

ESTUDO DA INSTABILIDADE DE SAFFMAN-TAYLOR ATRAVÉS DO MÉTODO SEMI-LAGRANGEANO DAS CURVAS DE NÍVEL

Fábio Gonçalves*

Francisco Duarte Moura Neto†

Instituto Politécnico

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

C. P. 97282 – 28601-970

Nova Friburgo, RJ.

*fgoncalves@iprj.uerj.br

†fmoura@iprj.uerj.br

Resumo. Neste trabalho aplicamos o método dos conjuntos de nível com implementação semi-Lagrangeana, chamado por método semi-Lagrangeano das curvas de nível (SLCN), em um estudo que trata do escoamento de dois fluidos imiscíveis no interior de um meio poroso isotrópico, apresentando um típico problema de instabilidade viscosa conhecido por instabilidade de Saffman-Taylor. Este estudo envolve a introdução de perturbações trigonométricas de baixa amplitude à interface entre os fluidos, uma análise de estabilidade linear e a sua evolução não-linear. Por fim, as variações de amplitude das perturbações trigonométricas introduzidas, considerando diferentes números de onda, são analisadas nas abordagens linear e não-linear.

Palavras chave: Método dos conjuntos de nível, método semi-Lagrangeano, instabilidade de Saffman-Taylor, fluido incompressível, meio poroso.

1. Introdução

Escoamentos em meios porosos que apresentam instabilidade de origem tipicamente viscosa, instabilidade de Saffman-Taylor (Saffman e Taylor, 1958), podem ser observados em diversas aplicações como, por exemplo, na recuperação de petróleo em reservatórios subterrâneos. Neste caso clássico, uma das etapas da extração do óleo residente consiste na injeção de água no interior do reservatório de petróleo (Carasso e Pasa, 1998, Pasa, 2002, Pasa e Titaud, 2005). A interface de separação entre estes fluidos, água/óleo, evolui de forma instável gerando dedos viscosos que crescem com o tempo.

O mesmo comportamento se observa quando se utiliza água doce para empurrar água salgada em camadas porosas em aplicações em hidrologia (Aldushin e Matkowsky, 1998). Essencialmente, a instabilidade viscosa ocorre quando o fluido mais viscoso é deslocado pelo fluido menos viscoso.

Neste trabalho aplicamos o método semi-Lagrangeano das curvas de nível (SLCN) no acompanhamento de interfaces móveis entre dois fluidos imiscíveis no interior de meios porosos consolidados exibindo instabilidades do tipo Saffman-Taylor. O método SLCN é o método dos conjuntos de nível (Osher e Sethian, 1988) introduzido por Osher e Sethian a fim de descrever a evolução de curvas, intergrado no tempo por intermédio de uma abordagem semi-Lagrangeana. Essa combinação de métodos foi inicialmente introduzida por Strain (Strain, 1999) e, posteriormente, por Min (Min, 2004), aplicado à simulação de ondas em um espaço bidimensional e pelos autores (Gonçalves *et al.*, 2006), aplicado ao estudo de interfaces entre fluidos imiscíveis no interior de meios porosos.

O campo de velocidades associado ao escoamento no meio poroso é aqui determinado através de um método iterativo paralelizável introduzido por Douglas (Douglas Jr. *et al.*, 1993) no contexto dos elementos finitos mistos que foi generalizado por Gonçalves e Moura Neto (Gonçalves e Moura Neto, 2005) utilizando a linguagem de grafos.

Este estudo envolve uma análise de estabilidade linear da evolução do fronte de separação entre os dois fluidos, a introdução de perturbações trigonométrica de baixa amplitude e a sua evolução não-linear. O comportamento destas perturbações para diferentes números de onda, inclusive para perturbações aleatórias, é investigado.

2. Método dos conjuntos de nível

O método dos conjuntos de nível baseia-se em uma representação suave da interface através de uma função escalar ϕ , a função curva de nível, e na equação de evolução que preserva sua representação.

