

## PROBLEMA INVERSO DE DIFUSÃO DE MASSA – ESTIMAÇÃO DA DIFUSIVIDADE MÁSSICA DO TOMATE CEREJA (*Lycopersicon esculentum* var. *cerasiforme*)

**Cristiane Kelly Ferreira da Silva**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[criskfsilva@yahoo.com.br](mailto:criskfsilva@yahoo.com.br)

**Zaqueu Ernesto da Silva**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[zaqueu@les.ufpb.br](mailto:zaqueu@les.ufpb.br)

**Manuella Pereira de Andrade**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[andrademanuella@yahoo.fr](mailto:andrademanuella@yahoo.fr)

**Mirtes Aparecida da Conceição Silva**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[mirtesacs@yahoo.com.br](mailto:mirtesacs@yahoo.com.br)

**José Pereira Alencar Júnior**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[jpereira1503@gmail.com](mailto:jpereira1503@gmail.com)

**Resumo:** Este artigo apresenta a solução de um problema inverso de estimação de parâmetros pertinentes a um modelo matemático que envolve transferência de massa em um processo de desidratação osmótica de hortaliças, particularmente, o tomate cereja (*Lycopersicon esculentum* var. *cerasiforme*). O objetivo é identificar a umidade de equilíbrio ( $Y_{eq}$ ) e difusividade efetiva da água ( $D_{ef}$ ). Utilizando a 2ª Lei de Fick na equação do balanço de massa de água no interior do produto e resolvendo o sistema de equações através de técnica analítica, obteve-se a distribuição transiente de umidade do produto, que serve para determinar a difusão de massa em qualquer ponto do meio. A análise dos coeficientes de sensibilidade da umidade aos parâmetros ( $D_{ef}$ ) e ( $Y_{eq}$ ) mostrou uma correlação de não linearidade entre os mesmos, tornando possível uma estimação simultânea dos dois parâmetros. O problema de estimação de parâmetros foi resolvido através da minimização da norma dos mínimos quadrados ordinários utilizando o algoritmo de minimização de Levenberg-Marquardt. Os resultados obtidos através da solução do problema inverso para as soluções de NaCl (10% e 25% p/p) e NaCl-Sacarose (25% p/p) foram  $1,212 \times 10^{-9} \pm 1,699 \times 10^{-12}$  m<sup>2</sup>/s,  $2,963 \pm 2,374 \times 10^{-3}$  kg H<sub>2</sub>O/kg massa seca,  $1,772 \times 10^{-9} \pm 2,039 \times 10^{-12}$  m<sup>2</sup>/s,  $2,602 \pm 1,405 \times 10^{-3}$  kg H<sub>2</sub>O/kg massa seca e  $1,362 \times 10^{-9} \pm 2,426 \times 10^{-12}$  m<sup>2</sup>/s,  $4,063 \pm 2,679 \times 10^{-3}$  kg H<sub>2</sub>O/kg massa seca, respectivamente.

**Palavras-chave:** Modelagem matemática, desidratação osmótica, tomate cereja, transferência de massa, estimação de parâmetros.

### 1-INTRODUÇÃO

O tomate cereja (*Lycopersicon esculentum* var. *cerasiforme*) é considerado a forma mais primitiva desta hortaliça. Ele é de forma geométrica bem definida, praticamente uma esfera, de tamanho reduzido, cerca de 2 a 2,5 cm de diâmetro. Pesquisadores acreditam que a partir dele é que foram sendo alteradas as variedades, chegando às diversas que atualmente são cultivadas, seja para mesa ou para industrialização.

Esta hortaliça se caracteriza por seu alto teor de umidade, sendo considerado um produto altamente perecível. Por isso, pesquisadores têm buscado alternativas que possibilitem a industrialização deste produto e a redução de altos índices de desperdício.

A busca de alternativas que reduzam o consumo de energia é uma constante em todas as áreas. Na secagem de frutas e hortaliças, a preocupação em se obter produtos de boa qualidade tem levado muitos pesquisadores (Gaspareto et al., 2004; Neto et al., 2005; Park et al., 2001) a utilizar como pré-tratamento a desidratação osmótica. Segundo Ramalho et al., 2004, em poucas palavras, a desidratação osmótica é uma técnica usada para remoção parcial de água quando alimentos são imersos em uma solução hipertônica. Durante o processo, ocorrem dois fluxos contrários: um fluxo de água que sai do alimento para a solução e uma transferência do soluto da solução para o alimento.

Este processo pode reduzir até 50% o conteúdo de umidade do produto, diminuindo o tempo de secagem e, conseqüentemente, o consumo de energia e melhorando a qualidade do produto final (Gaspareto et al., 2004).

A difusividade efetiva e a umidade de equilíbrio são parâmetros importantes nas análises, projeções e otimizações de processos de desidratação osmótica. A estimação dos parâmetros pode ser feita através dos Métodos Diretos ou Métodos Inversos.

