

## TEORIA DE TRÁFEGO DE FLUIDO PARA UM SISTEMA MACROSCÓPICO

### Adriana Luiza do Prado

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 019081, CEP81531-990, Curitiba, Paraná  
alprado@mat.ufpr.br

### Eloy Kaviski

Departamento de Hidráulica e Saneamento, Universidade Federal do Paraná  
eloy.dhs@ufpr.br

### Liliana M Gramani Cumin

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 019081, CEP81531-990, Curitiba, Paraná  
gramani@mat.ufpr.br

**Resumo.** As teorias de tráfego de fluido buscam descrever de uma maneira matemática as interações entre veículos, motoristas e a infra-estrutura. A infra-estrutura consiste no sistema da estrada e em todos os seus elementos operacionais, incluindo dispositivos de controle, semáforos e sinais de trânsito. Estas teorias são indispensáveis em todos os modelos de tráfego e ferramentas para à análise de operações nas ruas e estradas. O estudo científico do fluxo de tráfego teve seu início na década de 30, com o aumento significativo do uso dos automóveis e da expansão do sistema da estrada, surgiu um estudo de características do tráfego, através de modelos microscópicos e macroscópicos. Os modelos macroscópicos do fluxo, descartam as componentes individuais do sistema, adotando uma vista macroscópica do tráfego em uma rede. As variáveis consideradas são a densidade veicular e a velocidade média do tráfego. O objetivo deste trabalho é resolver as equações macroscópicas do fluxo de tráfego derivadas das equações reduzidas de Paveri-Fontana para modelos com valores especificados de velocidade prevista para a estrada através do método das características. A análise destes modelos fornece aos controladores do tráfego meios para avaliarem o sistema e determinar estratégias de controle em áreas urbanas

**Palavras chave:** Teoria de tráfego de fluido, Modelos macroscópicos, Equação de Paveri-Fontana, Método das Características.

### 1. Introdução

Existe na literatura um grande número de modelos macroscópicos de tráfego que descrevem o movimento de veículos ao longo de uma rodovia ou nas redes urbanas como um fluido unidimensional compressível (Helbing, 2001). Nos problemas de trânsito modelados por um problema de mecânica dos fluidos faz-se variar a velocidade, a compressibilidade, a viscosidade e outras propriedades do fluido consoante a situação concreta que se pretende estudar.

O estudo científico do fluxo de tráfego teve seu início na década de 30 com a aplicação da teoria de probabilidade à descrição do tráfego de estrada e com os estudos de modelos que relacionavam o volume, a velocidade e a investigação do desempenho do tráfego nos cruzamentos. Com o aumento significativo do uso dos automóveis e da expansão do sistema da estrada, surgiu um estudo de características do tráfego, através de modelos microscópicos e macroscópicos. Os modelos macroscópicos do fluxo, descartam à vista microscópica do tráfego em termos das velocidades individuais dos veículos ou as componentes individuais do sistema (tais como as ligações ou os cruzamentos), adotando uma vista macroscópica do tráfego em uma rede.

As teorias de tráfego de fluido buscam descrever de uma maneira matemática as interações entre veículos, motoristas e a infra-estrutura. A infra-estrutura consiste no sistema da estrada e em todos os seus elementos operacionais, incluindo dispositivos de controle, semáforos e sinais de trânsito. Estas teorias são indispensáveis em todos os modelos de tráfego e ferramentas para à análise de operações nas ruas e estradas.

A análise de modelos fornece aos controladores do tráfego meios para avaliarem o sistema e determinar estratégias de controle em áreas urbanas.

Na teoria cinética dos gases, o sistema formado pela equação de Boltzmann e com condições de contorno, para alguns casos particulares pode ser solucionada analiticamente pelos métodos clássicos de Chapman-Enskog e pelo método de Grad, os quais diferem fundamentalmente pelo número de campos básicos empregados (Fernandes, 1996). Muitas vezes estas soluções dependem do uso de procedimentos numéricos para a produção de resultados finais. Os métodos de solução de maior interesse são numéricos.

Neste trabalho o objetivo é resolver as equações macroscópicas do fluxo de tráfego derivadas das equações reduzidas de Paveri-Fontana, tipo-Boltzmann para o fluxo de tráfego levando-se em conta o comportamento individual do veículo,

para modelos específicos da velocidade desejada através do método das características. As variáveis consideradas são a densidade veicular e a velocidade média do tráfego.

## 2. Equação de Pavari-Fontana para Velocidades Previstas Especificadas

Com o objetivo de se corrigir algumas deficiências do modelo de tráfego obtido através da teoria cinética dos gases proposta por (Prigogine e Herman, 1971), ou seja, equação cinética de tráfego, Pavari-Fontana desenvolveu um tratamento do tipo-Boltzmann para o fluxo de tráfego levando-se em conta o comportamento individual do carro, ou seja, sua aceleração. No modelo de Pavari-Fontana o estado do tráfego é caracterizado pela função de distribuição de um veículo  $g(x, c, w, t)$  tal que  $g(x, c, w, t)dx dc dw$  dado um tempo  $t$  fornece o número de veículos numa estrada entre as posições  $x$  e  $x + dx$  e velocidade atual entre  $c$  e  $c + dc$ , com velocidade desejada entre  $w$  e  $w + dw$ . Para uma estrada de mão única, após ocorrer uma ultrapassagem, a função de distribuição satisfaz a seguinte equação cinética de tráfego

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g}{\partial t} + c \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial c} \left( g \frac{\partial c}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( g \frac{\partial w}{\partial t} \right) \\ & = f(x, c, t) \int_c^\infty (1-p)(c' - c)g(x, c', w, t)dc' - g(x, c, w, t) \\ & \times \int_0^c (1-p)(c - c')f(x, c', t)dc', \end{aligned} \tag{1}$$

na qual

$$f(x, c, t) = \int_0^\infty g(x, c, w, t)dw \tag{2}$$

é a função de distribuição da velocidade de um veículo.