Seja Γ_t a interface no tempo t , uma simples curva ou um conjunto de curvas. Para cada tempo fixo t , a interface é

$$\Gamma_t = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \} . \quad (1)$$

A equação de evolução para ϕ tem que ser compatível com a Eq. (1). Assim, assumamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ é um ponto da interface, $\mathbf{x}(t) \in \Gamma_t$. Além disso assumamos que a interface evolui de acordo com o campo de velocidades \mathbf{u} ,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \tag{2}$$

onde $\dot{\mathbf{x}}$ representa a derivada de \mathbf{x} em relação ao tempo t . Desta forma, a equação de evolução de ϕ , é dada por

$$\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0. \tag{3}$$

Completando a descrição do método dos conjuntos de nível, em um nível analítico, é necessário especificar condições iniciais para ϕ , compatíveis com a Eq. (1). Ou seja, é necessário definir $\phi(\cdot, 0)$ de maneira que $\Gamma_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(\mathbf{x}, 0) = 0\}$. Para isso, basta considerar $\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0)$ a função distância à interface com sinal: se \mathbf{x} estiver dentro da região delimitada pela interface, $\phi(\mathbf{x}, 0)$ é negativa; se \mathbf{x} estiver fora desta região então $\phi(\mathbf{x}, 0)$ é positiva; caso \mathbf{x} pertença a interface então $\phi(\mathbf{x}, 0)$ é nula. Veja a Fig. 1.

Ressaltamos que, para $t > 0$, $\phi(\mathbf{x}, t)$ não é necessariamente igual a distância à Γ_t . Se a função curva de nível satisfizer a equação de evolução (3) então a interface satisfaz a Eq. (1) e, assim, determinando os zeros de $\phi(\cdot, t)$ para um tempo fixo t , determinamos a interface Γ_t .

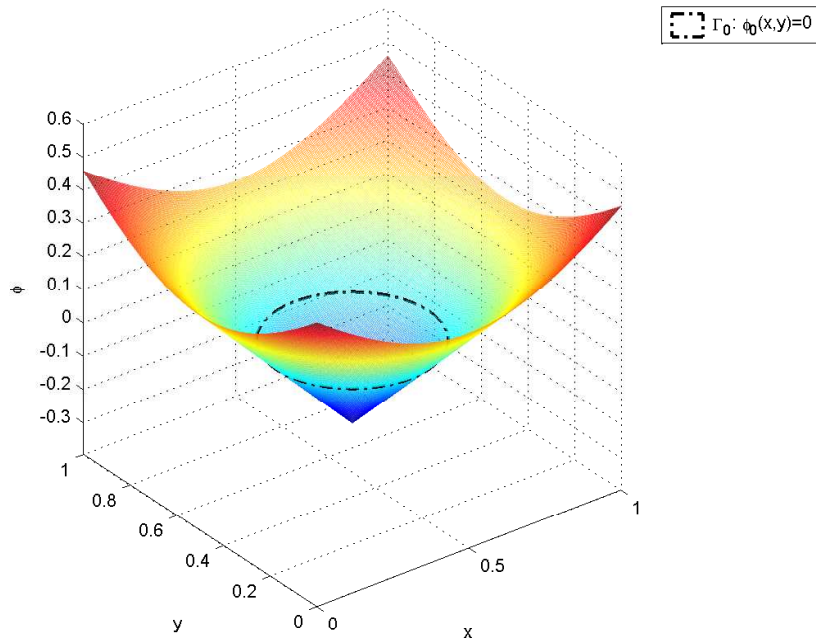


Figura 1: A função curva de nível inicial, $\phi_0(\mathbf{x})$, como sendo a função distância à interface Γ_0 com sinal.

3. Esquema semi-Lagrangeano

O esquema semi-Lagrangeano é usado para resolver a Eq. (3) e baseia-se no método das características.

Assumamos conhecido o campo de velocidades. As curvas características da equação de evolução da função curva de nível,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$0 \leq x, y \leq L, t \geq 0$, são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_1 &= u(S_1(t), S_2(t)) \\ \dot{S}_2 &= v(S_1(t), S_2(t)) \end{aligned} \right\} t \geq t^*, \tag{5}$$

$$(S_1(t^*), S_2(t^*)) = (x^*, y^*),$$

onde (x^*, y^*) é um ponto arbitrário e t^* é um tempo, também, arbitrário.

A solução $(S_1(t), S_2(t))$ é a trajetória de (x^*, y^*) e $\phi(S_1(t), S_2(t), t)$ é constante ao longo do tempo,

$$\phi(S_1(t), S_2(t), t) = \phi(x^*, y^*, t^*), \tag{6}$$

para $t \geq t^*$. De fato, a derivada com respeito ao tempo da função curva de nível no lado esquerdo da Eq. (6) é nula, de acordo com a Eq. (4) e a Eq. (5).