- ✓ Método Direto: estes métodos consistem em projetar uma experiência de maneira que os valores medidos possam ser expressos através de uma função matemática. A função matemática deve expressar as propriedades diretamente em termos das medidas realizadas. Assim, cada experiência permitirá o cálculo de um único valor do parâmetro.
- ✓ Método Inverso: a utilização deste método é mais vantajosa do que a utilização do direto, pois permite estimar o maior número possível de parâmetros a partir de uma simples experiência, aumentar a precisão, combinar várias experiências para estimar os mesmos parâmetros e determinar os limites de confiança (Beck e Arnold, 1977).

O propósito deste trabalho é analisar o processo de desidratação osmótica do tomate cereja, abordando os temas modelagem e estimação dos parâmetros através do paradigma referido como “Método Inverso”, em particular a difusividade efetiva e a umidade de equilíbrio.

## 2- MODELAGEM MATEMÁTICA

### 2.1-Problema Direto - Solução Analítica da Equação de Difusão de Massa

A aplicação da teoria da transferência de massa por difusão permite o desenvolvimento de um modelo matemático que reproduza da forma mais adequada possível o comportamento que determinados alimentos assumem quando submetidos ao processo de desidratação osmótica.

Vários autores (Matusek and Merész, 2003; Chenlo et al., 2005) têm estudado a desidratação osmótica, através da Segunda Lei de Fick, segundo a qual o fluxo de massa é proporcional ao gradiente de concentração entre o sólido e a solução.

Utilizando a 2ª Lei de Fick, na equação do balanço de massa de água no interior do produto, obtemos:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \nabla \left( D_{ef} \nabla Y \right) \quad (2.1)$$

Onde Y: conteúdo de umidade no tempo (kg H<sub>2</sub>O/kg massa seca)

D<sub>ef</sub>: difusividade efetiva da água (m<sup>2</sup>/s)

t: tempo (s)

Em sistemas de coordenadas esféricas, a equação de difusão é expressa como:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D_{ef} \frac{\partial Y}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D_{ef} \text{sen} \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{D_{ef}}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} + \dot{n} \quad (2.2)$$

Assumindo regime não estacionário, sem geração de massa dentro do sólido e forma geométrica de uma esfera de raio r<sub>1</sub>, onde a transferência de umidade durante a desidratação osmótica é predominantemente unidirecional e considerando D<sub>ef</sub> constante, a Eq.(2.2) se reduz a:

$$\frac{1}{D_{ef}} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 Y_r(r, t)}{\partial r^2}, \text{ na região } 0 < r < r_1 \text{ e } t > 0 \quad (2.3)$$

Onde a umidade Y deve obedecer as seguintes condições inicial e de contorno:

$$\frac{\partial Y(0, t)}{\partial r} = 0, \text{ em } r = 0 \text{ e } t > 0 \quad (2.4)$$

$$Y(r_1, t) = Y_{eq}, \text{ em } r = r_1 \text{ e } t > 0 \quad (2.5)$$

$$Y(r, 0) = Y_0, \text{ na região } 0 < r < r_1 \text{ e } t = 0 \quad (2.6)$$

Desprezando as resistências externas à transferência de massa e o encolhimento do produto durante a desidratação osmótica e aplicando as condições inicial e de contorno, a solução analítica da Eq.(2.3) pode ser obtida pelo método da Separação de Variáveis. Assim, a solução em termos do adimensional de umidade é dada pela seguinte equação:

$$\frac{Y - Y_{eq}}{Y_0 - Y_{eq}} = \frac{6}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 p^2 D_{ef} \frac{t}{r_1^2}} \quad (2.7)$$

Onde:

Y: conteúdo de umidade no tempo (kg H<sub>2</sub>O/kg massa seca)

Y<sub>0</sub>: conteúdo de umidade inicial (kg H<sub>2</sub>O/kg massa seca)

Y<sub>eq</sub>: conteúdo de umidade de equilíbrio (kg H<sub>2</sub>O/kg massa seca)

D<sub>ef</sub>: difusividade efetiva da água (m<sup>2</sup>/s)

t: tempo (s)

r<sub>1</sub>: raio médio da amostra (m)

Portanto, para o cálculo da distribuição transiente de umidade a Eq.(2.7) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Y = Y_{eq} + (Y_0 - Y_{eq}) \frac{6}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 p^2 D_{ef} \frac{t}{r_1^2}} \quad (2.8)$$

## 2.2-Análise de Sensibilidade

O estudo dos coeficientes de sensibilidade da umidade aos parâmetros deve ser realizado para se verificar a existência de solução do problema inverso de estimação de parâmetros no que concerne à determinação do número de parâmetros que podem ser estimados a partir de uma única experiência. Verifica-se que a distribuição de umidade tem a seguinte dependência funcional:

$$Y = Y(r, t, Y_0, Y_{eq}, D_{ef}) \quad (2.9)$$

Um coeficiente de sensibilidade é a primeira derivada da variável medida em relação ao parâmetro desconhecido. Sendo  $Y(r, t, \mathbf{m}, \mathbf{b})$  uma variável de estado,  $r_i = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  uma variável espacial, t o tempo,  $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_q)$  os parâmetros conhecidos e  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p)$  os parâmetros desconhecidos. O coeficiente de sensibilidade no ponto r<sub>i</sub>, no tempo t<sub>n</sub> para o parâmetro β<sub>j</sub> é:

$$X_j(r_i, t_n, \mathbf{m}, \mathbf{b}) = \left. \frac{\partial Y(r, t, \mathbf{m}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}_j} \right)_{r_i, t_n} = X_j)_{i,n} \quad (2.10)$$

