

Modelo para remoção de ruídos em imagens digitais com um funcional de expoente variável

Daniel Hilário da Silva, Centro de Ensino Superior de Catalão (CESUC), e-mail: denielhs@gmail.com
Celia Aparecida Zorzo Barcelos, FAMAT-UFU, e-mail: celiabz@gmail.com

Resumo. A proposta deste artigo é analisar o comportamento de um funcional com expoente variável, assumindo valores entre 1 e 2, o qual fornece um modelo para a remoção de ruídos em imagens digitais como tomografias, ressonâncias magnéticas, sinais obtidos via satélite, imagens obtidas por aviões com o objetivo de se detectar alvos de guerra, entre outros. A difusão resultante do modelo obtido pelo funcional é uma combinação da Variação Total com a Difusão Isotrópica. Será apresentado um resultado experimental com o intuito de ilustrar a eficiência do modelo a ser utilizado e como a variação do expoente de forma “automática” com uma função $q(x)$ assumindo valores entre 1 e 2 garante bons resultados com relação a preservação das bordas, reconstrução da imagem e a remoção dos ruídos.

Palavras chave: ruídos, imagens, expoente, Euler-Lagrange

1. INTRODUÇÃO

É notório que na última década o uso de métodos variacionais e equações diferenciais parciais (EDP's) para abordar problemas de restauração de imagens evoluíram de forma significativa. A ideia básica é modificar uma dada imagem, curva ou superfície utilizando uma equação diferencial parcial. Neste artigo, considera-se o problema clássico na restauração de imagens, que consiste em recuperar uma imagem $u(x)$, a partir de uma imagem ruidosa, $I(x)$. A equação apresentada a seguir mostra que a imagem com ruído é obtida pela inserção de um ruído $\eta(x)$.

$$I(x) = u(x) + \eta(x) \quad (1)$$

Ao se pensar em um método que possa, de forma seletiva, eliminar informações indesejáveis presentes na imagem como o ruído deve-se verificar se este não corre o risco de eliminar informações ou características relevantes e nem mesmo criar características que não faziam parte da imagem original. Diversos modelos não-lineares tem sido propostos com o objetivo de restaurar imagens digitais, porém tais modelos apresentam problemas quando a restauração refere-se a imagens com intensidades não-uniformes pois não conseguem eliminar o efeito “staircasing”, ou seja, fenômeno que cria falsas bordas. O modelo analisado neste artigo utiliza técnicas de métodos variacionais, com o qual é possível expressar um modelo que seja consistente matematicamente e possa ser implementado de uma forma relativamente simples usando o método das Diferenças Finitas. O modelo em questão foi proposto recentemente por Chen, Levine e Rao (2006) e é apresentado a seguir.

$$\min_{u \in BV_g \cap L^2(\Omega)} \int_{\Omega} \phi(x, Du) + \frac{\lambda}{2} (u - I)^2 \quad (2)$$

onde

$$BV_g(\Omega) = \{u \in BV(\Omega); u = g \text{ sobre } \partial\Omega\} \quad (3)$$

e o funcional ϕ sendo dado por:

$$\phi(x, r) := \begin{cases} \frac{1}{q(x)} |r|^{q(x)} & \text{se } |r| \leq \beta \\ |r| - \frac{\beta q(x) - \beta^{q(x)}}{q(x)} & \text{se } |r| > \beta \end{cases} \quad \text{com } \beta \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

A equação diferencial associada ao problema, dado pela Eq. (2), é dada por:

$$\dot{u} - \text{div}(\phi_r(x, Du)) + \lambda(u - I) = 0, \text{ em } \Omega^T \quad (5)$$

$$u(x, t) = g(x), \text{ sobre } d\Omega^T \quad \text{e} \quad u(x, 0) = I, \text{ em } \Omega \\ \Omega^T := \Omega \times [0, T], \partial\Omega^T := \partial\Omega \times [0, T] \quad \text{e} \quad Du = \nabla u \cdot L^n + D^s u \quad (6)$$