A Equação (6) é a base do método para avançar ϕ ao longo do tempo. Assuma que ϕ é conhecida no tempo $k\Delta t$, ϕ^k , e que desejamos determinar ϕ^{k+1} . Dado qualquer ponto $(x, y) \in [0, L] \times [0, L]$, resolvemos a Eq. (5) retrocedendo no tempo a fim de determinar (x^*, y^*, t^*) conhecendo previamente o ponto final

$$(S_1((k+1)\Delta t), S_2((k+1)\Delta t)) = (x, y),$$

assumindo que $t^* = k\Delta t$. Da Equação (6), obtemos

$$\phi^{k+1}(x, y) = \phi(x, y, (k+1)\Delta t) = \phi(x^*, y^*, k\Delta t) = \phi^k(x^*, y^*). \quad (7)$$

Este é o esquema semi-Lagrangeano para a Eq. (4).

Dado (x_i, y_j) e Δt , um procedimento iterativo é usado para determinar (x^*, y^*) , de acordo com a Eq. (5),

$$x_{r+1}^* = x_i - \Delta t u \left(\frac{x_i + x_r^*}{2}, \frac{y_j + y_r^*}{2} \right) \quad (8)$$

$$y_{r+1}^* = y_j - \Delta t v \left(\frac{x_i + x_r^*}{2}, \frac{y_j + y_r^*}{2} \right)$$

onde r é o contador de iterações, $r = 0, 1, 2, \dots$, e nós o repetimos até obtermos a convergência. O valor da inicialização pode ser $(x_0^*, y_0^*) = (x_i, y_j)$.

Os valores de u and v são conhecidos somente nos pontos da grade (ih, jh) , $i, j = 0, 1, \dots, N$, que correspondem às arestas das células quadradas. Nós calculamos (u, v) em outros pontos através de uma aproximação quase-linear. Como precisamos calcular (u, v) em (x^ξ, y^ξ) nós o localizamos dentro do quadrado de vértices (x_i, y_j) , (x_{i+1}, y_j) , (x_i, y_{j+1}) , (x_{i+1}, y_{j+1}) , e consideramos

$$u(x^\xi, y^\xi) \approx \left(1 - \frac{y^\xi - y_j}{h}\right) \left[\left(1 - \frac{x^\xi - x_i}{h}\right) u_{i,j} + \frac{x^\xi - x_i}{h} u_{i+1,j} \right] + \frac{y^\xi - y_j}{h} \left[\left(1 - \frac{x^\xi - x_i}{h}\right) u_{i,j+1} + \frac{x^\xi - x_i}{h} u_{i+1,j+1} \right]. \quad (9)$$

Veja a Fig. 2. Uma aproximação análoga para $v(x^\xi, y^\xi)$ é considerada. É suficiente, substituir u por v na Eq. (9).

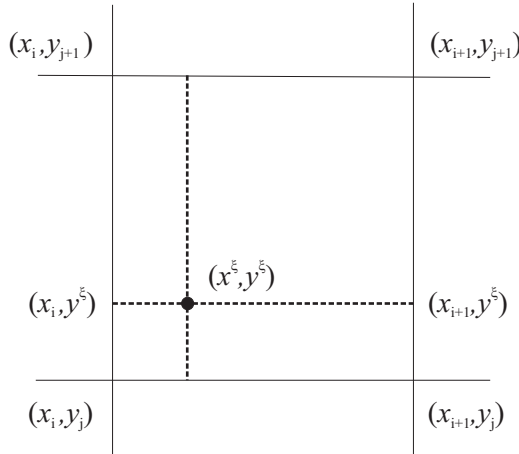


Figura 2: Interpolação do campo de velocidades (u, v) . O valor de (u, v) em (x_i, y_j) e (x_{i+1}, y_j) são usados para a interpolação linear em (x^ξ, y_j) . Analogamente, obtemos os valores em (x^ξ, y_{j+1}) , usando os valores em (x_i, y_{j+1}) e (x_{i+1}, y_{j+1}) . Finalmente, estes valores são linearmente interpolados em y .

A fim de melhorar a aproximação de ϕ , o valor usado no lado direito da Eq. (7) é calculado através de um aproximação quase-cubica que é determinada da seguinte maneira. Fazemos uma interpolação linear de ϕ em x quando $y = y_{j-1}$, uma interpolação cúbica de ϕ em x quando $y = y_j$, uma interpolação cúbica de ϕ em x quando $y = y_{j+1}$ e uma interpolação linear em x quando $y = y_{j+2}$. Para finalizar, fazemos uma interpolação em y com estes quatro pontos interpolados.

