

ANÁLISE TÉRMICA DA INFLUÊNCIA DO TAMANHO E POSIÇÃO DE UM TUMOR NUM TECIDO HUMANO VIA SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE PENNES

Alisson Augusto Azevedo Figueiredo, LTCM, alissonfigueiredo@hotmail.com.br
Gilmar Guimarães, LTCM, gguima@mecanica.ufu.br

Resumo. Este trabalho visa o estudo dos processos de transferência de calor que ocorrem em tecidos vivos via solução da equação de Pennes, e contribuir com o diagnóstico precoce do câncer de mama analisando-se a temperatura superficial da mama. Inicialmente usando um modelo biotérmico 1D transiente, obtém-se a solução analítica pelo método das funções de Green, e posteriormente, uma solução numérica por volumes finitos considerando perfusões variáveis. Em seguida, analisam-se a influência do tamanho e localização de um tumor na temperatura superficial do tecido humano.

Palavras chave: transferência de calor, tecido vivo, equação de Pennes, tumor, temperatura superficial

1. INTRODUÇÃO

A primeira relação quantitativa que descreveu o transporte de energia em tecidos vivos e incluiu os efeitos do fluxo sanguíneo na temperatura tecidual em uma base contínua, foi apresentada por Harry H. Pennes em 1948. A equação derivada deste estudo, originalmente concebida para prever os campos de temperatura no antebraço humano, é a representação mais comum da distribuição espacial e temporal da temperatura nos sistemas biológicos e é denominada "equação da biotransferência de calor" ou "equação de Pennes" (CHARNY, 1992).

Em 1956, Lawson descobriu que a temperatura da pele sobre um câncer na mama era maior que a do tecido normal. Ele também mostrou que o sangue venoso que drena o tumor maligno é frequentemente mais quente do que o fornecido pelo sistema arterial (AMALU et al., 2006).

Segundo o Instituto Nacional do Câncer - INCA, o crescente aumento do número de casos novos de câncer fará com que não haja recursos suficientes para dar conta das necessidades de diagnóstico, tratamento e acompanhamento. O câncer de mama é o segundo tipo mais frequente no mundo e o mais comum entre as mulheres (INCA, 2014).

Justifica-se, assim, a importância do estudo para o desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas usadas na prevenção e tratamento da doença, constituindo uma questão de saúde pública.

2. EQUAÇÃO DE PENNES

A Equação que caracteriza a transferência de calor nos organismos vivos, também conhecida como equação de Pennes (PENNES, 1948), pode ser escrita como

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q_p + Q_m + Q_e = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

onde k é a condutividade térmica do tecido, ρ a massa específica do tecido, c o calor específico do tecido, Q_p é a fonte de calor devido a perfusão sanguínea, Q_m é a taxa volumétrica de geração de calor metabólica e o Q_e é referente à uma fonte de calor externa.

A fonte de calor devida à perfusão (Q_p) caracteriza-se pela transferência de calor convectiva efetuada pelo sangue através da vascularização capilar presente nos tecidos vivos, que é proporcional a diferença de temperatura do sangue arterial que entra no tecido e da temperatura do sangue venoso que sai do tecido (CHARNY, 1992). Este termo é dado por

$$Q_p = w \rho_s c_s (T_a - T) \quad (2)$$

onde w é a taxa de perfusão sanguínea, ρ_s a massa específica do sangue, c_s o calor específico do sangue, T_a a temperatura arterial e T a temperatura do tecido.

2.1. Solução Analítica 1D

A Figura (1) representa o modelo unidimensional usado para a obtenção da solução da equação de Pennes. Uma vez que o problema biotérmico unidimensional a ser analisado deve representar a transferência de calor em um tecido humano, simula-se um corpo composto por camadas de tecidos normais (saudáveis) e uma camada onde se encontra um tumor. Nesse modelo, uma superfície é exposta a um meio convectivo enquanto a outra mantém uma temperatura constante e prescrita dada pela temperatura interna do corpo.