∇u : representa a parte absolutamente contínua de Du em relação à medida de Lebesgue L^n , ou seja, o gradiente da função $u(x)$;

L^n : representa a medida n -dimensional de Lebesgue;

Ds : representa a parte singular da medida;

$\phi_r(x, Du)$: representa a derivada de ϕ com relação a r , ou seja,

$$\phi_r(x, Du) = \frac{\partial \phi(x, Du)}{\partial r} \quad (7)$$

Pretende-se apresentar as principais vantagens do modelo obtido ao se minimizar o funcional apresentado na Eq. (1), enfatizando algumas das características e propriedades dos espaços considerados, além de apresentar uma abordagem sobre os Métodos Variacionais e a Equação de Euler-Lagrange destacando a importância de tais conceitos para o entendimento do funcionamento do modelo proposto. E, por último tem-se como objetivo apresentar aplicações desse modelo em imagens digitais.

A metodologia adotada neste artigo teve como ênfase os conceitos apresentados no artigo: “Variable exponent linear growth functionals in image restoration” de Chen, Y., Levine, S. e Rao, M. publicado em SIAM (Journal of Applied Mathematics), Vol. 66, No. 4, 1383-1406, de 2006. Além da análise dos conceitos apresentados foi realizada uma vasta pesquisa bibliográfica sobre os conceitos matemáticos apresentados além de conceitos sobre o tratamento de imagens digitais com o objetivo de aferir o quão o modelo é eficiente.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção serão abordados aspectos relacionados ao Cálculo Variacional e considera-se que o leitor tenha alguma familiaridade com a notação utilizada nesta fundamentação. O estudo sobre o Cálculo Variacional é dado com o intuito de apresentar os resultados necessários para a análise do modelo proposto para a remoção de ruídos em imagens digitais citado na Eq. (2). Tal análise será feita para funções $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com o intuito de se facilitar o entendimento dos resultados apresentados. Um estudo mais aprofundado sobre espaços de dimensão n pode ser encontrado em Dacorogna (2004) e em Evans (1992).

2.1. A equação de Euler-Lagrange para problemas bi-dimensionais

Considera-se $u: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sendo o domínio de definição Ω um aberto, limitado, simplesmente conexo e sua fronteira $\partial\Omega$ é suave exceto, possivelmente, em um número finito de pontos. Denota-se por $C^k(\bar{\Omega})$ o conjunto de todas as funções com derivadas parciais contínuas $\bar{\Omega}$ de ordem menor ou igual a k . A direção ortogonal v_i é uma função de (x, y) em $\partial\Omega$. A seguinte identidade é válida:

$$v_\theta = v_1 \frac{\partial v}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8)$$

sendo v_θ a derivada de $v(x, y)$ na direção da normal exterior de v ;

Nos cálculos que serão omitidos deste artigo, se faz uso das identidades da integral de Gauss apresentadas a seguir as quais expressão integração por partes de funções de duas variáveis x e y .

$$\iint_{\Omega} w v_x \, dx dy = - \iint_{\Omega} w_x v \, dx dy + \int_{\partial\Omega} v_1 w v \, ds \quad (9)$$

$$\iint_{\Omega} w v_y \, dx dy = - \iint_{\Omega} w_y v \, dx dy + \int_{\partial\Omega} v_2 w v \, ds \quad (10)$$

Serão analisados funcionais do tipo $I: V \rightarrow \mathbb{R}$, onde V é algum conjunto de funções reais definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, sendo a norma utilizada dada por:

$$\|v\|_{L^2} = \left[\iint_{\Omega} |v(x, y)|^2 \, dx dy \right]^{1/2} \quad (11)$$

Será feita uma análise para o caso bidimensional dado a seguir:

$$\begin{cases} V = \{v \in C^2(\bar{\Omega}); v = \alpha \text{ em } \partial\Omega \\ I(v) = \iint_{\Omega} L(x, y, v, v_x, v_y) \, dx dy \quad v \in V. \end{cases} \quad (12)$$

sendo $\alpha = \alpha(x, y)$ uma função contínua em $\partial\Omega$ e a função $L(x, y, r, s, t)$ com derivadas parciais contínuas de ordem menor ou igual a 2 para todo ponto (x, y) em $\bar{\Omega}$, com $-\infty < r, s, t < +\infty$. Além disso tem-se que \dot{V} é dado por:

$$\dot{V} = \{v \in C^2(\bar{V}); v = 0 \text{ em } \partial\Omega\} \quad (13)$$