Os coeficientes de sensibilidade representam a variação da variável de estado devido a uma mudança no valor do parâmetro desconhecido. Ele exprime também como o modelo reage a uma pequena perturbação dos parâmetros e permite medir a importância deste efeito sobre o comportamento da variável em estudo (Beck e Arnold, 1977).

## 2.3-Problema Inverso

Os métodos de estimação de parâmetros envolvem várias técnicas de aproximação. Um critério de aproximação é uma função quadrática composta por uma ou duas funções objetivas mais uma função Bayesiana.

$$S(\mathbf{b}) = [Z - Y(\mathbf{b})]^T W [Z - Y(\mathbf{b})] + [\mathbf{m} - \mathbf{b}]^T U [\mathbf{m} - \mathbf{b}] \quad (2.11)$$

Onde Z(n×1) é o vetor de medidas, W(n×n) e U(p×p) são matrizes que dependem do tipo de estimador. Para os Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) W=I e U=0.

Existem muitos métodos para a minimização ou maximização de uma função não linear. A escolha depende do número de parâmetros a ser estimado e até certo ponto da estrutura do critério. Para os problemas não lineares, o Método de Gauss-Newton é o mais apropriado dos métodos quando o número de parâmetros desconhecidos não é grande.

Para os problemas não lineares, do ponto de vista de estimação de parâmetros,  $X = X(\mathbf{b})$ , um procedimento iterativo deve ser usado. Com o sobrescrito k como contador da iteração, a equação é dada por:

$$\mathbf{b}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)} + \left[ \mathbf{X}^{T(k)} \mathbf{W} \mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{U} \right]^{-1} \left[ \mathbf{X}^{T(k)} \mathbf{W} (\mathbf{Z} - \mathbf{Y}^{(k)}) + \mathbf{U} (\mathbf{m} - \mathbf{b}^{(k)}) \right] \quad (2.12)$$

O procedimento iterativo começa com um chute inicial,  $\mathbf{b}^{(0)}$ , em cada passo o vetor  $\mathbf{b}$  é modificado até:

$$\frac{|\mathbf{b}_i^{(k+1)} - \mathbf{b}_i^{(k)}|}{|\mathbf{b}_i^{(k)}| + \mathbf{x}} < \mathbf{d}, \text{ para } i= 1, 2, \dots, p \quad (2.13)$$

Onde  $\mathbf{d}$  é um número pequeno tal como  $10^{-3}$  que representa o erro relativo de convergência e  $\mathbf{x}$  ( $< 10^{-10}$ ) permite evitar a situação onde  $\mathbf{b}_i^{(k)} = 0$

### 3-RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### 3.1-Problema Direto

O problema direto foi resolvido para se determinar a distribuição transiente do conteúdo de umidade do tomate cereja submetido ao processo de desidratação osmótica. Os dados experimentais foram obtidos através da leitura dos gráficos da perda de água da experiência realizada por Azoubel et al (2004). Os valores numéricos associados aos parâmetros necessários à solução do modelo são:

Produto: tomate cereja

$r_1 = 1,4 \text{ e}^{-2} \text{ m}$ , raio médio do produto

$Y_0 = 15,66 \text{ kg água /kg massa seca}$ , conteúdo de umidade inicial do produto

$Y_{eq} = 2,96 \text{ kg água /kg massa seca}$  e  $D_{ef} = 1,21 \text{ e}^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ , conteúdo de umidade de equilíbrio e difusividade efetiva da água do produto para a solução NaCl 10%, respectivamente

$Y_{eq} = 2,60 \text{ kg água /kg massa seca}$  e  $D_{ef} = 1,77 \text{ e}^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ , conteúdo de umidade de equilíbrio e difusividade efetiva da água do produto para a solução NaCl 25%, respectivamente

$Y_{eq} = 4,06 \text{ kg água /kg massa seca}$  e  $D_{ef} = 1,36 \text{ e}^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ , conteúdo de umidade de equilíbrio e difusividade efetiva da água do produto para a solução NaCl-Sacarose 25%, respectivamente.

$t = 72000 \text{ s}$ , tempo total da experiência.