4. Formulação do problema de Saffman-Taylor

Considere um meio poroso consolidado, inicialmente saturado por dois fluidos imiscíveis, F_1 and F_2 , no qual a interface entre eles é conhecida. Suponha que o fluido deslocado F_2 move-se dentro do meio poroso devido a ação do fluido deslocante F_1 . Tal situação é ilustrada, por exemplo, na Fig. 3 onde o deslocamento é horizontal da esquerda para a direita.

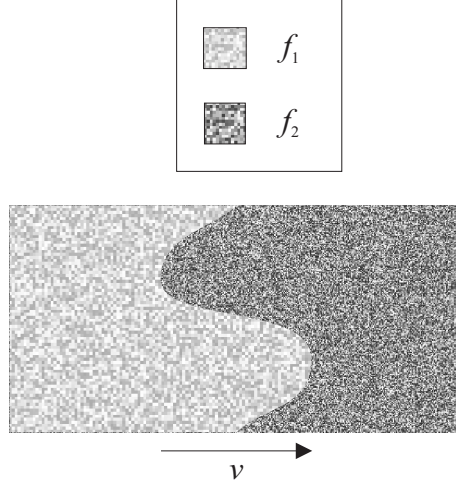


Figura 3: Meio poroso saturado por dois fluidos imiscíveis, F_1 e F_2 , que movem-se horizontalmente com velocidade v .

Seja Ω_1 e Ω_2 as subregiões do meio poroso saturado, respectivamente, pelos fluidos F_1 e F_2 . Para completar, denotamos por Γ a interface entre eles, representando-a, desta vez, como um gráfico de funções,

$$\Gamma(t) = \{(\gamma(y, z, t), y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \text{ and } t \geq 0. \quad (10)$$

Assim, a camada porosa, Ω , saturada pelos dois fluidos, satisfaz a decomposição $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$.

Desprezando os efeitos gravitacionais e a pressão capilar, introduzimos o modelo matemático para o problema de Saffman-Taylor dado pelo seguinte sistema de equação adimensionais: para $\mathbf{x} \in \Omega_1$,

$$\mathbf{u}_1 = -\varepsilon_1 \nabla p_1 \quad (11)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0; \quad (12)$$

para $\mathbf{x} \in \Omega_2$,

$$\mathbf{u}_2 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \nabla p_2 \quad (13)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0; \quad (14)$$

com condições de interface

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (15)$$

e

$$(p_1 - p_2)|_{\Gamma} = 0; \quad (16)$$

e condições de fronteira

$$\mathbf{u}_1 \longrightarrow \mathbf{e}_1 \quad \text{when } x \longrightarrow -\infty \quad (17)$$

e

$$\mathbf{u}_2 \longrightarrow \mathbf{e}_1 \quad \text{when } x \longrightarrow +\infty. \quad (18)$$

Aqui, \mathbf{u}_κ e p_κ ($\kappa = 1, 2$) são, respectivamente, a velocidade de Darcy e a pressão do fluido F_κ . Estas variáveis são quantidades adimensionais, assim como, os parâmetros $\varepsilon_1 = K/L^2$, onde L é um comprimento característico típico do meio poroso, K é o tensor de permeabilidades e $\varepsilon_2 = \mu_1/\mu_2$, a razão viscosa entre os fluidos F_1 e F_2 .

As Equações (11) e (13) representam as equações de momento nas regiões Ω_1 e Ω_2 , respectivamente. Além disso, a Eq. (12) e a Eq. (14) são balanços de massa em cada região, para dois fluidos incompressíveis.

5. Condição de instabilidade

Uma análise de estabilidade linear é realizada no problema de Saffman-Taylor a fim de obter um a condição de instabilidade. Esta análise inicia-se com a seleção de uma solução de onda plana do problema e que corresponde ao estado base da análise de estabilidade. Neste estágio, o primeiro componente da interface é dado por

$$\gamma(t) = \gamma_0 t,$$

para uma constante γ_0 .

Uma família de perturbações trigonométricas, parametrizadas por $\epsilon \in \mathbb{R}$,

$$\Gamma^\epsilon(t) = \{(\gamma^\epsilon(y, z, t), y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \text{ for } t \geq 0,$$

são introduzidas na interface.

