions from truncated series expansions, *Math. Comp.* 61, 745-763 (1993).

Eckhoff, K. S., Accurate reconstructions of functions of finite regularity from truncated Fourier series expansions, *Math. Comp.*, 64(21), 671-690 (1995).

Eliassen, E., Machenhauer, B., Rasmussen, E., On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the ho-

rizontal fields, Rep. No. 2 (Institut for Teoretisk Meteorologi, Univ. Copenhagen), 1970.

Fornberg, B., Sloan, D. M., A review of pseudospectral methods for solving partial differential equations, *Acta Numerica*, 203-267 (1994).

Funaro, D., Domain decomposition methods for pseudo spectral approximations. Part I. Second order equations in one dimension, *Numer. Math.* 52, 329-344 (1988).

Gelb, A., Gottlieb, D., The resolution of the Gibbs phenomenon for "spliced" functions in one and two dimensions, *Computers Math. Applic.*, 33(11), 35-58 (1997).

Gottlieb, D., Shu, C.-H., Solomonoff, A., Vandeven, H., On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function, *J. Comput. Appl. Math.*, 43, 81-98 (1992).

Gottlieb, D., Hesthaven, J. S., Spectral methods for hyperbolic problems, *J. Comp. Appl. Math.* 128, 83-131 (2001).

Gottlieb, D., Shu, C.-H., Resolution properties of the Fourier method for discontinuous waves, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engin.*, 116, 27-37 (1994).

Gottlieb, D., Shu, C.-H., On the Gibbs phenomenon IV: recovering exponential accuracy in a sub-interval from the Gegenbauer partial sum of a piecewise analytic function, *Math. Comp.*, 64, 1081-1095 (1995a).

Gottlieb, D., Shu, C.-H., On the Gibbs phenomenon V: recovering exponential accuracy from collocation point values of a piecewise analytic function, *Numer. Math.*, 71, 511-526 (1995b).

Gottlieb, D., Shu, C.-H., On the Gibbs phenomenon III: recovering exponential accuracy in a sub-interval from the spectral partial sum of a piecewise analytic function, *SIAM J. Numer. Anal.*, 33, 280-290 (1996).

Karniadakis, G. E., Spectral element simulations of laminar e turbulent flows in complex geometries, *Applied Numerical Mathematics* 6, 85-105 (1989/90).

Kreiss, H.-O., Oliger, J., Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations, *Tellus XXIV*, 199-215 (1972).

Lanczos, C., Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions, *J. Math. Phys.*, 17, 123-199 (1938).

Lyness, J. N., The calculation of trigonometric Fourier coefficients, *J. Comput.*

Phys. 54, 57-73(1984).

Marcus, P. S., Simulation of Taylor-Couette flow. Part 1. Numerical methods and comparison with experiment, *J. Fluid Mech.*, 146, 45-64 (1984).

Matsushima, T., Marcus, P. S., A spectral method for unbounded domains, *J. Comput. Phys.* 137, 321-345 (1997).

Orszag, S. A., Israeli, M., Deville, M. O., Boundary conditions for incompressible flows, *J. Sci. Comp.* 1(1), 75-111 (1986).

Orszag, S. A., Numerical methods for the simulation of turbulence, *Phys. Fluid, Suppl. II*, 250-257 (1969).

Orszag, S. A., Transform method for calculation of vector sums. Application to the spectral form of the vorticity equation, *J. Atmosph. Sci.* 27, 890-895 (1970).

Orszag, S. A., Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries I. Galerkin (spectral) representations, *Stud. Appl. Math.* 50, 293-327 (1971a).

Orszag, S. A., Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy, *J. Fluid Mech.* 49(1), 75-112 (1971b).

Orszag, S. A., Comparison of pseudospectral and spectral approximation, *Stud. Appl. Math.* 51, 253-259 (1972).

Orszag, S. A., Fourier series on spheres, *Mon. Wea. Rev.* 102, 56-75 (1974).

Orszag, S. A., Spectral methods for problems in complex geometries, *J. Comput. Phys.* 37, 70-92 (1980).

Orszag, S. A., Fast eigenfunction transforms, in *Sciences and Computers, Advances in Mathematics Supplementary Series*, vol. 10, 23-30 (1986).

Patera, A. T., A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion, *J. Comput. Phys.* 54, 468-488 (1984).

Patera, A. T., Fast direct Poisson solvers for high-order finite element discretizations in rectangularly decomposable domains, *J. Comput. Phys.* 65, 474-480 (1986).

Shen, J., Efficient spectral-Galerkin method I. Direct solvers for second- and fourth-order equations by using Legendre polynomials, *SIAM J. Sci. Comput.* 15, 1489-1505 (1994).

Shen, J., Efficient spectral-Galerkin method II. Direct solvers for second- and fourth-order equations by using Chebyshev polynomials, *SIAM J. Sci. Comput.* 16, 74-87 (1995a).

Shen, J., On fast direct Poisson solver, inf-sup constant and iterative solver by Legendre-Galerkin method, *J. Comput. Phys.* 116, 184-188 (1995b).

Shen, J., On error estimates of the projection methods for the Navier-Stokes equations: second-order schemes, *Math. Comp.* 65(215), 1039-1065 (1996).

Tadmor, E., The exponential accuracy of Fourier and Chebyshev differencing methods, *SIAM J. Numer. Anal.* 23(1), 1-10 (1986).

Vozovoi, L., Israeli, M., Averbuch, A., Analysis and application of Fourier-Gegenbauer method to stiff differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 33, 1844-1863 (1996).

Vozovoi, L., Weill, A., Israeli, M., Spectrally accurate solution of non-periodic differential equations by the Fourier-Gegenbauer method, *SIAM J. Numer. Anal.* 34, 1451-1471 (1997).

Bibliografia geral

Adams, Sobolev spaces, Academic Press, 1975.

Beals, R., Advanced mathematical analysis, Graduate Texts in Mathematics, vol. 12, Springer-Verlag, 1973.

Briggs, W. L., Henson, V. E., The DFT: an owner's manual for the discrete Fourier transform, SIAM, 1995.

Chae, S. B., Lebesgue integration, Springer-Verlag, 1995.

Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, 1975.

Gautschi, W., Numerical analysis: an introduction, Birkhäuser, 1997.

Kress, R., Linear integral equations, Springer-Verlag, 1989.

Lions, J. L., Magenes, E., Non-homogeneous boundary value problems and applications, Vol. 1, Springer-Verlag, 1972.

Oden, J. T., Demkowicz, Applied Functional Analysis, CRC Press, 1996.

Rivera, J. E. M., Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais, Série

Textos Avançados, LNCC, 1999.

Rivlin, T. J., An introduction to the approximation of functions, Dover, 1969.

Van Loan, C., Computational frameworks for the fast Fourier transform, SIAM, 1992.

Zeidler, E., Applied functional analysis: applications to mathematical physics, Springer-Verlag, 1995.