Na Fig (3.1) encontra-se a evolução transiente da distribuição do conteúdo de umidade para as três soluções osmóticas obtida a partir da Eq. (2.8). Observa-se que em todas as curvas ocorre a diminuição da umidade mais intensamente nas primeiras horas do processo de desidratação osmótica e mais rapidamente com o aumento da concentração da solução de NaCl, esse resultado é semelhante ao obtido por (Mata et al., 2003 e Igarashi et al., 2000). O acréscimo do NaCl à solução faz com que ocorra um aumento na pressão osmótica, considerando a conhecida capacidade de diminuir a atividade de água que o NaCl possui. Pode-se ver ainda que a adição da sacarose à solução causa uma dificuldade na transferência do conteúdo de umidade, o que pode ser explicado pelo fato da sacarose formar uma película na superfície do produto. O comportamento das três curvas obtidas mostra a possibilidade de consistência do modelo em representar o processo de desidratação osmótica.

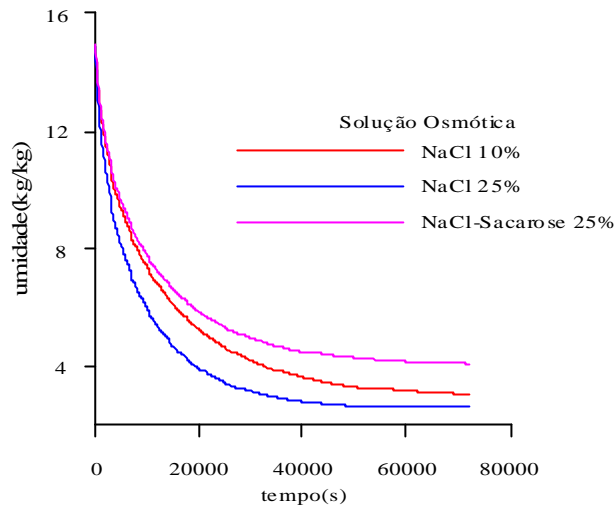


Figura 3.1: Evolução transiente da distribuição do conteúdo de umidade obtida pelo modelo matemático para as soluções de NaCl 10%, NaCl 25% e NaCl-Sacarose 25%

### 3.2-Análise de Identificabilidade

A primeira análise trata de identificar qual a melhor composição de solução que permitirá determinar de maneira mais favorável, ou seja, maior sensibilidade aos parâmetros desconhecidos quando da realização da experiência de desidratação osmótica.

Neste trabalho os coeficientes de sensibilidade são avaliados para o conteúdo de umidade de equilíbrio do produto e para a difusividade efetiva da água.

#### 3.2.1-Sensibilidade à Umidade de Equilíbrio

Na Fig (3.2) observa-se que os coeficientes de sensibilidade ao conteúdo de umidade no equilíbrio evoluem de modo crescente com o tempo até atingir uma estabilidade. As curvas indicam que a variação dos coeficientes é mais significativa quando a experiência é feita utilizando o sistema combinado de NaCl-Sacarose, onde o valor máximo do coeficiente de sensibilidade é alcançado. Isto está de acordo com o fenômeno físico, pois a adição da sacarose à solução dificulta a transferência de massa e o valor do conteúdo de umidade no equilíbrio obtido é mais elevado. Assim, a estimação deste parâmetro,  $Y_{eq}$ , será mais eficiente quando a experiência for feita com soluções mais concentradas de NaCl, onde o valor do conteúdo de umidade de equilíbrio atingido é pequeno.

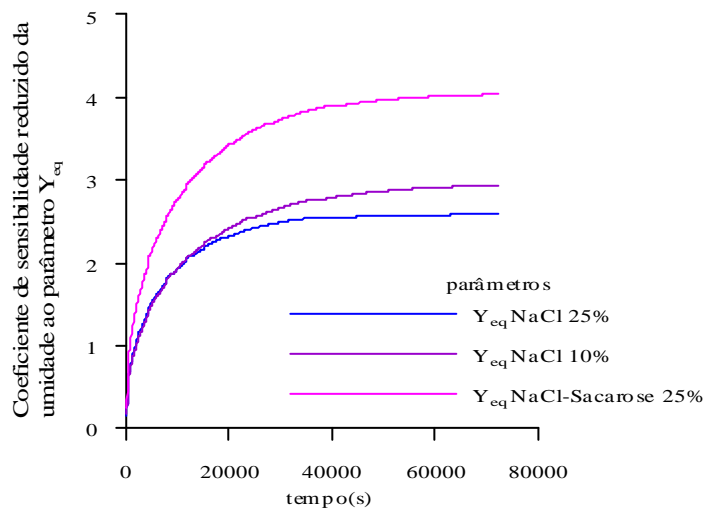


Figura 3.2: Evolução temporal dos coeficientes de sensibilidade da umidade ao conteúdo de umidade de equilíbrio, de acordo com a composição da solução

### 3.2.2-Sensibilidade à Difusividade Efetiva da Água

A evolução temporal dos coeficientes de sensibilidade à difusividade efetiva da água,  $D_{ef}$ , com o tempo pode ser verificada na Fig (3.3). Observa-se que os valores dos coeficientes de sensibilidade têm inicialmente uma evolução decrescente e negativa. Considerando os valores em termos absolutos, observa-se que as curvas têm uma redução dos coeficientes à medida que a desidratação tende ao equilíbrio com o tempo. Quando a experiência é realizada com maiores concentrações de NaCl, esse valor é maior, uma vez que, o incremento do NaCl à solução facilita a transferência de massa e o processo de desidratação ocorre mais rapidamente.

