

Modelagem de um Escoamento Laminar e Turbulento para Filtração Tangencial em Membranas Tubulares

Juliana Maria da Silva

Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP
jmaria02@yahoo.com.br

Sergio Rodrigues Fontes

Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP
srf@sc.usp.br

Resumo. *Nesse trabalho, o escoamento laminar e turbulento em membranas tubulares é estudado numericamente. O modelo matemático inclui as equações de conservação de massa e conservação da quantidade de movimento em coordenadas cilíndricas com associadas condições de fronteiras. A velocidade de sucção é descrita pela equação de Darcy, a qual relaciona o fluxo de permeado com a pressão transmembrana. O modelo de turbulência utilizado é o modelo de comprimento de Prandtl. As equações governantes são discretizadas pelo esquema de diferenças finitas em malha deslocada e resolvidas numericamente pelo método Sola. Valores do fluxo de permeado são comparados com resultados experimentais da literatura e distribuição de velocidades é apresentada.*

Palavras chave: *Laminar, Turbulência, Membrana tubular, Filtração tangencial, Modelagem*

1. Introdução

A filtração tangencial por meio de membranas é uma das mais importantes técnicas usadas em processos industriais, por isso, o estudo de escoamentos de fluidos em tubos porosos tem sido um campo ativo de pesquisas nos últimos 30 anos. Aspectos gerais desse processo são apresentados no trabalho de Ripperger e Altmann (2002). Vários trabalhos são encontrados na literatura tratando-se de estudos analíticos, numéricos e experimentais da filtração tangencial (Damak *et al.*, 2004, Granger *et al.*, 1989, Munson-McGee, 2002). Nassehi e Petera (1994) e Nassehi (1998) apresentaram um modelo numérico do escoamento axissimétrico em paredes permeáveis não-uniforme com a aplicação do esquema de elementos finitos. Damak *et al.* (2004) estudaram a combinação das equações de Navier-Stokes e Darcy para simular um escoamento de regime laminar em membranas tubulares.

Nesse artigo é investigado o desenvolvimento hidrodinâmico de escoamento incompressível em membranas tubulares, para os regimes laminar e turbulento. Para isso, as equações de conservação de massa e conservação da quantidade de movimento são utilizadas para modelar o escoamento, enquanto que a lei de Darcy representa o escoamento no meio poroso com pequena porosidade (Beavers e Joseph, 1967), essa combinação de equações é também muito encontrada na literatura (Damak *et al.*, 2004; Nassehi e Petera, 1994; Nassehi, 1998) para descrever esse tipo de escoamento. O efeito de turbulência no escoamento é determinado pelo modelo de comprimento de Prandtl ou modelo de zero equação (Cebeci e Bradshaw, 1984). As equações são discretizadas pelo esquema de diferenças finitas em malha desloca, e resolvidas numericamente pelo método SOLA (Hirt *et al.*, 1975).

São apresentados graficamente os perfis de velocidades. Para avaliação da modelagem do presente trabalho, o fluxo médio transmembrana é comparado com resultados experimentais obtidos da literatura (Yeh *et al.*, 2004; Haneda, 2006).

2. DESCRIÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Considere um escoamento não-desenvolvido, incompressível, isotérmico e axissimétrico em um tubo cilíndrico com paredes porosas. O sistema de coordenadas tem origem na entrada, o eixo z está na linha central, o eixo r é normal à linha central, o raio do tubo é R e o comprimento é L , como ilustrado na Fig. (1).

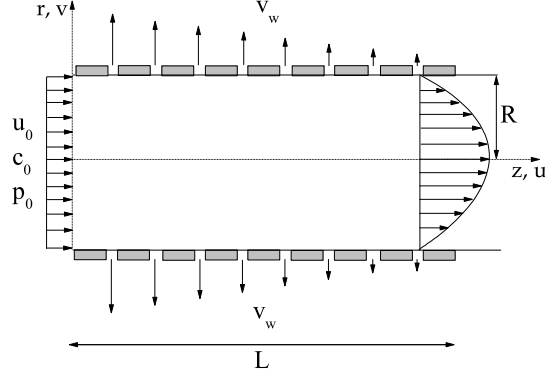


Figura 1: Representação do domínio do problema.