O lado direito da Eq. (1) é denominado de termo de interação (ou colisão) e descreve o processo de desaceleração do fluxo que é causado por veículos mais lentos que não podem ser imediatamente ultrapassados. O lado esquerdo corresponde à situação na qual o veículo com velocidade  $c'$  deve desacelerar para a velocidade  $c$  causando um decrescimento na função de distribuição. Basicamente considera-se que os veículos mais lentos podem ser imediatamente ultrapassados com uma probabilidade  $p$ .

Assumindo-se que os motoristas aproximam-se exponencialmente da velocidade desejada num tempo com uma constante de relaxação de tempo  $\tau$ , pode-se escrever

$$\frac{dc}{dt} = \frac{w - c}{\tau} \quad \text{e} \quad \frac{dw}{dt} = 0. \tag{3}$$

A lei da aceleração dada pela Eq. (3) representa uma boa aproximação, desde que os motoristas reduzam gradualmente a aceleração após alcançar a velocidade desejada.

A equação cinética do tráfego de Pavari-Fontana, Eq. (1), uma equação íntegro-diferencial, apresenta uma grande dificuldade quanto à obtenção de uma solução analítica para todos os casos nos quais os processos de interação não podem ser abandonados. Para superar esta dificuldade, a Eq. (1) é integrada com respeito a velocidade desejada, obtendo-se uma equação reduzida de Pavari-Fontana

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial c} \left( f \frac{V_0 - c}{\tau} \right) = f(x, c, t) \int_0^\infty (1-p)(c' - c)f(x, c', t)dc' \tag{4}$$

na qual

$$V_0(x, c, t) = \int_0^\infty w \frac{g(x, c, w, t)}{f(x, c, t)} dw, \tag{5}$$

representa a velocidade média desejada.

Ao se considerar o tráfego homogêneo e estacionário, a velocidade média desejada para os veículos é diretamente proporcional a velocidade atual  $c$ . Sendo esta relação dada por:

$$V_0(x, c, t) = V_0(c) = kc, \tag{6}$$

ou seja, esta velocidade será independente do tempo e da posição na qual o veículo se encontra na estrada. Este é um caso particular que simplifica a Eq. (4) para a velocidade média desejada.

Sabe-se que a função de distribuição deve satisfazer as seguintes condições de contorno

$$\lim_{w \rightarrow 0} g(x, c, w, t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{w \rightarrow \infty} g(x, c, w, t) = 0. \quad (7)$$

Então, a Eq. (4) torna-se

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial c} \left( f \frac{kc - c}{\tau} \right) = \mathcal{C}(c, c'), \quad (8)$$

sendo que  $\mathcal{C}(c, c')$  representa o termo de colisão. Denominando-se por  $\beta = \frac{k-1}{\tau}$ , na qual  $k$  e  $\tau$  são constantes, então a Eq. (8) transforma-se em

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial (cf)}{\partial c} = \mathcal{C}(c, c'). \quad (9)$$

### 3. Equações Macroscópicas do Tráfego

As equações macroscópicas para as variáveis relevantes podem ser derivadas do cálculo da média entre a equação cinética sobre a velocidade instantânea. Este procedimento é bem-conhecido na teoria cinética (Chapman e Cowling, 1970) assim como suas aplicações em problemas de fluxo de tráfego.

O método utilizado na dedução das equações macroscópicas é semelhante ao desenvolvido em (Velasco e Marques, 2005), isto é, para as equações de Euler e Navier-Stokes. Por se tratar de um problema não fechado, existem vários modos de se obter os resultados.

Usa-se, neste trabalho, os valores encontrados para a Pressão do Tráfego  $\mathcal{P}$  e uma condição para a velocidade média desejada  $\mathcal{W}$ . Os cálculos numéricos são realizados com base no método das características (Streeter, 1997).

Nas equações reduzidas de Pavri-Fontana do tráfego, as quantidades macroscópicas  $\rho$  e  $V$  são funções da função de distribuição da velocidade de um veículo. Para qualquer função de distribuição  $f(x, c, t)$ , a densidade veicular  $\rho$  e a velocidade média  $V$  são definidas através de:

$$\rho(x, t) = \int_0^{\infty} f(x, c, t) dc \quad (10)$$

e,

$$V(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{f(x, c, t)}{\rho(x, t)} c dc. \quad (11)$$

respectivamente.