Para determinar a equação de Euler-Lagrange calcula-se a derivada direcional de primeira ordem do funcional I , isto é, $I^{(1)}(v, \eta) = \left. \frac{dI(v+\tau\eta)}{d\tau} \right|_{\tau=0}$, onde $I(v + \tau\eta) = \iint_{\Omega} L(x, y, v + \tau\eta, v_x + \tau\eta_x, v_y + \tau\eta_y) dx dy$. Assim:

$$I^{(1)}(v, \eta) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \eta + \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta_x + \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta_y \right) dx dy \quad (14)$$

Desta forma, a condição para v ser um ponto estacionário de I é:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \eta + \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta_x + \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta_y \right) dx dy = 0, \quad \forall \eta \in \dot{V} \quad (15)$$

Deste modo para se eliminar os termos η_x e η_y da integral acima calculam-se as integrais dadas a seguir:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta_x dx dy \quad \text{e} \quad \iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta_y dx dy \quad (16)$$

fazendo mudanças adequadas e utilizando as relações dadas na Eq. (9) e na Eq. (10) obtém-se:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial v} \eta dx dy + \int_{\partial\Omega} v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} \eta ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) \eta dx dy + \int_{\partial\Omega} v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} \eta ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \eta dx dy = 0, \quad \forall \eta \in \dot{V} \quad (17)$$

agrupando alguns termos temos a expressão a seguir:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \right] \eta dx dy + \int_{\partial\Omega} \left(v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} + v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \eta ds = 0, \quad \forall \eta \in \dot{V} \quad (18)$$

como η se anula em $\partial\Omega$ a Eq. (18) se reduz a seguinte equação:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \right] \eta dx dy = 0, \quad \forall \eta \in \dot{V}. \quad (19)$$

Assim utilizando o teorema do cálculo variacional obtém-se,

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial v_y} \right) = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (20)$$

A equação dada acima é conhecida como a equação de Euler-Lagrange para problemas de valor de contorno de segunda ordem. A condição de contorno $u = \alpha$ é uma condição de contorno essencial para o funcional linear I . Para encontrar a condição de contorno natural remove-se a condição de contorno essencial, ou seja, toma-se $V = \check{V} = C^2(\Omega)$ e, desta forma, um ponto estacionário deve satisfazer a Eq. (18) para a nova escolha do espaço \check{V} , mas com $\dot{V} \subset \check{V}$, sendo \dot{V} dado na Eq. (13) tem-se que a equação de Euler-Lagrange dada na Eq. (20) continua sendo válida. Assim, tem-se que:

$$\int_{\partial\Omega} \left(v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} + v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} \right) \eta dx dy = 0, \quad \forall \eta \in C^2(\bar{\Omega}) \quad (21)$$

o que fornece a condição de contorno natural para I , dada por $v_1 \frac{\partial L}{\partial v_x} + v_2 \frac{\partial L}{\partial v_y} = 0$, em $\partial\Omega$. Demais generalizações e demonstrações sobre a dedução da equação de Euler-Lagrange podem ser encontrados em Dacorogna (2004).

2.2. Considerações sobre o modelo analisado

O modelo analisado já apresentado neste artigo pela Eq. (2) apresenta relevante vantagem ao ser comparado com os modelos propostos por Rudin, Osher e Fatemi (1992) que apresenta bons resultados quando o intuito é a preservação de bordas de uma imagem enquanto a mesma é reconstruída ou até mesmo se comparado com o modelo proposto por

Chambolle e Lions (1997) o qual minimiza um funcional de energia combinando difusão isotrópica (DI) e variação total (VT). No modelo analisado o valor da função $q(x)$ varia de acordo com a posição x na imagem. Desta forma, se o valor do gradiente ∇u for suficientemente grande tem-se o modelo da VT com $q(x) = 1$, porém caso o valor do gradiente tenda a zero tem-se o modelo da DI, $q(x) = 2$, e em todos os outros locais o modelo efetuará uma filtragem, a qual estará entre o modelo de DI e a VT. O modelo de minimização do funcional dado pela Eq. (2) apresenta bons resultados pelo fato da função $q(x)$ assumir diferentes valores dependendo da localização de x na imagem. Deste modo a direção e velocidade da difusão em cada ponto dependem do comportamento local da imagem.