Na filtração tangencial, após um breve período transiente, o fluxo de permeado permanece quase constante, ou seja, em um estado pseudo-estacionário. Nesse estudo é analisada a condição estacionária, porém, uma formulação pseudo-transiente (Fortuna, 2000) é utilizada. Assim, o modelo matemático para os regimes laminar e turbulento é descrito pelas equações definidas nas próximas seções.

2.1. Modelagem laminar

As equações para a modelagem do escoamento laminar na forma conservativa e adimensional são:

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* v^*)}{\partial r^*} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + N^*_u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + N^*_v, \quad (3)$$

em que

$$N^*_u = -\frac{\partial(u^* u^*)}{\partial z^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u^* v^*)}{\partial r^*} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)$$

$$N^*_v = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* v^* v^*)}{\partial r^*} - \frac{\partial(u^* v^*)}{\partial z^*} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \frac{v^*}{r^{*2}} \right)$$

$$Re = \frac{\rho u_0 d}{\mu},$$

em que d é o diâmetro do tubo e μ é viscosidade dinâmica ($kg\ m^{-1}\ s^{-1}$).

Neste trabalho, as transformações utilizadas para adimensionalização são:

$$z^* = \frac{z}{R}, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{u_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad t^* = \frac{t u_0}{R}. \quad (4)$$

2.2. Modelagem turbulenta

Para a modelagem turbulenta utilizou-se o modelo de comprimento de Prandtl ou zero equação.

No regime turbulento, a velocidade em um ponto apresenta-se como a velocidade média acrescida de uma perturbação aleatória, variando continuamente ao longo do tempo. A velocidade real é denominada velocidade instantânea e é representada pela soma da velocidade média e da flutuação:

$$v = \bar{v} + v' \quad (5)$$

em que v' representa a variação aleatória da velocidade ou a flutuação da velocidade.

A velocidade média no tempo T é definida por:

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt, \quad (6)$$

Sendo assim, substituindo-se nas equações (1), (2) e (3) as variáveis em termos de seus valores médios e flutuantes, calculando-se a média no tempo e utilizando-se as condições de Reynolds (Roma, 2003), obtêm-se as equações na forma adimensional para o escoamento turbulento:

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial r^* v^*}{\partial r^*} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + N^*_u, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + N^*_v, \quad (9)$$

em que

$$\begin{aligned} N^*_u &= -\frac{\partial(u^*u^*)}{\partial z^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*u^*v^*)}{\partial r^*} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) + \frac{2}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(2\mu_t^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_t^*}{r^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) + \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\mu_t^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) \right] \right\}, \\ N^*_v &= -\frac{\partial(u^*v^*)}{\partial z^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*v^*v^*)}{\partial r^*} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - \frac{v^*}{r^{*2}} \right) + \frac{2}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial r^*} \left(2\mu_t^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu_t^*}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial r^*} - 2\mu_t^* \frac{v^*}{r^{*2}} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\mu_t^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) \right] \right\}, \\ \mu_t^* &= \frac{Re}{2} l^{*2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right), \end{aligned}$$

$\mu_t^* = \frac{\mu_t}{\mu}$ é a viscosidade dinâmica turbulenta ($kg\ m^{-1}s^{-1}$) e l^* é chamado comprimento de mistura e é definido como (Cebeci e Bradshaw, 1984):

$$l^* = 0,14 - 0,08(1 - y^*)^2 - 0,06(1 - y^*)^4, \quad (10)$$

em que $y^* = 1 - r^*$ denota a distância normal a parede porosa e $\bar{\kappa}$ foi estimado com valor 0,4 (Cebeci e Bradshaw, 1984). Em regiões próximas às paredes, utiliza-se uma equação apropriada para modelar esta região do escoamento, a função de amortecimento de Van Driest (Cebeci e Bradshaw, 1984):

$$l = \bar{\kappa} y^* [1 - \exp(-y^*/A)], \quad (11)$$

em que $A = A^+ \mu(\tau_w/\rho)^{-1/2}$, $A^+ = 26 \exp(-5,9v_w)$ e $\tau_w = 0,03325 \rho u_0^2 \left(\frac{2\mu}{du_0} \right)$ (Fox e MacDonald, 1995).

