Análise de Problemas de Biotransferência de Calor através de Técnicas de Transformação Integral

Amanda Vivas Presgrave, Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais, Instituto Militar de Engenharia - IME, e-mail: amandapresgrave@ime.eb.br

Rodrigo Otávio de Castro Guedes, Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais, Instituto Militar de Engenharia - IME, e-mail: guedes@ime.eb.br

Francesco Scofano Neto, Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais, Instituto Militar de Engenharia - IME, e-mail: scofano@ime.eb.br

Introdução

Esta comunicação tem por objetivo apresentar sucintamente o emprego de técnicas de transformação integral aplicadas ao problema de biotransferência de calor. Conforme poderá ser verificado nas seções que se seguem, utiliza-se o modelo de Pennes para descrever o campo de temperatura em tecidos orgânicos submetidos ao fenômeno da perfusão sangüínea. A equação resultante é resolvida para situações de interesse e alguns resultados são apresentados.

Análise

Toma-se como ponto de partida, uma equação generalizada undimensional transiente de biotransferência de calor, onde a perfusão sangüínea é considerada diretamente proporcional à diferença de temperatura entre o tecido e o sangue. Assim, o modelo matemático é descrito por [1]:

$$w(x)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\varpi(x)T(x,t)+P(x)$$

submetida as seguintes restrições

$$T(x,0)=f(x)$$

$$\alpha_0 T(x_0,t)-\beta_0 k(x_0)\frac{\partial T(x_0,t)}{\partial x}=\phi_0$$

$$\alpha_1 T(x_1,t)+\beta_1 k(x_1)\frac{\partial T(x_1,t)}{\partial x}=\phi_1$$

Percebe-se que uma série de situações de interesse podem ser extraídas desta formulação geral bastando para tanto adotar-se valores específicos para os coeficientes e para as funções. Tendo em vista a não homogeneidade do modelo e visando uma convergência mais acelerada das séries pertinentes ao esquema de solução, adota-se que: $T(x,t)=T_{ss}(x)+\theta(x,t)$. Assim:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dT_{ss}}{dx}\right)-\varpi(x)T_{ss}(x)+P(x)=0$$

$$\alpha_0 T_{ss}(x_0)-\beta_0 k(x_0)\frac{dT_{ss}(x_0)}{dx}=\phi_0$$

$$\alpha_1 T_{ss}(x_1)+\beta_1 k(x_1)\frac{dT_{ss}(x_1)}{dx}=\phi_1$$

$$w(x)\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-\varpi(x)\theta(x,t)$$

$$\theta(x,0)=f(x)-T_{ss}(x)$$

$$\alpha_0\theta(x_0,t)-\beta_0 k(x_0)\frac{\partial\theta(x_0,t)}{\partial x}=0$$

$$\alpha_1\theta(x_1,t)+\beta_1 k(x_1)\frac{\partial\theta(x_1,t)}{\partial x}=0$$

A distribuição de temperatura permanente, $T_{ss}(x)$, pode ser determinada analiticamente ou por esquemas numéricos tradicionais como o método de Runge-Kutta. Já o problema para $\theta(x,t)$ é resolvido através de técnicas de transformação integral e portanto admite-se uma expansão em autofunções $\psi_i(x)$ dadas por:

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d\psi_i}{dx}\right)+\left(\mu_i^2 w(x)-\varpi(x)\right)\psi_i(x)=0$$

$$\alpha_0\psi_i(x_0)-\beta_0 k(x_0)\frac{d\psi_i(x_0)}{dx}=0$$

$$\alpha_1\psi_i(x_1)+\beta_1 k(x_1)\frac{d\psi_i(x_1)}{dx}=0$$

Através da propriedade de ortogonalidade do problema de Sturm-Liouville acima, pode-se determinar o par de transformação e inversão:

$$\bar{\theta}_i(t)=\frac{1}{N_i^{1/2}}\int_{x_0}^{x_1} w(x)\psi_i(x)\theta(x,t)dx$$

$$\theta(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{N_i^{1/2}}\psi_i(x)\bar{\theta}_i(t)$$