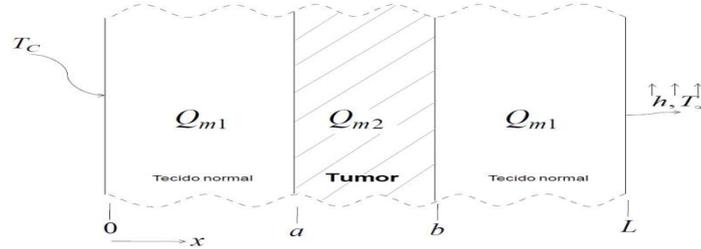


Figura 1. Modelo unidimensional representativo de um tecido exposto a um meio convectivo.

Assim, o problema representado pela Fig. (1) pode ser descrito pela equação de Pennes como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + w\rho_s c_s (T_a - T) + Q_m = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

e sujeito às condições de contorno, em $x=0$

$$T(0, t) = T_a \quad (4)$$

e em $x=L$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h(T - T_\infty) \quad (5)$$

e à condição inicial

$$T(x, 0) = T_a \quad (6)$$

Observa-se na Fig. (1) que existem dois termos distintos de geração de calor metabólico, Q_{m1} e Q_{m2} , que têm a função de simular respectivamente, o metabolismo normal e outro originado por um tumor.

Para solução analítica pelo método das funções de Green, propõe-se primeiramente a definição da variável θ como

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty \quad (7)$$

E a mudança de variável W de um problema auxiliar como

$$W(x, t) = \theta(x, t) e^{m^2 \alpha t} \quad (8)$$

onde $m^2 = \frac{w\rho_s c_s T_a}{k}$. Assim, Eq. (3) é escrita por

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{k} Q' e^{m^2 \alpha t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} \quad (9)$$

onde $Q' = Q_m + w\rho_s c_s (T_a - T_\infty)$

A solução da Eq. (9) pode ser obtida usando o método de funções de Green (Beck *et al.*, 1992), ou seja

$$W(x,t) = \int_{x'=0}^L G_{X13}(x,t|x',\tau) \Big|_{\tau=0} W(x',0) dx' + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L G_{X13}(x,t|x',\tau) Q' e^{m^2\alpha\tau} dx' d\tau + \alpha \int_{\tau=0}^t W(0,\tau) \frac{\partial G_{X13}(x,t|x',\tau)}{\partial x'} \Big|_{x'=0} d\tau \quad (10)$$

onde o primeiro termo refere-se à temperatura inicial, o segundo à geração de calor metabólico e o último à condição de contorno em x=0 de temperatura prescrita. A função de Green do problema é dada por

$$G_{X13}(x,t|x',\tau) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2\alpha(t-\tau)}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + \beta^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\beta_n x'}{L}\right)}{\beta_n^2 + B^2 + B} \quad (11)$$

onde $\beta_n \cot \beta_n = -B$ e $B = \frac{hL}{k}$, sendo β_n os autovalores do problema. Substituindo a Eq. (11) na Eq. (10) e retornando à variável original T(x,t), obtém-se a distribuição de temperatura.

$$T(x,t) = \{-2(T_0 - T_{\infty}) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n^2\alpha t}{L^2}} \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) [\cos(\beta_n) - 1]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B)} - \frac{2L^2 Q'_a}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{m^2\alpha t - \frac{\beta_n^2\alpha t}{L^2}} \right) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \left[\cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right) - 1 \right]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} \right. \\ \left. - \frac{2L^2 Q'_b}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{m^2\alpha t - \frac{\beta_n^2\alpha t}{L^2}} \right) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \left[\cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right) - \cos\left(\frac{\beta_n a}{L}\right) \right]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} - \frac{2L^2 Q'_c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{m^2\alpha t - \frac{\beta_n^2\alpha t}{L^2}} \right) \frac{(\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right) \left[\cos(\beta_n) - \cos\left(\frac{\beta_n b}{L}\right) \right]}{\beta_n (\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} \right] \\ + 2(T_c - T_{\infty}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{m^2\alpha t - \frac{\beta_n^2\alpha t}{L^2}} \right) \frac{\beta_n (\beta_n^2 + B^2) \sin\left(\frac{\beta_n x}{L}\right)}{(\beta_n^2 + B^2 + B) (\beta_n^2 + m^2 L^2)} e^{-m^2\alpha t} + T_{\infty} \quad (12)$$

2.2. Solução Numérica 1D

A Figura (3) apresenta o mesmo problema térmico, anteriormente na Fig. (1), porém discretizado numericamente em volumes finitos.