2.3. Condições de Contorno

Devido a simetria, somente a região entre a parede ($r^* = 1$) e a linha central do tubo ($r^* = 0$) foi numericamente considerada. Assim, as condições de contorno na forma adimensional utilizadas no presente estudo são:

$$z^* = 0, \quad 0 \leq r^* \leq 1: \quad u^* = 1, \quad v^* = 0; \quad (12)$$

$$z^* = \frac{L}{R^*}, \quad 0 \leq r^* \leq 1: \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = 0; \quad (13)$$

$$r^* = 0, \quad 0 \leq z^* \leq \frac{L}{R}: \quad \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = 0, \quad v^* = 0; \quad (14)$$

$$r^* = 1, \quad 0 \leq z^* \leq \frac{L}{R}: \quad u^* = 0, \quad v^*_w = K(p^*_R - p^*_e), \quad (15)$$

em que p_e é a pressão externa adimensional do tubo, p^*_R é a pressão adimensional na parede porosa, κ é a permeabilidade da parede porosa ($mPa^{-1}s^{-1}$), K é igual a $\kappa \rho u_0$ (adimensional) e v_w é definido pela lei de Darcy:

$$v_w = \kappa \Delta p. \quad (16)$$

2.4. Método Numérico

As equações de (1) a (3) e de (7) a (9) associadas com as condições de contorno de (12) a (15) são aproximadas por diferenças finitas em malha deslocada, na qual a célula tem dimensões Δz por Δr , em que a variável pressão p esta definida no centro da célula, enquanto as velocidades u e v são posicionadas nas faces laterais, que distam do centro $\pm \frac{\Delta z}{2}$ e $\pm \frac{\Delta r}{2}$, respectivamente.

As aproximações para as derivadas temporais são feitas utilizando-se diferenças avançadas (Euler explícito) de primeira ordem, os gradientes de pressão, bem como a equação de conservação de massa e os outros termos das equações da quantidade de movimento, com exceção dos termos convectivos, são aproximados por diferenças centrais de segunda ordem. Os termos convectivos são aproximados pelo esquema de segunda ordem HPLA (Hybrid Linear Parabolic Approximation) (Zhu, 1992).

O campo de velocidades e pressão são calculados pelo método SOLA (Hirt *et al.*, 1975; Fortuna, 2000). Esse método é caracterizado pelo esquema de correção de pressão e velocidades em cada passo no tempo, e pode ser resumido nos seguintes passos:

passo 1: a partir dos valores u , v e p no nível de tempo n , calcula-se os valores de $\bar{u}_{i+1/2,j}^{*(n+1)}$ e $\bar{v}_{i,j+1/2}^{*(n+1)}$ definidos pelas equações

$$\bar{u}_{i+1/2,j}^{*(n+1)} = u_{i+1/2,j}^{*(n)} - \Delta t^* \left(\frac{p_{i+1,j}^{*(n)} - p_{i,j}^{*(n)}}{\Delta z^*} + N_{u_{i+1/2,j}}^{*(n)} \right), \quad (17)$$

$$\bar{v}_{i,j+1/2}^{*(n+1)} = v_{i,j+1/2}^{*(n)} - \Delta t^* \left(\frac{p_{i,j+1}^{*(n)} - p_{i,j}^{*(n)}}{\Delta r^*} + N_{v_{i,j+1/2}}^{*(n)} \right), \quad (18)$$

as quais são versões discretas das velocidade. Em que Δt^* é o passo no tempo.

passo2: para cada célula (i, j)

(i) calcula-se a correção para a pressão definida pela expressão:

$$\delta p_{i,j}^{(k)} = \frac{-w D_{i,j}}{2\Delta t^* \left(\frac{1}{(\Delta z^*)^2} + \frac{1}{(\Delta r^*)^2} \right)} \quad (19)$$

em que D é a dilatação $\left(\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{i,j} + \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{i,j} \right)$, w é um fator de relaxação, com $1 < w < 2$ e k é o número de iterações.