A integração da equação reduzida do tráfego de Pavri-Fontana (4) sobre todos os atuais valores da velocidade  $c$ , produz a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

e a equação da velocidade como sendo

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \rho \frac{\mathcal{W} - V}{\tau} - \rho(1 - p)\mathcal{P} \quad (13)$$

obtida pela multiplicação da Eq. (4) por  $c$  e efetuando a integral sobre todos os valores da velocidade atual. Nas equações (12) e (13) foram introduzidas a velocidade média prevista

$$\mathcal{W} = \int_0^{\infty} V_0(x, c, t) \frac{f(x, c, t)}{\rho(x, t)} dc \quad (14)$$

e a pressão do tráfego

$$\mathcal{P} = \int_0^{\infty} (c - V)^2 f(x, c, t) dc, \quad (15)$$

que esta relacionada com a variância,  $\Theta(x, t)$ , da velocidade através da equação

$$\mathcal{P} = \rho(x, t)\Theta(x, t). \quad (16)$$

As equações (10)-(16) são válidas desde que a função de distribuição  $f$  satisfaça a condição

$$\lim_{c \rightarrow 0} f(x, c, t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} f(x, c, t) = 0. \quad (17)$$

Neste trabalho soluciona-se as equações (12) e (13) considerando-se a hipótese de que  $\mathcal{W}$  é constante ( $= V_0$ ) aproximando (Velasco e Marques, 2005)

$$p = 1 - \frac{\rho}{\hat{\rho}}, \quad (18)$$

e

$$\mathcal{P} = \frac{\rho V^2}{\alpha} \quad (19)$$

sendo  $\hat{\rho}$  representando a densidade veicular máxima da estrada e  $\alpha$  é uma constante adimensional.

#### 4. Método das Características

Considera-se o problema de valor inicial para a equação de primeira ordem quase linear, dadas as funções  $a(x, t, u)$ ,  $b(x, t, u)$  e  $d(x, t, u)$ . O objetivo é encontrar  $u(x, t)$ , tal que

$$\begin{cases} a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + d(x, t) = 0, & t > 0, -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (20)$$

A equação diferencial de primeira ordem (20), definida inicialmente no sistema de coordenadas  $(x, t)$  será reescrita em um outro sistema de coordenadas  $(s, t)$  definido convenientemente. Sejam as curvas  $x(s)$  e  $t(s)$  definidas por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a(x(s), t(s), u), & x(0) &= x_i, \\ \frac{dt}{ds} &= b(x(s), t(s), u), & t(0) &= t_i, \end{aligned} \quad (21)$$

estas são denominadas curvas características no espaço  $(x, t, u)$ . Aplicando a regra da cadeia para se derivar  $u(x(s), t(s))$ , ao longo das características, tem-se

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = a(x, t, u)u_x + b(x, t, u)u_t. \quad (22)$$

Comparando a Eq. (22) com a Eq. (20) obtém-se

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = -d(x(s), t(s), u), \\ u(0) = u_0(x_i). \end{cases} \quad (23)$$

isto é, define-se uma equação diferencial ordinária no novo sistema de coordenadas  $(s, t)$ .

Comparando as equações (20) e (23), observa-se que a equação diferencial parcial transformou-se em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Assim a solução será encontrada em pontos que estão sobre as características. Um processo de interpolação pode ser utilizado se estas características se afastam em algumas regiões. Este método é considerado um método para solução analítica de equações diferenciais parciais de primeira ordem.

O método das características pode ser aplicado para solucionar sistemas de duas equações diferenciais parciais de primeira ordem quase lineares e hiperbólicas.

Sejam  $L_1$  e  $L_2$  equações contendo as variáveis dependentes,  $\rho$ , a densidade veicular, e  $V$ , a velocidade média. Essas equações serão combinadas por meio de um multiplicador desconhecido  $\lambda$ , como  $L = L_1 + \lambda L_2$ . Quaisquer valores reais distintos de  $\lambda$  fornecem duas equações em  $\rho$  e  $V$  que representam o mesmo fenômeno físico que as duas equações originais,  $L_1$  e  $L_2$ , e que podem substituí-las diante de qualquer solução. Substituindo  $L_1$  e  $L_2$  na expressão de  $L$ , obtém-se, após um rearranjo, as equações que representam as derivadas totais,  $\frac{d\rho}{dt}$  e de  $\frac{dV}{dt}$ , respectivamente.

Atribui-se  $L_2$  a equação da continuidade (12) e  $L_1$  a equação da velocidade (13),

$$L_2 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

e

$$L_1 = \rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \rho \frac{\mathcal{W} - V}{\tau} - \rho(1-p)\mathcal{P}. \quad (25)$$

Substituindo-se na equação da velocidade (13),  $\mathcal{W} = V_0$  e a pressão do tráfego dada pela Eq. (19), encontra-se

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho V^2}{\alpha} \right) = \rho \frac{V_0 - V}{\tau} - \rho(1-p) \frac{\rho V^2}{\alpha}. \quad (26)$$

Na Eq. (26),  $\rho$  e  $V$  são funções de  $x$  e  $\alpha$  é uma constante adimensional dada por

$$\alpha = \frac{\rho_e (1-p) V_e}{\beta}, \quad (27)$$

na qual  $\rho_e$  e  $V_e$  referem-se ao estado estacionário.

Desenvolvendo a parcial com relação a  $x$  na Eq. (24) e agrupando as derivadas parciais da mesma função e aplicando o método das características, ou seja,  $L = L_1 + \lambda L_2$ , encontra-se

$$L_1 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} v_{c(L_1)} \quad (28)$$

e

$$L_2 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_{c(L_2)} \quad (29)$$

sendo genericamente  $v_c = \frac{dx}{dt}$ .