O problema de minimização de um funcional dado pela Eq. (2), também conhecido como problema de Dirichlet, juntamente com a forma como o funcional foi definido e escolhendo por exemplo a função $q(x)$ da seguinte maneira:

$$q(x) = 1 + \frac{1}{1+k|\nabla G_\sigma * I(x)|^2} \quad (22)$$

sendo $G_\sigma(x)$ o filtro Gaussiano é possível através da equação de Euler-Lagrange citada neste artigo pela Eq. (20) demonstrar matematicamente que este problema é bem posto, ou seja, que este possui solução e que estas convergem, para isso considera-se os funcionais:

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| - \frac{\beta q(x) - \beta q(x)}{q(x)} + \frac{\lambda}{2} (u - I)^2 dx \quad \text{para } |\nabla u| > \beta \quad (23)$$

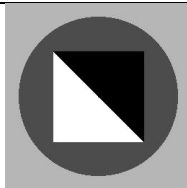
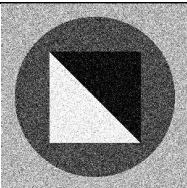
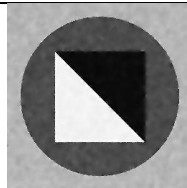
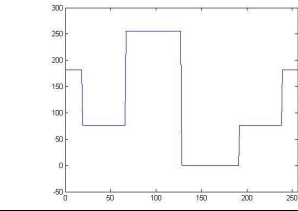
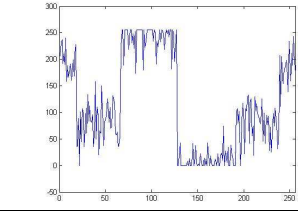
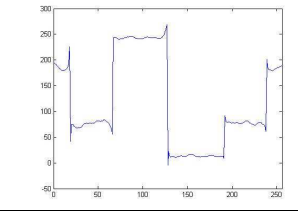
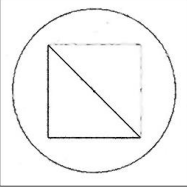
$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |\nabla u|^{q(x)} + \frac{\lambda}{2} (u - I)^2 dx \quad \text{para } |\nabla u| \leq \beta \quad (24)$$

Após a realização de alguns cálculos e fazer uso de uma quantidade relevante de teoremas do Cálculo Variacional obtém-se a equação do fluxo dada pelas Eq. (5) e Eq. (6). As deduções mencionadas, juntamente com os teoremas utilizados podem ser encontrados em Silva (2009). Através da discretização da equação do fluxo, associada a este problema, dada pela Eq. (5), utilizando Diferenças Finitas é possível obter uma solução numérica para o problema de minimização dado pela Eq. (2) o qual proporciona os resultados apresentados na seção seguinte.

2.3. Resultados experimentais

Será apresentado um resultado de remoção de ruído obtido com a utilização do modelo estudado neste trabalho. Para melhor compreensão das ideias propostas será apresentada a imagem original, a imagem com ruído e a imagem suavizada nesta ordem, além disso os gráficos correspondentes a uma linha da matriz de cada imagem considerada e o mapa de bordas.