(ii) determina-se $p_{i,j}^*$

$$p_{i,j}^{*(n+1,k+1)} = p_{i,j}^{*(n+1,k)} + \delta p_{i,j}^{*(k)} \quad (20)$$

(iii) corrige-se as velocidades nas faces das células por meio das expressões:

$$u_{i+1/2,j}^{*(n+1,k+1)} = \bar{u}_{i+1/2,j}^{*(n+1,k)} + \Delta t^* \frac{\delta p_{i,j}^{*(k)}}{\Delta z^*}, \quad u_{i-1/2,j}^{*(n+1,k+1)} = \bar{u}_{i-1/2,j}^{*(n+1,k)} - \Delta t^* \frac{\delta p_{i,j}^{*(k)}}{\Delta z^*}, \quad (21)$$

$$v_{i,j+1/2}^{*(n+1,k+1)} = \bar{v}_{i,j+1/2}^{*(n+1,k)} + \Delta t^* \frac{\delta p_{i,j}^{*(k)}}{\Delta r^*}, \quad v_{i,j-1/2}^{*(n+1,k+1)} = \bar{v}_{i,j-1/2}^{*(n+1,k)} - \Delta t^* \frac{\delta p_{i,j}^{*(k)}}{\Delta r^*}, \quad (22)$$

passo 3: repete-se o passo (2) até que

$$\max |D_{i,j}| \leq \epsilon \quad (23)$$

Com essa condição satisfeita, as velocidades u e v estão no nível de tempo $t = t_0 + \Delta t$.

passo 5: tomando-se adequado valor para Δt , retorna-se ao passo (1) até a convergência.

2.4.1. Controle do passo no tempo

A forma explícita do cálculo de u e v impõe restrições severas aos valores permitidos de Δt . A cada ciclo o tamanho do passo no tempo é obtido segundo as restrições (Fortuna, 2000):

(i) o fluido não pode percorrer uma distância maior que o comprimento de uma célula a cada passo no tempo:

$$\Delta t^* < \min\left(\frac{\Delta z^*}{|u^*|_{max}}, \frac{\Delta r^*}{|v^*|_{max}}\right), \quad (24)$$

(ii) a segunda restrição de estabilidade é devido à discretização das equações de conservação da quantidade de movimento e envolve o número de Reynolds e a viscosidade turbulenta, caso o escoamento seja turbulento:

$$\Delta t^* < \frac{Re}{2\mu_{t\ max}^*} \left(\frac{\Delta z^{*2} \Delta r^{*2}}{\Delta z^{*2} + \Delta r^{*2}}\right). \quad (25)$$

em que $\mu_{t\ max}^* = \max\{\mu_{t\ i,j}^*\}$

3. Resultados e discussões

O método apresentado acima foi aplicado para simular o escoamento da água em membranas tubulares, com diâmetros de 0,0063 m para o caso laminar e 0,0056 m para o turbulento, comprimento 30 vezes o raio e pressão transmembrana igual 1×10^5 Pa.

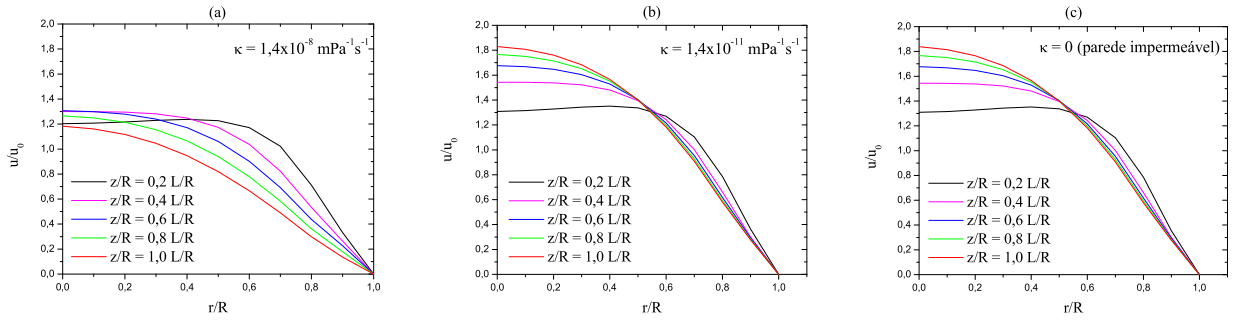


Figura 2: Perfil de velocidade axial como função da coordenada radial para diferentes posições axiais para o regime laminar, $Re = 100$.