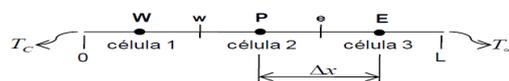


Figura 3. Volume de controle - Modelo unidimensional em volumes finitos.

Após a discretização, e aproximando os volumes finitos através da interpolação linear baseada no esquema de diferenças centradas (FERZIGER; PERIC, 2002), obtém-se.

$$T_p^{n+1} = T_p^n + \alpha \Delta t \left[\frac{T_E^n - 2T_p^n + T_W^n}{\Delta x^2} + \frac{w \rho_s c_s}{k} (T_a - T_p^n) + \frac{Q_m}{k} \right] \quad (13)$$

3. RESULTADOS

Obtém-se as soluções considerando propriedades térmicas de células da mama encontradas na literatura (Tab. 1). A solução numérica foi validada usando a solução analítica.

Tabela 1. Propriedades biotérmicas para o domínio que simula a mama (GAUTHERIE, 1980).

Propriedades	Símbolo	Tecido normal	Tumor
Condutividade térmica (W/mK)	k	0,42	0,42
Perfusão sanguínea (ml/s/ml)	w	0,00018	0,009
Densidade (kg/m³)	ρ	920	920
Calor específico (J/kgK)	c	3000	3000
Geração de calor metabólico (W/m³)	Q_m	450	29000

Considerou-se ainda no estudo de Gautherie (1980), a temperatura arterial do sangue (T_a), ambiente (T_∞), e a convecção térmica como 37°C , 20°C e $5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$, respectivamente. Os parâmetros usados na solução do problema foram: temperatura inicial ($T_a = 37^\circ\text{C}$); comprimento total ($L = 5 \text{ cm}$) e comprimento do tumor [$a : b$] = 1 cm);

3.1. Efeito da temperatura na superfície alterando a posição do tumor

A localização do tumor no corpo é um parâmetro importante para uma possível detecção do mesmo. A Fig. (2) apresenta um modelo esquemático onde três posições distintas para um tumor são simulados.

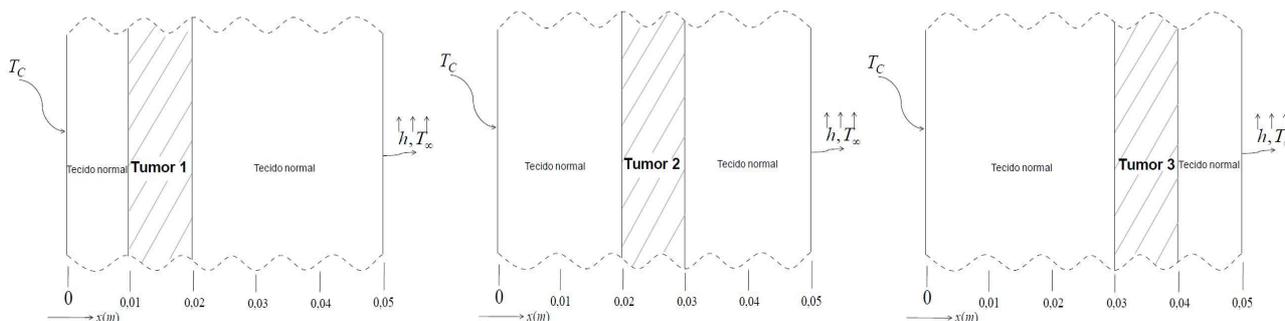


Figura 2. Modelo unidimensional esquemático 1D ilustrando três localizações usadas para um tumor de 1 cm.