Finalmente, procuramos por soluções da forma

$$\gamma'(y, z, t) = e^{i(\xi_2 y + \xi_3 z)} e^{-\beta t}, \quad (19)$$

$$p'_1(\mathbf{x}, t) = a_1 e^{i(\xi_2 y + \xi_3 z)} e^{\alpha(x - u_\infty t)} e^{-\beta t}$$

e

$$p'_2(\mathbf{x}, t) = a_2 e^{i(\xi_2 y + \xi_3 z)} e^{-\alpha(x - u_\infty t)} e^{-\beta t},$$

no sistema de equações para as perturbações, que resulta na seguinte expressão para β

$$\beta = \alpha \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \quad (20)$$

Assim, quando β assume valores estritamente negativos, significa que a perturbação inicialmente aplicada à interface cresce exponencialmente com o tempo, veja a Eq. (19). Isto caracteriza uma evolução instável da interface entre os dois fluidos. Por outro lado, o deslocamento do fronte é dito estável quando β assume valores positivos, uma vez que a perturbação introduzida inicialmente na interface desaparece com o passar do tempo.

Note que α é considerada estritamente positiva, assim como as viscosidades. Portanto, a evolução do fronte é instável quando $\mu_1 < \mu_2$, ou $\varepsilon_2 < 1$, como se pode ver na Eq. (20). Portanto, quando o fluido deslocante é menos viscoso do que o fluido deslocado, a interface entre eles evolui de forma instável.

6. Simulações

Agora, mostramos os resultados das simulações da instabilidade de Saffman-Taylor, usando o método SLCN. Nestas simulações o campo de velocidades foi determinado por um método iterativo baseado em grafos (Gonçalves e Moura Neto, 2005) indicado para a resolução de uma classe de problemas que podem ser reduzidos a forma linear das equações fundamentais de equilíbrio (Strang, 1988).

Os resultados que são apresentados correspondem a razão viscosa igual a 0.5. A permeabilidade usada é 10^{-11} m^2 . O experimento consiste de uma injeção constante na direção normal à face esquerda da camada porosa com intensidade igual a 10^{-7} m/s , e recuperação na face direita com a mesma direção e intensidade. Ressaltamos que a escala de tempo considerada é equivalente a um tempo da ordem de 10^7 s .

A seqüência de figuras, da Fig. 4 à Fig. 7, mostra os resultados obtidos nas simulações da interface plana modificada pelas perturbações trigonométricas de baixa amplitude, com números de onda ímpares variando de 1 a 7, centradas em relação ao eixo y . Isto é, as perturbações iniciais são da forma

$$\gamma^\epsilon(y, 0) = \gamma_0(y) + \epsilon \cos(2\pi\lambda y)$$

onde λ , o número de onda, assume os valores $\lambda = 1, 3, 5, 7$, e $\gamma_0(y)$, a interface não perturbada é dada por $\gamma_0(y) = 1/4$ e $\epsilon = 1/64$. Estas figuras exibem a evolução instável do fronte e correspondem ao problema de injeção com razão de viscosidade $\varepsilon_2 = 0.5$.

A Figura 8 compara a variação de amplitude das perturbações trigonométricas para os primeiros cinco números de onda do problema instável, baseado na análise de estabilidade linear e na evolução não-linear determinada pelo ferramental numérico proposto, usando uma grade de 65×129 nós. Aqui, a variação de amplitude é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da função γ , em um tempo fixo. Todos os resultados mostrados nesta figura correspondem a solução do tempo inicial ao tempo adimensional 0.25. De acordo com as perturbações inicialmente introduzidas na interface, a variação de amplitude, na abordagem linear, é igual à $2\epsilon \exp(2\pi\lambda t/3)$. Note que a variação de amplitude cresce, claramente, tanto na abordagem linear quanto na não-linear, especialmente para números de onda maiores do que 4. Excepcionalmente, para $\lambda = 1$, onde o caso linear apresenta uma taxa de crescimento da variação de amplitude muito