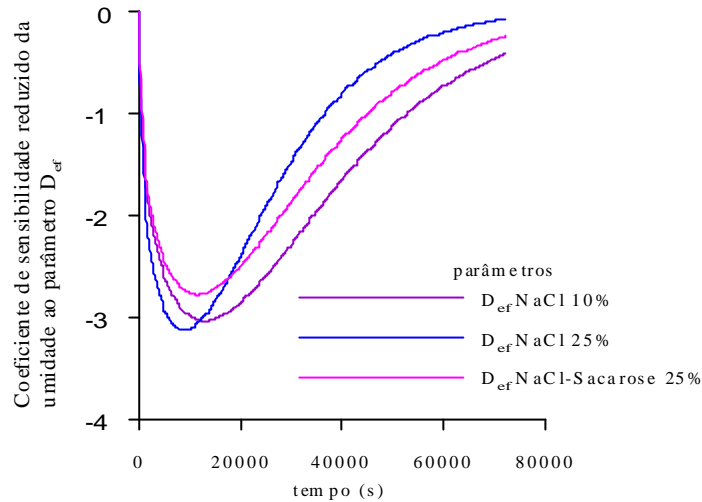


Figura 3.3: Evolução temporal dos coeficientes de sensibilidade da umidade à difusividade efetiva, de acordo com a composição da solução.

### 3.3-Susceptibilidade dos Parâmetros do Modelo à Identificação

Nas Figs (3.4), (3.5) e (3.6) são apresentados respectivamente os coeficientes de sensibilidades reduzidos para os experimentos realizados com soluções de NaCl (10 % p/p), NaCl 25% e NaCl-Sacarose 25%. Através da análise destes coeficientes pode-se concluir se o propósito de estimar simultaneamente os parâmetros  $Y_{eq}$  e  $D_{ef}$  tem chance de ser bem sucedido.

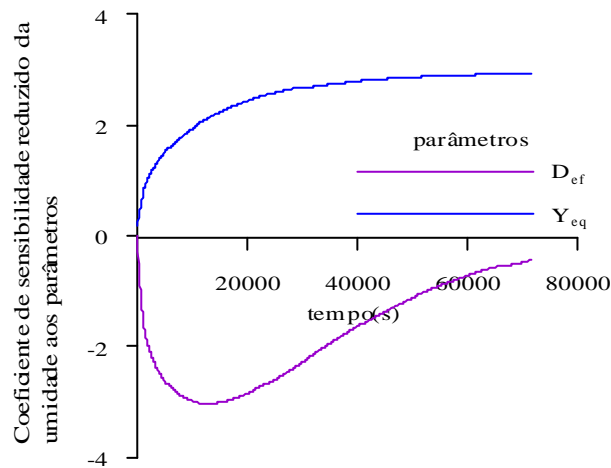


Figura 3.4: Evolução temporal dos coeficientes de sensibilidade da umidade aos parâmetros que influenciam na desidratação osmótica, para a solução de NaCl (10 % p/p)

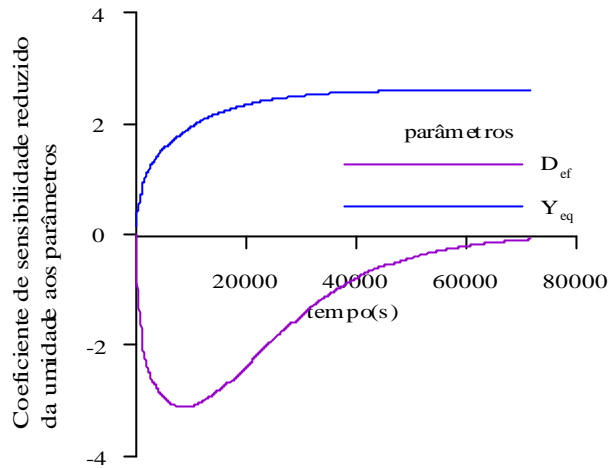


Figura 3.5: Evolução temporal dos coeficientes de sensibilidade da umidade aos parâmetros que influenciam na desidratação osmótica, para a solução de NaCl (25 % p/p)

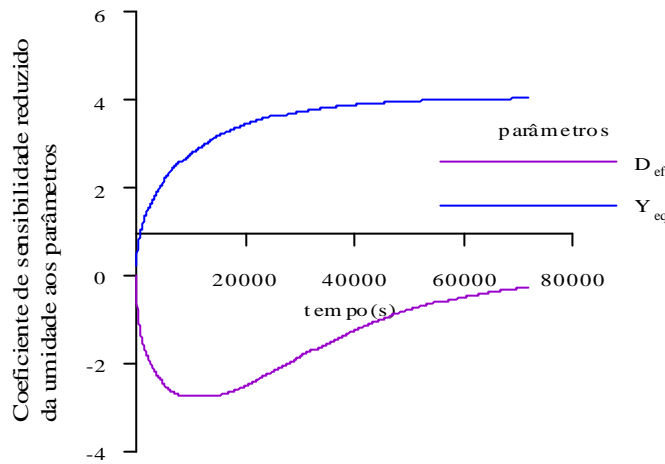


Figura 3.6: Evolução temporal dos coeficientes de sensibilidade da umidade aos parâmetros que influenciam na desidratação osmótica, para a solução de NaCl-Sacarose (25 % p/p)