Neste ponto, uma série de operações matemática descritas em [1,2] são empregadas para a transformação integral do problema. Estas manipulações revelam que:

$$\theta(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\psi_i(x)e^{-\mu_i^2 t}$$

$$C_i=\frac{1}{N_i}\int_{x_0}^{x_1}w(x)\psi_i(x)\big(f(x)-T_{ss}(x)\big)dx$$

Aplicação

De modo a ilustrar os méritos relativos do esquema de solução proposto, estudou-se a distribuição de temperatura transiente em um problema de ablação endometrial uterina. Este tratamento é reconhecido como uma alternativa bem eficiente a histerectomia que é comumente empregada em situações de menorragia. O procedimento consiste na inserção de um catéter cuja ponta contém um balão de látex preenchido com cerca de 15 ml de um fluido a 87°C que permanece em contato com o endométrio durante oito minutos. A distribuição de temperatura transiente da parede uterina pode ser modelada por [1,2]:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\omega\rho_s C_s\big(T(x,t)-T_s\big)+Q_{met}=\rho C\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x,0)=T_b$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0,\; T(l,t)=T_{bal}$$

É fácil inferir que a formulação acima é um caso particular do problema geral tratado na seção anterior. Valores típicos para as várias quantidade de interesse foram empregados para a simulação da distribuição de temperatura do problema [1-2]. De uma forma geral, pode-se constatar que a série apresenta uma convergência gráfica para uma expansão de 20 termos. A tabela abaixo ilustra o importante papel da perfusão sanguínea $\varpi\ X10^4\ m_s^3/m^3 s$ no processo de ablação endometrial.

t	ϖ =0	ϖ =14	ϖ =28	ϖ =56
0 min	37,0	37,0	37,0	37,0
1 min	47,6	47,1	46,7	45,8
5 min	66,9	63,1	60,0	55,3
8 min	70,9	65,4	61,4	55,8

TABELA 1 – Temperatura em graus Celsius na base do endométrio para diversos valores de tempo e de perfusão sanguínea.

Comentários finais

Neste trabalho foi apresentado um formalismo para a solução da equação de biotransferência de calor generalizada baseado em técnicas de transformação integral. De modo a avaliar os méritos relativos do esquema de solução do modelo matemático, fez-se um estudo de caso referente ao problema da ablação endometrial. Os resultados revelaram que a técnica empregada produz resultados bastante precisos com um custo computacional bastante reduzido para a avaliação do campo de temperatura. Conforme citado nas referências abaixo, esta técnica também foi empregada com bastante êxito em outras situações referentes ao fenômeno de biotransferência de calor. Dentre estes destacam-se a distribuição de temperatura transiente para queimaduras em pele humana e ao de resfriamento seletivo do cérebro isquêmicos [2,3]. A técnica também provou ser bastante útil quando aplicada a geometrias bidimensionais onde o conhecimento do campo transiente de temperatura é particularmente importante para se avaliar a eficácia de terapias baseadas em hipertermia no tratamento de tecidos cancerosos [4,5].

Referências bibliográficas

[1] Presgrave, A. V., "Modelagem e Simulação dos Efeitos de Perfusão Sangüínea em Problemas de Biotransferência de Calor", Dissertação de Mestrado, IME, 2005.

[2] Presgrave, A. V., Guedes, R. O. C., Scofano Neto, F. "Hybrid Analytical Numerical Solution to the Bioheat Transfer Equation", 18° Congresso Internacional de Engenharia Mecânica – COBEM, 2005.

[3] Presgrave, A. V., Guedes, R. O. C., Scofano Neto, F. "Analysis of Skin Burn Injuries Through Integral Transform Techniques", 11° Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas – ENCIT, 2006.

[4] Azevedo, M. D. B., "Simulações Analítico-Numéricas para a Transferência de Calor em Tecidos Orgânicos", Dissertação de Mestrado, IME, 2004.

[5] Azevedo, M. D. B, Guedes, R. O. C, Scofano Neto, F. "Analytical Solution to the Two Dimensional Transient Bioheat Equation with Convective Boundary Conditions", 11° Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas – ENCIT, 2006.