Com a condição de que  $v_{c(L_1)} = v_{c(L_2)}$ , a equação abaixo terá que ser satisfeita

$$\rho \lambda^2 + \frac{2V}{\alpha} \lambda - \frac{V^2}{\rho \alpha} = 0, \quad (30)$$

que representa uma equação do segundo grau em  $\lambda$ . Para o caso deste trabalho, tem-se duas raízes reais e distintas para  $\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{V}{\alpha \rho} (-1 \pm \sqrt{1 + \alpha}), \quad (31)$$

ou seja, solução do tipo hiperbólico.

Substituindo a Eq. (31) em  $L = L_1 + \lambda L_2$ , encontra-se quatro equações diferenciais ordinárias

$$C^+ \begin{cases} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\alpha \rho} (-1 + \sqrt{1 + \alpha}) \frac{d\rho}{dt} + (1-p) \frac{\rho V^2}{\alpha} - \frac{(V_0 - V)}{\tau} = 0, \\ \frac{dx}{dt} = V - \frac{V}{\alpha} (-1 + \sqrt{1 + \alpha}), \end{cases} \quad (32)$$

e também

$$C^- \begin{cases} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\alpha \rho} (-1 - \sqrt{1 + \alpha}) \frac{d\rho}{dt} + (1-p) \frac{\rho V^2}{\alpha} - \frac{(V_0 - V)}{\tau} = 0, \\ \frac{dx}{dt} = V - \frac{V}{\alpha} (-1 - \sqrt{1 + \alpha}). \end{cases} \quad (33)$$

As equações (32) e (33) são as equações do método das características, nas quais  $C^+$  e  $C^-$  representam as curvas características positivas e negativas, respectivamente. Ambas possuem inclinações positivas pois o fluxo de tráfego é maior do que a velocidade das ondas sonoras (Sivaloganathan, 1974 e Sivaloganathan, 1978). Conhecidas as condições iniciais e de contorno pode-se traçar a malha das curvas características.

#### 4.1. O Processo Geral do Método das Características

Devido à inclinação das características começa-se o processo de discretização da malha da condição de contorno para a posição do trecho  $0 \leq x \leq L_t$ .

O esquema deste processo, denominado esquema das distâncias especificadas do método das características (Sivaloganathan, 1974), diferenciado do esquema da malha retangular (Sivaloganathan, 1978), está representado na Fig. 1 na qual:

- Divide-se o comprimento da estrada em  $n$  partes iguais de comprimento  $\Delta x$ .
- Inicia-se pela condição de contorno em  $A$ ,  $x = L_t$ , com  $P_{1C_1} = (L_t, 0)$ , traçando-se uma curva característica positiva  $C_1$ .
- Em  $B$ ,  $x = L_t - \Delta x$ , com  $P_{1C_2} = (L_t - \Delta x, 0)$ , traça-se uma curva característica positiva  $C_2$  e em  $AB$ , ponto médio de  $A$  e  $B$ , traça-se uma curva de característica negativa. A intersecção destas curvas ocorre no ponto  $M$ .
- Em  $A$  traça-se uma curva característica negativa, encontrando-se o ponto  $N$  sobre a curva  $C_2$ . Interpola-se os pontos  $M$  e  $N$  encontrando o ponto  $P_{2C_2}$ .
- Em  $C$ ,  $x = L_t - 2\Delta x$ , com  $P_{1C_3} = (L_t - 2\Delta x, 0)$ , traça-se uma curva característica positiva  $C_3$  e em  $BC$ , ponto médio de  $B$  e  $C$ , traça-se uma curva característica negativa. A intersecção destas curvas ocorre no ponto  $M^*$ .
- Em  $B$  traça-se uma curva característica negativa, encontrando-se o ponto  $P_{2C_3}$ .
- Em  $N$  traça-se uma curva característica negativa encontrando-se  $N^*$  sobre a curva  $C_3$ . Interpola-se os pontos  $P_{2C_3}$  e  $N^*$  encontrando o ponto  $P_{3C_3}$ .
- Em  $D$ ,  $x = L_t - 3\Delta x$ , com  $P_{1C_4} = (L_t - 3\Delta x, 0)$ , e em  $CD$ , ponto médio de  $C$  e  $D$ , traça-se uma curva característica positiva e negativa, respectivamente. Encontra-se o ponto  $M^{**}$ .
- De  $C$  traça-se uma curva característica negativa encontrando-se  $P_{2C_4}$ . De  $P_{2C_3}$  e  $N^*$  traçam-se curvas características negativas obtendo-se  $P_{3C_4}$  e  $N^{**}$ , respectivamente. Interpolando-se os pontos  $P_{3C_4}$  e  $N^{**}$  encontra-se  $P_{4C_4}$ .
- e assim sucessivamente vai-se discretizando a malha.

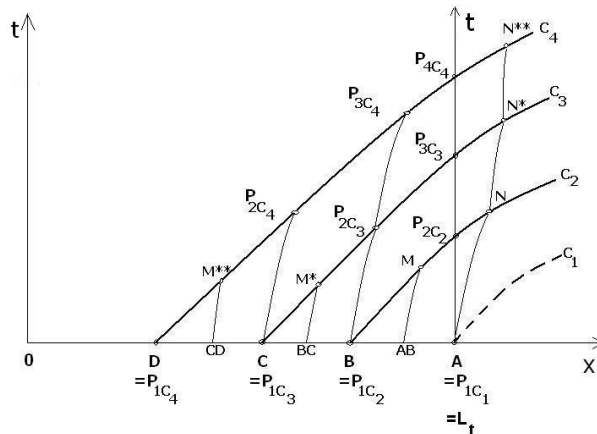


Figura 1: Discretização da malha.