Observa-se que nos três casos estudados o comportamento das curvas obtidas são idênticos. Verifica-se que os coeficientes são linearmente independentes e, ainda, possuem valores elevados o suficiente, fazendo com que até mesmo pequenas variações nos valores dos parâmetros estimados reflitam respostas no modelo matemático. Assim, pode-se pensar que a estimação simultânea dos mesmos a partir de uma simples experiência é possível.

### 3.4-Estimação de Parâmetros

Um código em linguagem Fortran foi utilizado para o cálculo da difusividade efetiva da água e da umidade de equilíbrio e, o Método de Levenberg-Marquardt Press et al (1992) foi o aplicado para resolver o problema de identificação.

À distribuição de umidade teórica obtida no problema direto, foi acrescido um ruído aditivo, constante, Gaussiano, não correlacionado, de média nula e desvio padrão  $\sigma = 1\%$  para obtenção da distribuição de umidade da experiência simulada para as soluções de NaCl (10% p/p), NaCl (25% p/p) e NaCl-Sacarose (25% p/p).

Os resultados apresentados na Tab.(3.1) mostram que foram obtidos valores estimados muito precisos tanto para a  $D_{ef}$  quanto para a  $Y_{eq}$ .

Tabela 3.1- Resultados da estimação da difusividade efetiva e umidade de equilíbrio do tomate cereja, obtidos através do Método de Levenberg-Marquardt.

Soluções	Parâmetros	Valor Conhecido	Valor Estimado	Incertezas	Ruído
NaCl (10% p/p)	$D_{ef}$ (m <sup>2</sup> /s)	$1,210 \times 10^{-9}$	$1,212 \times 10^{-9}$	$1,699 \times 10^{-12}$	0,01
	$Y_{eq}$ (Kg/kg)	2,96	2,963	$2,374 \times 10^{-3}$	
	$D_{ef}$ (m <sup>2</sup> /s)	$1,210 \times 10^{-9}$	$1,214 \times 10^{-9}$	$3,405 \times 10^{-12}$	0,02
	$Y_{eq}$ (Kg/kg)	2,96	2,965	$4,738 \times 10^{-3}$	
	$D_{ef}$ (m <sup>2</sup> /s)	$1,210 \times 10^{-9}$	$1,217 \times 10^{-9}$	$5,119 \times 10^{-12}$	0,03
	$Y_{eq}$ (Kg/kg)	2,96	2,967	$7,087 \times 10^{-3}$	
NaCl (25% p/p)	$D_{ef}$ (m <sup>2</sup> /s)	$1,770 \times 10^{-9}$	$1,772 \times 10^{-9}$	$2,039 \times 10^{-12}$	0,01
	$Y_{eq}$ (Kg/kg)	2,60	2,602	$1,405 \times 10^{-3}$	
	$D_{ef}$ (m <sup>2</sup> /s)	$1,770 \times 10^{-9}$	$1,775 \times 10^{-9}$	$4,086 \times 10^{-12}$	0,02
	$Y_{eq}$ (Kg/kg)	2,60	2,602	$2,807 \times 10^{-3}$	
	$D_{ef}$ (m <sup>2</sup> /s)	$1,770 \times 10^{-9}$	$1,778 \times 10^{-9}$	$6,144 \times 10^{-12}$	0,03
	$Y_{eq}$ (Kg/kg)	2,60	2,602	$4,205 \times 10^{-3}$	
NaCl-Sacarose (25% p/p)	$D_{ef}$ (m <sup>2</sup> /s)	$1,360 \times 10^{-9}$	$1,362 \times 10^{-9}$	$2,426 \times 10^{-12}$	0,01
	$Y_{eq}$ (Kg/kg)	4,06	4,063	$2,679 \times 10^{-3}$	
	$D_{ef}$ (m <sup>2</sup> /s)	$1,360 \times 10^{-9}$	$1,366 \times 10^{-9}$	$4,865 \times 10^{-12}$	0,02
	$Y_{eq}$ (Kg/kg)	4,06	4,065	$5,347 \times 10^{-3}$	
	$D_{ef}$ (m <sup>2</sup> /s)	$1,360 \times 10^{-9}$	$1,370 \times 10^{-9}$	$7,318 \times 10^{-12}$	0,03
	$Y_{eq}$ (Kg/kg)	4,06	4,066	$7,997 \times 10^{-3}$	

Observa-se que os valores para os parâmetros foram estimados com ruídos variando de 1% a 3%. Verifica-se que as incertezas calculadas para cada valor da  $D_{ef}$  e da  $Y_{eq}$  aumentam com o aumento do ruído, isto é, quanto maior o ruído inserido na experiência, maior é a incerteza, conseqüentemente, menor a confiabilidade do resultado alcançado.