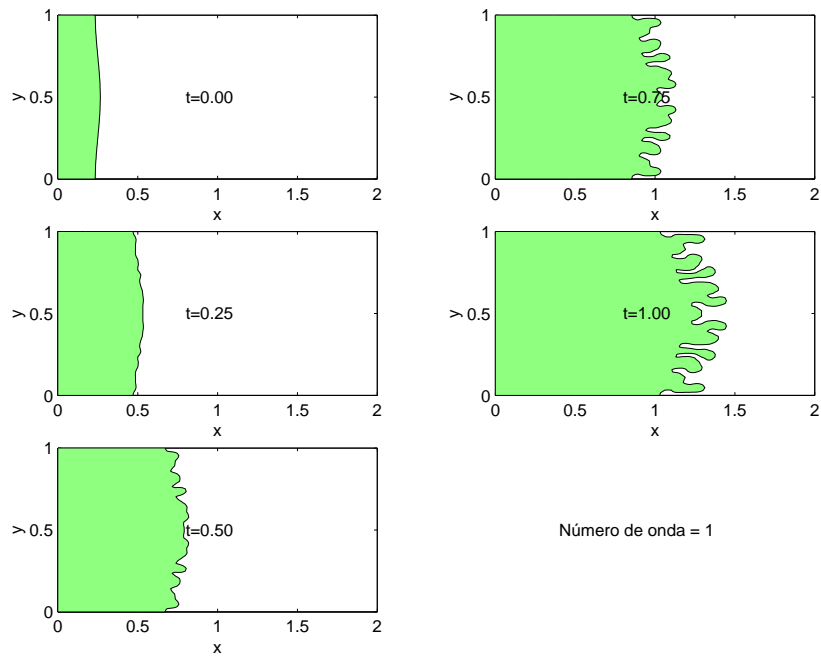


Figura 4: O perfil da evolução da interface sujeita a uma perturbação trigonométrica inicial de comprimento de onda 1, associado ao problema de injeção com razão viscosa $\varepsilon_3 = 0.5$.

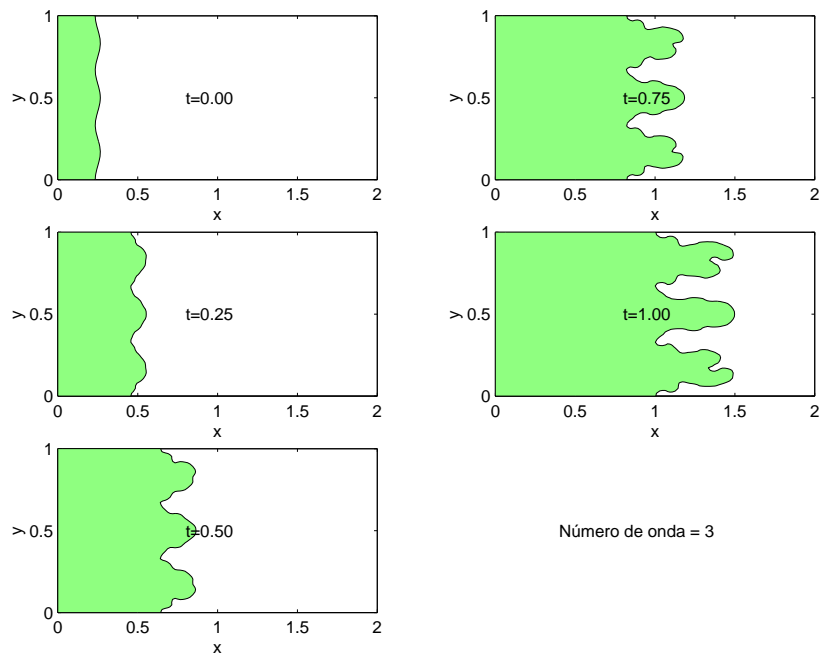


Figura 5: O perfil da evolução da interface sujeita a uma perturbação trigonométrica inicial de comprimento de onda 1/3, associado ao problema de injeção com razão viscosa $\varepsilon_3 = 0.5$.