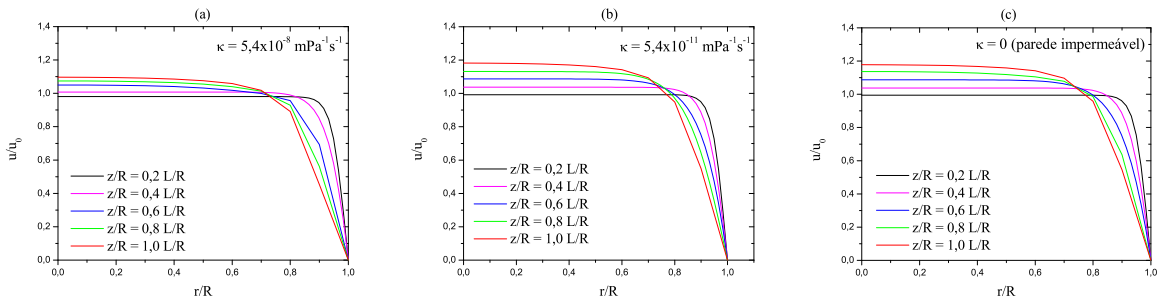


Figura 3: Perfil de velocidade axial como função da coordenada radial para diferentes posições axiais para o regime turbulento, $Re = 4000$.

Nas Fig. (2) e (3) apresentam-se os gráficos dos perfis de velocidade para diferentes posições axiais e para diferentes permeabilidades. Na Fig. (2), observa-se uma razoável diferença entre os perfis do caso (a), (b) e (c), em (a) a permeabilidade da membrana é maior, o que faz com que a sucção de massa junto à superfície permeável seja maior provocando, assim, uma desaceleração do escoamento, fazendo-se com que a velocidade na região central do tubo diminua, já em membranas que possuem baixa permeabilidade, como no caso (b), a sucção de massa quase não interfere no desenvolvimento dos perfis de velocidade, isso pode ser observado quando comparado com o gráfico (c) no qual a parede é considerada impermeável, nesse caso a diferença dos perfis de velocidade de (b) e (c) é praticamente inexistente. Na Fig. (3) devido ao escoamento ser turbulento,

a permeabilidade alta (Fig. (3 a)) não diminui a velocidade axial no centro do tubo a medida que a distância da entrada aumenta, mas ocorre uma pequena diminuição nas velocidades axiais centrais em relação aos perfis dos gráfico (b) e (c).

Essa interferência da permeabilidade no escoamento pode também ser observada na Fig. (4), a qual apresenta gráficos da variação do fluxo de permeado médio como função da permeabilidade da membrana. Observa-se um razoável crescimento do fluxo de permeado médio quando se aumenta o valor da permeabilidade.