De um modo geral, associa-se  $L$  a curva característica positiva  $C^+$  e  $R$  a curva característica negativa  $C^-$ , conforme a Fig. 2. A determinação do ponto  $M$ , ou seja,  $t_M$ ,  $x_M$ ,  $\rho_M$  e  $V_M$ , sendo conhecidos os dados dos pontos  $L$  e  $R$  é obtido através do seguinte procedimento computacional:

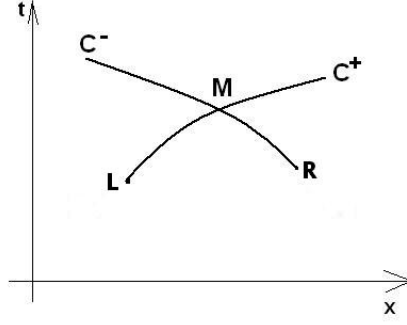


Figura 2: Gráfico no plano  $xt$  das características, sobre as quais encontra-se a solução.

- (Passo1) Atribuindo-se  $b_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{\alpha + 1}}{\alpha}$  e  $q_{\pm} = \frac{(\alpha + 1) \pm \sqrt{\alpha + 1}}{\alpha}$  e substituindo a Eq. (18), as equações (32) e (33) serão escritas na forma:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} + \frac{b_{\pm}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \underbrace{\frac{V_0 - V}{\tau V} - \frac{\rho V}{\alpha} \left(1 - \frac{\rho}{\hat{\rho}}\right)}_{f(V, \rho)}, \quad (34)$$

e

$$\frac{dx}{dt} = Vq_{\pm}, \quad (35)$$

respectivamente.

- (Passo 2) Calcula-se  $f_L(V_L, \rho_L)$  e  $f_R(V_R, \rho_R)$  sendo conhecidos a velocidade e a densidade em  $L$  e  $R$  através das equações:

$$f_L(V_L, \rho_L) = \frac{V_0 - V_L}{\tau V_L} - \frac{\rho_L V_L}{\alpha} \left(1 - \frac{\rho_L}{\hat{\rho}}\right) \quad (36)$$

e

$$f_R(V_R, \rho_R) = \frac{V_0 - V_L}{\tau V_R} - \frac{\rho_R V_R}{\alpha} \left(1 - \frac{\rho_R}{\hat{\rho}}\right) \quad (37)$$

- (Passo 3) Inicia-se, como primeira aproximação, fazendo-se a determinação  $M$  como

$$t_M = \frac{t_L + t_R}{2}, \quad x_M = \frac{x_L + x_R}{2}, \quad \rho_M = \frac{\rho_L + \rho_R}{2} \quad \text{e} \quad V_M = \frac{V_L + V_R}{2}. \quad (38)$$

- (Passo 4) Calculam-se novas aproximações das variáveis no ponto  $M$  do item anterior, denotadas por  $t_M^*$ ,  $x_M^*$ ,  $\rho_M^*$ ,  $V_M^*$ .

– Cálculo de  $t_M^*$  e  $x_M^*$ .

Integrando a Eq. (35), obtém-se um sistema para  $x_M$  e  $t_M$  formado pelas equações

$$x_M - x_L = \frac{q_+}{2} (V_M + V_L)(t_M - t_L) \quad (39)$$

e

$$x_M - x_R = \frac{q_-}{2}(V_M + V_R)(t_M - t_R); \quad (40)$$

Denominando

$$a_L = \frac{q_+}{2}(V_M + V_L) = \frac{(\alpha + 1) + \sqrt{\alpha + 1}}{\alpha}(V_M + V_L) \quad (41)$$

e

$$a_R = \frac{q_-}{2}(V_M + V_R) = \frac{(\alpha + 1) - \sqrt{\alpha + 1}}{\alpha}(V_M + V_R), \quad (42)$$

reescreve-se o sistema (39) e (40):

$$x_M^* - x_L = a_L(t_M^* - t_L) \quad (43)$$

e

$$x_M^* - x_R = a_R(t_M^* - t_R), \quad (44)$$

no qual chamou-se  $x_M$  por  $x_M^*$  e  $t_M$  por  $t_M^*$  para denotar que se está calculando uma nova aproximação para estas variáveis. Resolvendo o sistema descrito pelas equações (43) e (44) encontra-se

$$t_M^* = \frac{x_R - x_L + a_L t_L - a_R t_R}{a_L - a_R} \quad (45)$$

e

$$x_M^* = x_L + a_L(t_M^* - t_L). \quad (46)$$

– Cálculo de  $\rho_M^*$  e  $V_M^*$ .