Nas Figs. (3.7) e (3.8) estão as distribuições da umidade com o tempo para a experiência simulada e modelo com os valores da  $D_{ef}$  e  $Y_{eq}$  estimados pelo Método Inverso.

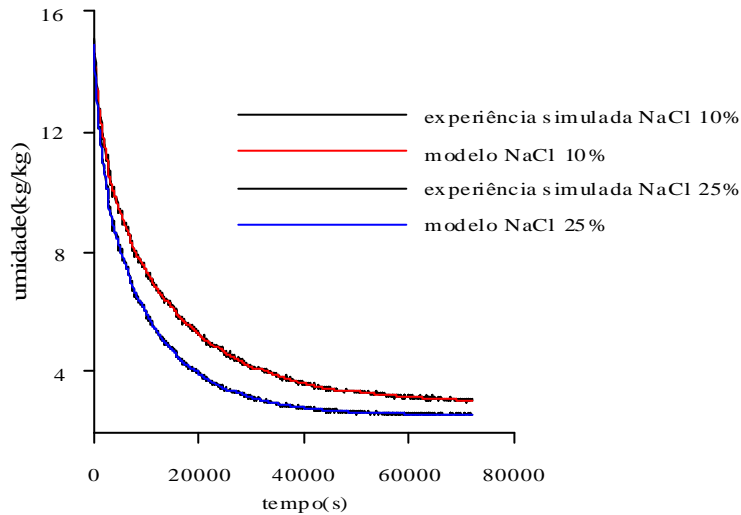


Figura 3.7: Evolução transiente da distribuição de umidade obtida pelas experiências simuladas e modelo, com ruído de 1% para as soluções de NaCl 10 e 25 % p/p.



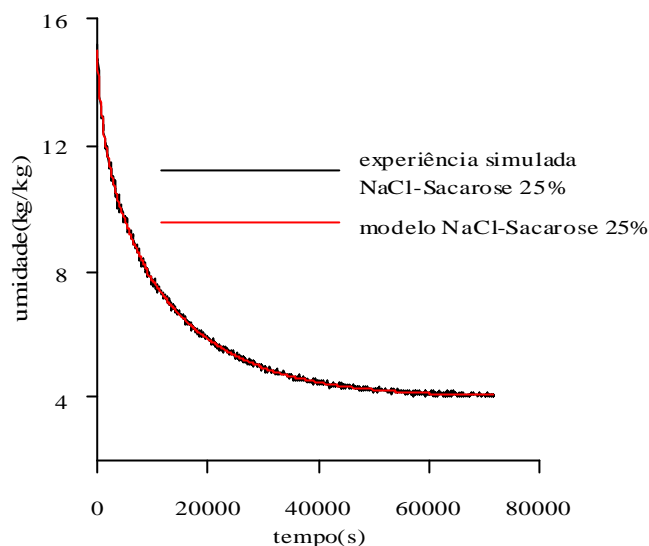


Figura 3.8: Evolução transiente da distribuição de umidade obtida pela experiência simulada e modelo, com ruído de 1% para a solução de NaCl-Sacarose 25 % p/p

#### 4-CONCLUSÃO

Um problema inverso de transferência de massa foi resolvido para se estimar a difusividade efetiva da água e a umidade de equilíbrio do tomate cereja submetido a um processo de desidratação osmótica. A identificação dos parâmetros foi realizada a partir dos dados obtidos de uma experiência simulada de desidratação osmótica contaminada por ruídos.

O modelo matemático difusivo foi resolvido analiticamente considerando o sólido como uma esfera, tal como tomate cereja, com difusividade efetiva da água constante, transferência de massa unidirecional, e desprezando as resistências externas a transferência de massa e o encolhimento do produto durante o processo.

A análise dos coeficientes de sensibilidade foi imprescindível na estimação dos parâmetros, uma vez que através dela identificou-se a não linearidade dos mesmos.

O Método de Levenberg-Marquardt Press et al (1992) foi o utilizado para resolver o problema de identificação dos parâmetros.

Os valores estimados obtidos para a  $D_{ef}$  e  $Y_{eq}$  mostraram-se muito próximos dos valores conhecidos. Assim, a estimação dos parâmetros difusividade efetiva e umidade de equilíbrio pelo Método Inverso mostra-se uma prática bastante eficaz.

#### 5-AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPQ, pelo apoio financeiro.

#### 6-REFERÊNCIAS

Azoubel, P. M. and Murr, F. E. X., 2004, "Mass Transfer Kinetics of Osmotic Dehydration of Cherry Tomato", Journal of Food Engineering, Vol. 61, p p. 291-295.

Beck, J. and Arnold, K. J., 1977, Parameter Estimation in Engineering and Science, Jonh Wiley and Sons, New York, p. 495.