Para uma simulação de 600s, a Fig. (3a) apresenta o efeito para os casos com tumor 1, 2 e 3 na evolução das temperaturas ao longo do domínio do corpo. A Fig. (3b) apresenta as temperaturas na superfície para as mesmas localizações dos tumores ao longo dos 600s. Note que o aumento significativo de temperaturas na superfície da mama se acentua apenas quando o tumor está a 1cm da superfície. Ou seja, os tumores dos casos 1 e 2 causam aproximadamente a mesma variação de temperatura na superfície que um corpo sem tumor.

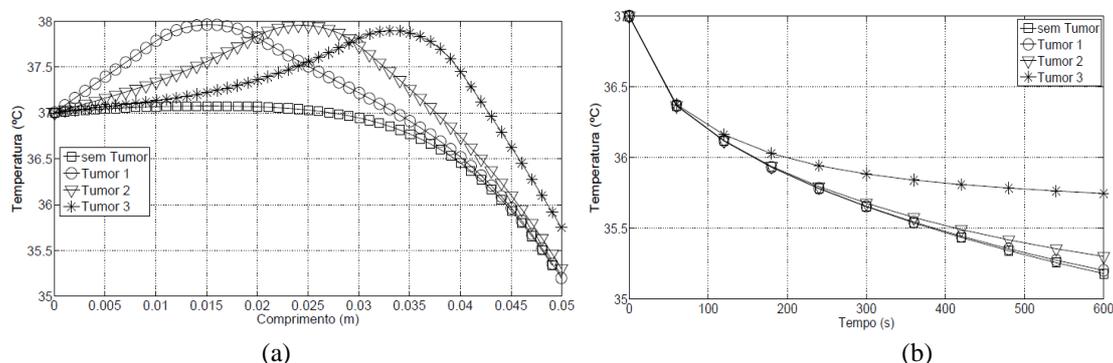


Figura 3. Distribuição das temperaturas ao longo do comprimento (a) e na superfície (b) para diferentes posições do tumor após 600s (MVF).

3.2. Efeito da temperatura na superfície alterando o tamanho do tumor

Assim como a localização, o tamanho de um tumor também pode influenciar na variação da temperatura superficial do corpo. A Fig. (4) apresenta um modelo esquemático onde três tamanhos distintos para um tumor são considerados.

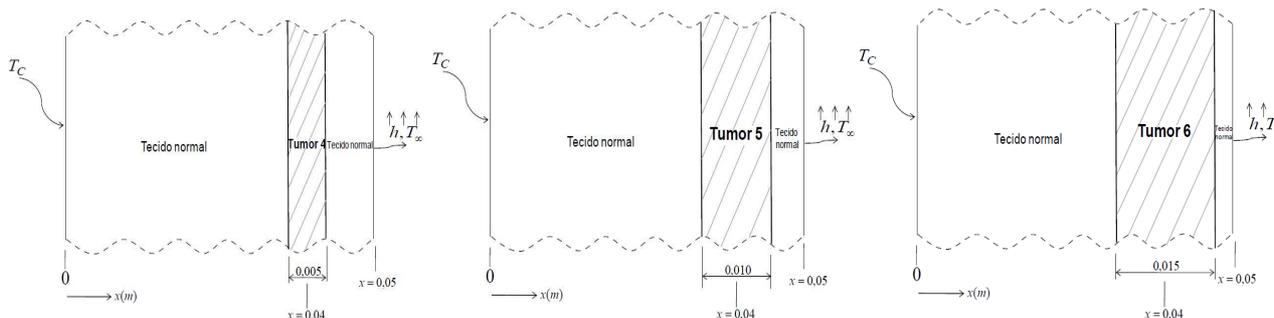


Figura 4. Modelo unidimensional esquemático 1D ilustrando três tamanhos diferentes usados para um tumor centralizado em $x = 0,04 \text{ m}$.

Para uma simulação de 600s, a Fig. (5a) apresenta o efeito para os casos com tumor 4, 5 e 6 na evolução das temperaturas ao longo do domínio do corpo. A Fig. (5b) apresenta as temperaturas na superfície para os mesmos tamanhos dos tumores ao longo dos 600s. Observa-se uma variação de até 1,5 °C para o caso do tumor 6 em relação ao corpo sem tumor. Ou seja, em razão de uma aproximação significativa em relação a superfície, qualquer dos tamanhos de tumores simulados já causam uma alta perturbação da superfície do corpo.