Integrando a Eq. (34) obtém-se um sistema para  $\rho_M$  e  $V_M$  dados pelas equações:

$$b_+(\ln \rho_M - \ln \rho_L) + \ln V_M - \ln V_L = \left[ \frac{f_M(V_M, \rho_M) + f_L(V_L, \rho_L)}{2} \right] (t_M^* - t_L) \quad (47)$$

e

$$b_-(\ln \rho_M - \ln \rho_R) + \ln V_M - \ln V_R = \left[ \frac{f_M(V_M, \rho_M) + f_R(V_R, \rho_R)}{2} \right] (t_M^* - t_R), \quad (48)$$

na qual utilizou-se para  $f_M$  a definição dada na Eq. (36), substituindo  $M$  por  $L$ .

Denominando

$$b_L = \left[ \frac{f_M(V_M, \rho_M) + f_L(V_L, \rho_L)}{2} \right] (t_M^* - t_L) \quad (49)$$

e

$$b_R = \left[ \frac{f_M(V_M, \rho_M) + f_R(V_R, \rho_R)}{2} \right] (t_M^* - t_R), \quad (50)$$

as equações (47) e (48), para  $\rho_M^* = \rho_M$  e  $V_M^* = V_M$ , formam o sistema

$$b_+(\ln \rho_M^* - \ln \rho_L) + \ln V_M^* - \ln V_L = b_L \quad (51)$$

e

$$b_-(\ln \rho_M^* - \ln \rho_R) + \ln V_M^* - \ln V_R = b_R, \quad (52)$$

cujas soluções são dadas por

$$\rho_M^* = \exp\left\{ [b_L - b_R + \ln(V_L) - \ln(V_R) + \frac{\sqrt{\alpha + 1} - 1}{\alpha} \ln(\rho_L) + \frac{\sqrt{\alpha + 1} + 1}{\alpha} \ln(\rho_R)] \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha + 1}} \right\} \quad (53)$$

e

$$V_M^* = \exp\left\{ b_L + \ln(V_L) + \frac{\sqrt{\alpha + 1} - 1}{\alpha} [\ln(\rho_L) - \ln(\rho_M^*)] \right\}. \quad (54)$$



- (Passo 5) Com os valores da aproximação anterior e com os valores da aproximação do passo 4, verifica-se a convergência através das condições:

$$|x_M - x_M^*| < \varepsilon x_M, \quad |t_M - t_M^*| < \varepsilon t_M, \quad |V_M - V_M^*| < \varepsilon V_M, \quad \text{e } |\rho_M - \rho_M^*| < \varepsilon \rho_M, \quad (55)$$

nas quais  $\varepsilon$  representa a precisão da convergência. No programa numérico adotou-se  $\varepsilon = 10^{-7}$ . Se as condições dadas em (55) forem satisfeitas, a determinação do ponto  $M$  foi encontrada. Caso contrário, atribui-se

$$x_M = x_M^*, \quad t_M = t_M^*, \quad V_M = V_M^* \quad \text{e } \rho_M = \rho_M^* \quad (56)$$

e volta-se ao passo 4, repetindo este processo, até se obter a precisão desejada.

## 5. Simulação Numérica e Resultados

O sistema de equações diferenciais ordinárias (32) e (33) requerem a especificação das condições iniciais e de contorno. Com o objetivo de simplificar a análise, serão consideradas condições de contorno periódicas para a densidade veicular  $\rho(0, t) = \rho(L_t, t)$  e a velocidade média  $V(0, t) = V(L_t, t)$ , no qual  $L_t$  representa a extensão da estrada estudada.

Neste trabalho, considera-se um tráfego homogêneo e estacionário,

$$\rho_e = 28 \text{ veículos/km}$$

e

$$V_e(\rho_e) = 84 \text{ km/h} \quad (57)$$

que sofre uma pequena perturbação periódica na velocidade média (Helbing, 1996) representando alguns veículos movendo-se mais rapidamente e outros mais lentamente. Assim, as condições iniciais consideradas são:

$$\rho(x, 0) = \rho_e = 28 \text{ veículos/km}$$

e

$$V(x, 0) = 84 + 0,84 \sin\left(\frac{2\pi x}{L_t}\right), \quad (58)$$

com  $0 \leq x \leq L_t$  dados em km. Implementa-se para o método numérico a extensão da estrada igual a  $L_t = 12$  km e a constante de relaxação de tempo como  $\tau = \frac{1}{120}h$ . Adota-se  $\hat{\rho} = 140$  veículos/km e  $\alpha = 75$ , obtido a partir de resultados experimentais (Velasco e Marques, 2005).

Utilizando-se a Eq. (27), calcula-se  $\beta$ , a qual fornecerá a constante  $k$  e conseqüentemente  $V_0$ . Para tempos posteriores, na Eq. (27) se utiliza a Eq. (58) para a expressão da velocidade e repete-se o processo para se obter  $V_0$ .

Na Tab. 1 apresenta-se a evolução da densidade veicular  $\rho$  em função do trecho da estrada  $x$  e do tempo  $t$  para as sete primeiras características positivas, ver Fig. 1, que emanam do eixo  $x$ , considerando-se a divisão do trecho da estrada em 200 partes iguais,  $n = 200$ .

Os dados numéricos obtidos estão de acordo com a análise considerada, ou seja, como o estado é estacionário a densidade veicular permanece praticamente constante, sendo a variação numérica máxima de  $\pm 0,003$ .

Tabela 1: Valores de  $x$ ,  $t$  e  $\rho$  para sete primeiras curvas características positivas.