Chenlo, F., Moreira, R. Herrero, C. F. and Vázquez, G., 2005, "Experimental Results and Modeling of the Osmotic Dehydration Kinetics of Chestnut whit Glucose Solutions", Journal of Food Engineering, Vol. 74, p p. 324-334.

Gaspareto, O. C. P., Oliveira, E. L., Silva, P. D. L. y Magalhães, M. M. A. , 2004, "Influencia Del Tratamiento Osmótico en el Secado de la Banana "Nanica" (*Musa cavendishii*, L) en Secador de Lecho Fijo", Información Tecnológica, La Serena Vol. 15, No. 6, p p.9-16.

Igarashi, L. e Kieckbusch, T. G. , 2000, "Cinética da Desidratação Osmótica de Tomate", XIII Congresso Brasileiro de Engenharia Química.

Mata, M. E. R. M. , Braga, M. E. D. e Kross, R. K. , 2003, "Secagem Osmótica de Tomate: Efeito da Epiderme", Revista Brasileira de Produtos Agro-industriais, Especial, No. 1, Campina Grande, p p. 77-84.

Matusek, A. and Merész, P. , "Modeling of Sugar Transfer During Osmotic Dehydration of Carrots", Periodica Polytechnica Ser Chemical Engineering, Vol. 46, No. 1-2, p p. 83-92.

Neto, M. A. S., Maia, G. A., Lima, J. R., Figueiredo, R.W., Filho, M. S.M.S. e Lima, A.S., 2005, "Desidratação Osmótica de Manga Seguida de Secagem Convencional: Avaliação das Variáveis de Processo", Ciências Agrotécnicas, Lavras, Vol. 29, No. 5, p p.1021-1028.

Park, K.J., Bin, A. e Brod, F.P.R., 2001, "Obtenção das Isotermas de Sorção e Modelagem Matemática para a Pêra Barlet (*Pyrus sp.*) Com e Sem Desidratação Osmótica", Ciências e Tecnologia de Alimentos, Vol. 21, No. 1, Campinas.

Press, W. H., Teikolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P., 1992, Numerical Recipes in Fortran, The Art of Scientific Computing, New York, Cambridge University Press, p. 963.

Ramalho, L.A., Schvezov, C. and Mascheroni, R. H., 2004, "Transfer During Dehydration of Pineapple", Food Science Technical International, Vol. 10, No. 5, p p. 323-332.

## 7-DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# INVERSE PROBLEM OF MASS DIFFUSION – DIFFUSIVITY MASS ESTIMATION OF CHERRY TOMATO (*Lycopersicon esculentum* var. *cerasiforme*)

### **Cristiane Kelly Ferreira da Silva**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[criskfsilva@yahoo.com.br](mailto:criskfsilva@yahoo.com.br)

### **Zaqueu Ernesto da Silva**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[zaqueu@les.ufpb.br](mailto:zaqueu@les.ufpb.br)

### **Manuella Pereira de Andrade**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[andrademanuella@yahoo.fr](mailto:andrademanuella@yahoo.fr)

### **Mirtes Aparecida da Conceição Silva**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[mirtesacs@yahoo.com.br](mailto:mirtesacs@yahoo.com.br)

### **José Pereira Alencar Júnior**

UFPB/LES Cidade Universitária, Caixa Postal 5115, CEP: 58071-530, João Pessoa/PB  
[jpereira1503@gmail.com](mailto:jpereira1503@gmail.com)

*Abstract: This article presents the solution of parameter estimation inverse problem for a mathematic model that involved mass transfer in the process of osmotic dehydration of horticultural products, in this specific case the cherry tomato. It aims to identify the equilibrium moisture content ( $Y_{eq}$ ) and effective diffusivity of water ( $D_{ef}$ ) into the product. It was used the Fick's second law in the mass balance equation into the product and solving the system of equations through analytic technique, and the transient distribution of moisture content in the product was determinate. That is used to determinate the mass diffusion in any point of the middle. The analyses of the sensitivity coefficient of the moisture content to the parameters  $D_{ef}$  and the  $Y_{eq}$  shows us that there aren't a linear dependence between them; this means that is possible to determine simultaneously these two parameters. The parameter estimation problem was solved with the Levenberg-Marquardt algorithm of minimization of the least-squares norm. The obtained results for the estimated parameters of  $D_{ef}$  and  $Y_{eq}$  for NaCl (10% and 25% p/p) and NaCl-Sacarose (25% p/p) solutions was  $1,212 \times 10^{-9} \pm 1,699 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $2,963 \pm 2,374 \times 10^{-3} \text{ kg H}_2\text{O}/\text{kg dry mass}$ ,  $1,772 \times 10^{-9} \pm 2,039 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $2,602 \pm 1,405 \times 10^{-3} \text{ kg H}_2\text{O}/\text{kg dry mass}$  e  $1,362 \times 10^{-9} \pm 2,426 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $4,063 \pm 2,679 \times 10^{-3} \text{ kg H}_2\text{O}/\text{kg dry mass}$ , respectively.*

**Keywords:** Mathematical modeling, osmotic dehydration, cherry tomato, mass transfer, parameters estimation