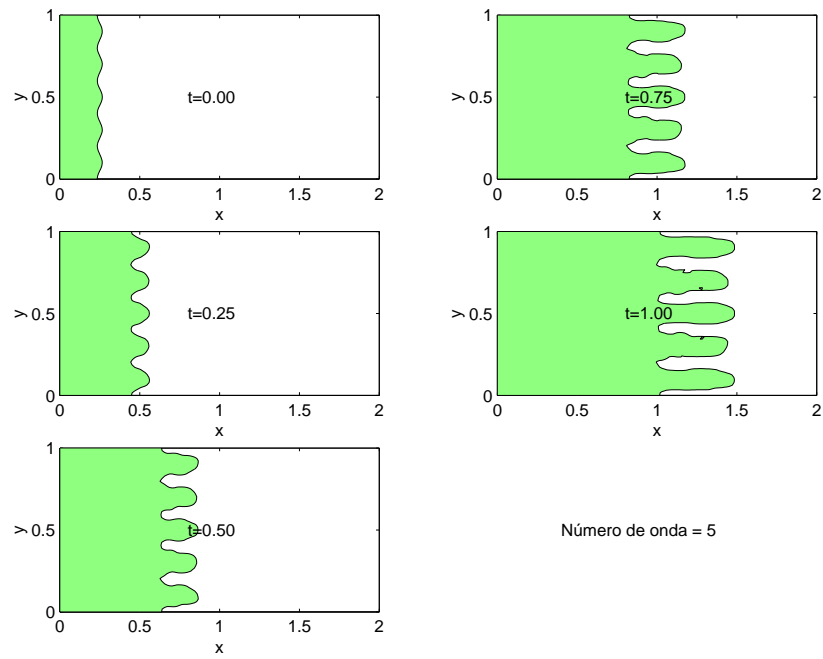


Figura 6: O perfil da evolução da interface sujeita a uma perturbação trigonométrica inicial de comprimento de onda $1/5$, associado ao problema de injeção com razão viscosa $\varepsilon_3 = 0.5$.

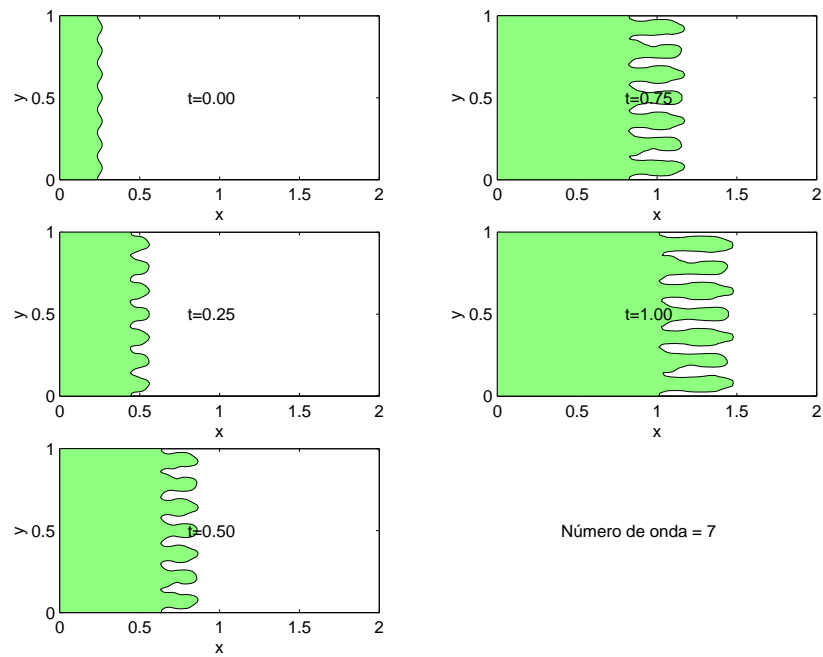


Figura 7: O perfil da evolução da interface sujeita a uma perturbação trigonométrica inicial de comprimento de onda $1/7$, associado ao problema de injeção com razão viscosa $\varepsilon_3 = 0.5$.

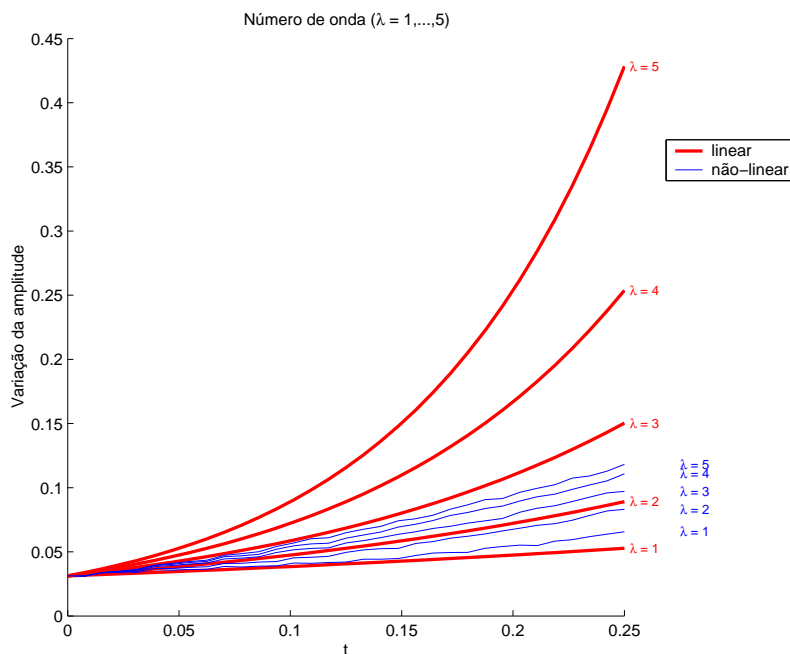


Figura 8: Gráfico da variação de amplitude.

maior. Note também que quanto maior é a frequência da perturbação introduzida, maior é a variação de sua amplitude, com o passar do tempo.