Curva Característica	Pontos	$x$ (km)	$t$ (h)	$\rho(x, t)$ (veículos/km)
$C_1$	$P_{1C_1}$	12,0000000000	0,0000000000	28,0000000000
$C_2$	$P_{1C_2}$	11,9400000000	0,0000000000	28,0000000000
	$P_{2C_2}$	12,0000000000	0,00057933167	27,9937050000
$C_3$	$P_{1C_3}$	11,8800000000	0,0000000000	28,0000000000
	$P_{2C_3}$	11,9637510000	0,00080890147	27,9912210000
	$P_{3C_3}$	12,0000000000	0,00118491460	28,0161420000
$C_4$	$P_{1C_4}$	11,8200000000	0,0000000000	28,0000000000
	$P_{2C_4}$	11,9037510000	0,00080914379	27,9912380000
	$P_{3C_4}$	11,9888370000	0,00169197860	28,0497530000
	$P_{4C_4}$	12,0000000000	0,00181541310	28,0488290000
$C_5$	$P_{1C_5}$	11,7600000000	0,0000000000	28,0000000000
	$P_{2C_5}$	11,8437510000	0,00080938542	27,9912640000
	$P_{3C_5}$	11,9288360000	0,00169245210	28,0498060000
	$P_{4C_5}$	12,0000000000	0,00247950630	28,0439160000
$C_6$	$P_{1C_6}$	11,7000000000	0,0000000000	28,0000000000
	$P_{2C_6}$	11,7837510000	0,00080962614	27,9912980000
	$P_{3C_6}$	11,8688350000	0,00169292360	28,0498740000
	$P_{4C_6}$	11,9525720000	0,00261924750	28,0429550000
	$P_{5C_6}$	12,0000000000	0,00317363900	28,0789390000
$C_7$	$P_{1C_7}$	11,6400000000	0,0000000000	28,0000000000
	$P_{2C_7}$	11,7237510000	0,00080986570	27,9913410000
	$P_{3C_7}$	11,8088350000	0,00169339260	28,0499570000
	$P_{4C_7}$	11,8925710000	0,00261993040	28,0430560000
	$P_{5C_7}$	11,9774830000	0,03612677800	28,1074930000
	$P_{6C_7}$	12,0000000000	0,03888570200	28,1050790000

Na Tab. 2 tem-se a evolução da velocidade média  $V$  em função do trecho da estrada  $x$  e do tempo  $t$  para as sete primeiras curvas características positivas com  $n = 200$ .

Observa-se, em cada das sete curvas características positivas apresentadas, que a velocidade média é uma função decrescente em relação a variação do tempo e do trecho da estrada, atingindo para estas, o seu valor mínimo de aproximadamente 64, 42 km/h após 0, 038h do início da análise do tráfego.

Os resultados apresentados nas tabelas (1) e (2) ilustram uma pequena amostra dos 266.112 pontos calculados, considerando-se  $n = 200$ , para simular uma hora do movimento.

## 6. Conclusões

Neste trabalho apresentam-se resultados obtidos da simulação do fluxo de tráfego para condições de contorno periódicas tanto para a densidade veicular,  $\rho$ , como para a velocidade média  $V$ , como exemplo, uma pista circular. Os cálculos numéricos foram realizados usando-se o denominado esquema das distâncias especificadas do método das características. Por meio deste esquema são determinados os resultados das variáveis dependentes,  $V$  e  $\rho$ , para as curvas características positivas que emanam em pontos fixados no eixo  $x$ . Como o fluxo de tráfego é maior do que a velocidade das ondas sonoras (fluxo super-crítico), as curvas características positivas e negativas têm inclinações positivas, que se propagam na pista simulada, a primeira característica examinada emana do ponto  $x = L_t$ , a segunda de  $x = L_t - \Delta x$ , e assim sucessivamente.

Em geral o esquema do método das características das distâncias especificadas, quando comparado com o esquema da malha retangular, utiliza menor tempo de processamento embora ocupe maior espaço de memória do computador. Com os resultados obtidos pelo esquema adotado neste trabalho, ou seja, obtenção da densidade veicular e velocidade média nos pontos ( $P_{1C_1}, P_{1C_2}, P_{2C_2}, \dots$ ) da malha discretizada, facilmente consegue-se determinar os resultados para uma malha retangular através de interpolação.

A equação reduzida de Paveri-Fontana foi resolvida através do método das características das distâncias especificadas para o caso particular, no qual o tráfego é homogêneo e estacionário, sendo a velocidade média desejada diretamente proporcional a velocidade atual.

Observa-se que a densidade veicular permanece praticamente constante e que a velocidade média é uma função decrescente para as sete primeiras curvas características positivas. Estes comportamentos se estendem ao longo de todas as

Tabela 2: Valores de  $x$ ,  $t$  e  $V(x, t)$  para sete primeiras curvas características positivas.