Tabela 1. Resultados experimentais para o modelo de minimização dado pela Eq. (2)

		
Imagem original	Imagem ruidosa	Imagem suavizada
		
Gráfico da imagem original	Gráfico da imagem ruidosa	Gráfico da imagem suavizada
		
	Mapa de bordas	

Na primeira linha da Tab. (1) tem-se respectivamente a imagem original, a imagem corrompida com ruído gaussiano e a imagem suavizada a qual foi reconstruída usando o modelo analisado com 200 iterações, $\beta = 100$; $k = 0.0006$, $\lambda=0,05$, $\sigma=0,5$. Na segunda linha da Tab. (1) tem-se o gráfico da 128ª linha da imagem original, da imagem com ruído e da imagem suavizada. Já na terceira linha da Tab. (1) tem-se a imagem do mapa de borda, o qual é obtido quando a função $q(x) = 1$.

Percebe-se pelas imagens que o modelo analisado é um bom modelo para remoção de ruídos e o aspecto relevante deste é que tais ajustes são todos “automáticos” sendo regulados pela função $q(x)$ “localmente”, ou seja, para cada valor de x . Pode-se perceber também que tanto a parte de mapeamento de bordas do modelo utilizado quando $q(x)=1$, tanto quanto na difusão da imagem quando $q(x)=2$ apresenta bons resultados na remoção do efeito “*staircasing*” e também para difusão da imagem em regiões com certa suavidade, ou seja, com $1 < q(x) < 2$.

2.4. Considerações finais

Percebe-se que o modelo analisado neste trabalho, ou seja, o modelo proposto por Chen, Levine e Rao (2006) apresenta bons resultados para a remoção de ruídos em imagens digitais, além de ser um modelo de fácil implementação computacional, já que a sua implementação é favorecida pela extensa quantidade de métodos numéricos encontrados na literatura.

A formulação variacional desenvolvida é importante pois permite apresentar matematicamente resultados sólidos, já que através da formulação apresentada e de alguns resultados presentes na literatura é possível mostrar que o problema de minimização é bem posto, ou seja, admite um mínimo e que a equação do fluxo associada a este problema também existe e é única.

Com o intuito de obter melhores resultados para a remoção de ruídos em imagens digitais pode-se buscar modificar este funcional, com o intuito de que o mesmo dependa menos do limiar, β ou até mesmo utilizar implementação computacional mais complexa com o intuito de otimizar os resultados obtidos de forma analítica ao se minimizar o funcional dado na Eq. (2).

3. REFERÊNCIAS

- Chambolle, A. e Lions, P.L., 1997. “Image recovery via total variation minimization and related problems”. *Numeric Mathematic*, 76, pp.167-188,
- Chen, Y., Levine, S. e Rao, M., 2006. “Variable exponente linear growth functionals in image restoration”. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 66, No. 4, 1383-1406.
- Dacorogna, B., 2004. “Introduction to the calculus of variations”. Imperial College Press. London.
- Evans, L. C., 1992. “Partial differential equations”. CRC Press, Boca Raton.
- Rudin, L., Osher, S. e Fatemi, E., 1992. “Nonlinear total variation based noise removal algorithms”. *Physica D*, 60, pp. 259-268.
- Silva, D. H., 2009. “Um estudo sobre a minimização de funcionais de expoente variável aplicados à restauração de imagens digitais”. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, UFU, Uberlândia. (Disponível em <http://www.posgrad.famat.ufu.br/dissertacoes>)

4. AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha amiga e professora Celia Aparecida Zorzo Barcelos, a minha esposa Cristiane de Almeida Barbosa Hilário e a todos os amigos da sala CIMNE, da Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, os quais me incentivaram a compartilhar os conceitos apresentados neste artigo.

5. ABSTRACT

The purpose of this paper is to analyze the behavior of a functional of variable exponent, assuming values between 1 and 2, which provides a model for removing noise in digital images as CT scans, MRIs, signals obtained satellite images or imagens obtained by aircraft in order to detect targets of war, among others. The resulting diffusion of the model obtained by the functional is a combination of total variation with isotropic diffusion. An experimental result in order to illustrate the model of efficiency to be used and how the change in the form of exponent "automatic", with the function $q(x)$ assuming values between 1 and 2 ensures good results with respect to preservation of edges, image reconstruction and removal of noise.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores Daniel Hilário da Silva e Celia Aparecida Zorzo Barcelos são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.