Concluimos que o método SLCN é uma ferramenta numérica que pode ser aplicada ao estudo do problema de Saffman-Taylor e é capaz de capturar as instabilidades da interface, como previsto pela análise de estabilidade linear, mostrando padrões geométricos complexos.

As discrepâncias entre as abordagens linear e não-linear no que se refere a variação de amplitude, como ilustrado na Fig. 8, são atribuídas aos efeitos não-lineares da evolução da interface.

7. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação Carlos Chagas de Apoio à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) durante a realização deste trabalho.

8. Referências

- Aldushin, A. P. and Matkowsky, B. J., 1998, Instabilities, fingering and the Saffman-Taylor problem in filtration combustion, “Combustion Science and Technology”, Vol. 133, No. 4-6, pp. 293–341.
- Carasso, C. and Pasa, G., 1998, An optimal viscosity profile in the secondary oil recovery, “RAIRO - Mathematical Modelling and Numerical Analysis”, Vol. 32, No. 2, pp. 211–221.
- Douglas Jr., J., Paes Leme, P. J., Roberts, J. E., and Wang, J., 1993, A parallel iterative procedure applicable to the approximate solution of second order partial differential equations by mixed finite element methods, “Numer. Math.”, Vol. 65, pp. 95–108.
- Gonçalves, F. and Moura Neto, F. D., 2005, An Iterative Parallel Algorithm for Linear Systems Defined on Graphs, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, submitted in 2005.
- Gonçalves, F., Moura Neto, F. D., and Carmona, M. M., 2006, Interfaces in porous medium captured by level set methods, *Journal of Porous Media*, in pressing.
- Min, C. H., 2004, Local level set method in high dimension and codimension, “Journal of Computational Physics”, Vol. 200, No. 1, pp. 368–382.
- Osher, S. and Sethian, J. A., 1988, Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation, “J. Comp. Physics”, Vol. 78, pp. 12–49.
- Pasa, G., 2002, A new optimal growth constant for the Hele-Shaw instability, “Transport in Porous Media”, Vol. 49, No. 1, pp. 27–40.
- Pasa, G. and Titaud, O., 2005, A class of viscosity profiles for oil displacement in porous media or Hele-Shaw cell, “Transport in Porous Media”, Vol. 58, No. 3, pp. 269–286.

- Saffman, P. G. and Taylor, G., 1958, The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shall cell containing a more viscous liquid, “Proceedings of the Royal Society of London”, Vol. 245 of “A, Mathematical and Physical Sciences”, pp. 312–329. The Royal Society.
- Strain, J., 1999, Semi-Lagrangian methods for level set equations, “Journal of Computational Physics”, Vol. 151, No. 2, pp. 498–533.
- Strang, G., 1988, A framework for equilibrium equations, “SIAM Rev”, Vol. 30, No. 2, pp. 283–297.

STUDY OF SAFFMAN-TAYLOR INSTABILITY THROUGH THE SEMI-LAGRANGIAN LEVEL SET METHOD

Fábio Gonçalves*

Francisco Duarte Moura Neto†

Instituto Politécnico

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

C. P. 97282 – 28601-970

Nova Friburgo, RJ.

*fgoncalves@iprj.uerj.br

†fmoura@iprj.uerj.br

Abstract. *In this work we apply the level set method with a semi-Lagrangian implementation, called by semi-Lagrangian level set method (SLLSM), in a study that deals with flows inside an isotropic porous medium, presenting a typical viscous instability problem known as Saffman-Taylor instability. This study involves the introduction of trigonometric perturbations with low amplitudes to the interface between the fluids, a linear stability analysis and its non linear evolution. At last, the amplitude variations of the applied trigonometric perturbations, considering different wave numbers, are analysed in the linear and non linear approaches. .*

Keywords: *Level set method, semi-Lagrangian method, Saffman-Taylor instability, incompressible fluid, porous medium.*