Curva Característica	Pontos	$x$ (km)	$t$ (h)	$V(x, t)$ (km/h)
$C_1$	$P_{1C_1}$	12,0000000000	0,0000000000	84.0000000000
$C_2$	$P_{1C_2}$	11,9400000000	0,0000000000	83.9736150000
	$P_{2C_2}$	12,0000000000	0,00057933167	79.6660920000
$C_3$	$P_{1C_3}$	11,8800000000	0,0000000000	83.9472560000
	$P_{2C_3}$	11,9637510000	0,00080890147	77.9387100000
	$P_{3C_3}$	12,0000000000	0,00118491460	75.7474480000
$C_4$	$P_{1C_4}$	11,8200000000	0,0000000000	83.9209490000
	$P_{2C_4}$	11,9037510000	0,00080914379	77.9164920000
	$P_{3C_4}$	11,9888370000	0,00169197860	72.7768340000
	$P_{4C_4}$	12,0000000000	0,00181541310	72.2241640000
$C_5$	$P_{1C_5}$	11,7600000000	0,0000000000	83.8947200000
	$P_{2C_5}$	11,8437510000	0,00080938542	77.8943370000
	$P_{3C_5}$	11,9288360000	0,00169245210	72.7584790000
	$P_{4C_5}$	12,0000000000	0,00247950630	69.2381310000
$C_6$	$P_{1C_6}$	11,7000000000	0,0000000000	83.8685950000
	$P_{2C_6}$	11,7837510000	0,00080962614	77.8722670000
	$P_{3C_6}$	11,8688350000	0,00169292360	72.7401920000
	$P_{4C_6}$	11,9525720000	0,00261924750	68.6011810000
	$P_{5C_6}$	12,0000000000	0,00317363900	66.6796080000
$C_7$	$P_{1C_7}$	11,6400000000	0,0000000000	83.8426000000
	$P_{2C_7}$	11,7237510000	0,00080986570	77.8503040000
	$P_{3C_7}$	11,8088350000	0,00169339260	72.7219920000
	$P_{4C_7}$	11,8925710000	0,00261993040	68.5862640000
	$P_{5C_7}$	11,9774830000	0,03612677800	65.1488970000
	$P_{6C_7}$	12,0000000000	0,03888570200	64.4258810000

outras curvas características positivas que compõe a malha discretizada.

O esquema do método das características utilizado mostrou-se adequado para solucionar o sistema de equações quase-lineares (12) e (13) que governam o fluxo de tráfego simulado. Em geral o esquema do método das características das distâncias especificadas não apresenta grandes dificuldades para ser implementado computacionalmente quando usado para solucionar problemas de fluxo unidimensional, como o caso do problema investigado.

## 7. Agradecimentos

Os autores agradecem ao Dr. Wilson Marques Junior por suas discussões sobre este artigo. Os autores também agradecem à Fundação Araucária pelo suporte a essa pesquisa.

## 8. Referências

- Chapman, S. and Cowling, T., 1970, “The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases”, Cambridge University Press, Cambridge, 428 p.
- Fernandes, A. S., 1996, “Teoria Cinética dos Gases Poliatômicos”, PhD thesis, Universidade de São Paulo, Brasil.
- Helbing, D., 1996, Gas-Kinetic derivation of Navier-Stokes-like traffic equations, “Physical Review”, Vol. 53, No. 4, pp. 1067–1141.
- Helbing, D., 2001, Traffic and Related Self-Driven Many-Particle, “Rev. of Mod. Phys.”, Vol. 73, No. 4, pp. 1067–1141.
- Prigogine, I. and Herman, R., 1971, “Kinetic Theory of Vehicular Traffic”, American Elsevier, New York.
- Sivaloganathan, K., 1974, Free Surface Flow Computations by Characteristics, “Journal Of The Hydraulics Division”, Vol. 4, No. 13707, pp. 543–556.
- Sivaloganathan, K., 1978, Flood Routing By Characteristic Methods, “Journal Of The Hydr. Div.”, Vol. 7, No. 5, pp. 1076–1091.
- Streeter, V. L., 1997, “Mecânica dos Fluidos”, McGraw-Hill do Brasil, Brasil.
- Velasco, R. M. and Marques, W., 2005, Navier-Stokes Equations for Traffic Flow, “Phys. Rev.”, Vol. 4, No. 72, pp. 046102(1–9).

## TRAFFIC FLOW THEORY FOR A MACROSCOPIC SYSTEM

**Adriana Luiza do Prado**

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 019081, CEP81531-990, Curitiba, Paraná  
alprado@mat.ufpr.br

**Eloy Kaviski**

Departamento de Hidráulica e Saneamento, Universidade Federal do Paraná eloy.dhs@ufpr.br

**Liliana M Gramani Cumin** Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 019081, CEP81531-990, Curitiba, Paraná gramani@mat.ufpr.br

**Abstract.** *The theory of traffic flow search to describe in a mathematic way interactions between vehicles and the infrastructure. The infrastructure consists of the systems of roads and in all its operational elements, including devices of control, semaforos and signals. These indispensable theories are in all the models of traffic and tools for analyses of operations in the streets and roads. With the significant increase of the use of automobiles and expansion of the system of road, a study of characteristics of the traffic appeared, through microscopic and macroscopic models. The macroscopic models of the traffic flow, discard the microscopic sight of the traffic in terms of individual speeds of vehicles or the individual components of system (such as the linkings or the crossings), adopting a macroscopic sight of the traffic in a net. The considered variables are intensity of the traffic, density of the road and the average speed. The objective of this work is to decide the macroscopic equations of the traffic flow for specific models of the speed desired through the characteristic method. The new model is compared with currently known models for traffic flow networks under several situations. Finally, the model is used for network simulation.*

**Keywords .** *Traffic Flow Theory, Macroscopic model, Pavari-Fontana Equation, Characteristic Method*