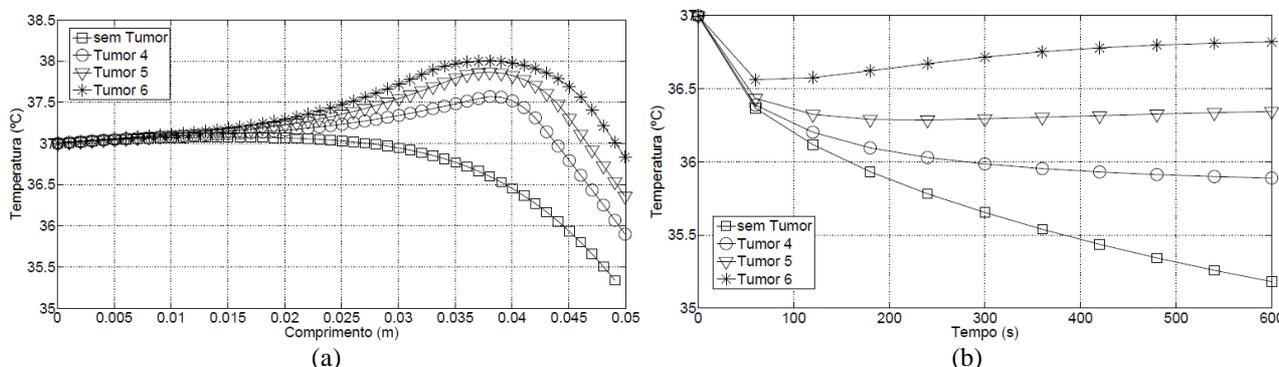


Figura 5. Distribuição das temperaturas ao longo do comprimento (a) e na superfície (b) para diferentes tamanhos do tumor centralizado em $x = 0,04m$ após 600s (MVF).

4. CONCLUSÃO

Os resultados evidenciam que dependendo dos parâmetros do tumor como tamanho e posição, têm-se respostas bem distintas na variação da temperatura superficial do corpo. Porém, é possível afirmar que a detecção de perturbação da temperatura na superfície de um corpo possuindo uma geração de calor interna diferenciada (maior que a normal) pode ser diagnosticada dependendo das condições de tamanho, localização e malignidade desse tumor.

5. REFERÊNCIAS

AMALU, W. C., Hobbins, W. B., Head, J. F. e Elliot, R. L., 2006, "The biomedical engineering handbook - medical devices and systems", Infrared The Biomedical Engineering Handbook - Medical devices and systems, 3 ed.
 BECK, J. V., 1992, "Heat conduction using Green's functions", Hemisphere Publishing.
 CHARNY, C. K., 1992, "Bioengineering heat transfer", Academic Press, Vol. 22, Cap. Mathematical models of bioheat transfer, pp. 19-155.
 FERZIGER, J. H. e PERIC, M, 2002, "Computational methods for fluid dynamics", Springer-Verlag, 3 ed.
 GAUTHERIE, M, 1980, "Thermopathology of breast cancer: Measurement and analysis of in vivo temperature and blood flow", Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 335, pp. 383-415.
 INCA. 11 November 2014 <<http://www.inca.gov.br/estimativa/2014>>.
 PENNES, H. H, 1948, "Analysis on tissue arterial blood temperature in the resting human forearm", Applied Physiology, Vol. 1, pp. 93-122.

6. AGRADECIMENTOS

Às agências financiadoras CAPES, CNPq e FAPEMIG, e ao Programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica da UFU.

7. ABSTRACT

This paper aims to study the heat transfer processes occurring in living tissue via solution of Pennes equation, and contribute to the early diagnosis of breast cancer by analyzing the surface temperature of the breast. Initially using a transient 1D biothermic model, we obtain the analytical solution by the method of Green's functions, and the numerical solution using the finite volume method. Next, analyze the influence of the size and location of a tumor in the surface temperature of the human tissue.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.