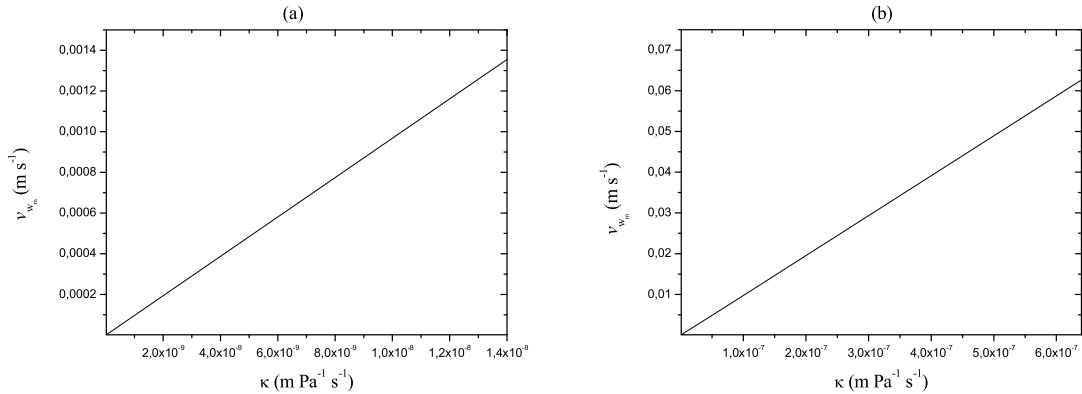


Figura 4: Gráfico do fluxo de permeado médio como função da permeabilidade da membrana para: (a) regime laminar, $Re = 100$; (b) regime turbulento, $Re = 4000$.

A fim de verificar a validação da modelagem, os resultados numéricos do presente trabalho, para o escoamento da água, são comparados com os resultados experimentais da literatura (Yeh *et al.*, 2004; Haneda, 2006), observa-se na Fig. (5), uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais.

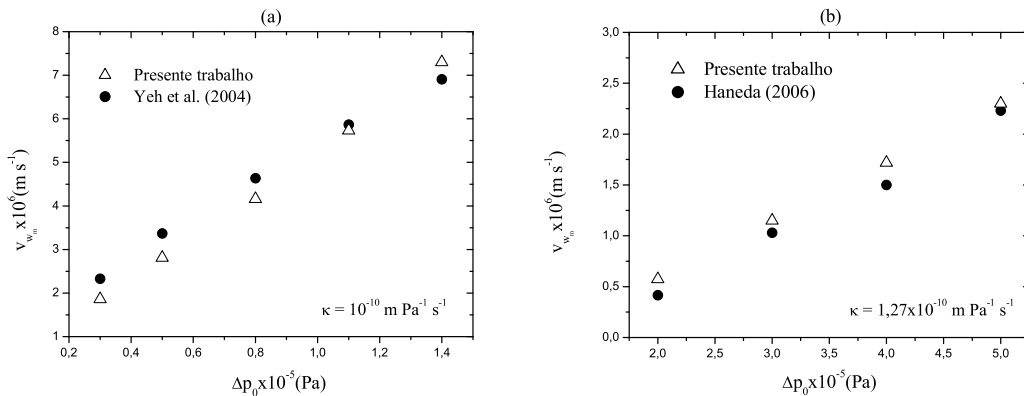


Figura 5: Comparação dos resultados numéricos desse trabalho com resultados experimentais para fluxo de permeado médio do escoamento da água como função da pressão transmembrana inicial para: (a) regime laminar, $Re = 527,5$; (b) regime turbulento, $Re = 22691$.

4. Conclusões

Este artigo descreve um modelo matemático para simular escoamentos em um processo de filtração tangencial em membranas tubulares. O escoamento é descrito pela equação de Navier-Stokes bidimensional em coordenadas cilíndricas e pela equação de Darcy, a qual representa a variação da velocidade de sucção na parede permeável.

Apresentou-se resultados para o desenvolvimento da velocidade axial e variação do fluxo médio em função da permeabilidade da membrana. O modelo foi cuidadosamente analisado por meio de comparações com resultados experimentais. A partir da análise dos resultados produzidos nessa modelagem, pode-se concluir que o modelo numérico se mostrou adequado com o problema físico estudado.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro dessa pesquisa.

6. Referências

- Beavers, G. S. and Joseph, D. D., 1967, Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall, “Journal of Fluid Mechanics”, Vol. 30, pp. 197–207.
- Cebeci, T. and Bradshaw, P., 1984, “Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer”, Springer-Verlag, New York, Inc.
- Damak, K., Zeghami, B., and Schmitz, P., 2004, A New Navier-Stokes and Darcy’s Law Combined Model for Fluid Flow in Crossflow Filtration Tubular Membranes, “Desalination”, Vol. 161, pp. 67–77.
- Fortuna, A. O., 2000, “Técnica Computacionais para Dinâmica dos Fluidos - Conceitos Básicos e Aplicações”, EdUSP, São Paulo, Brasil.
- Fox, R. W. and MacDonald, A. T., 1995, “Introdução à Mecânica dos Fluidos”, Livros Tecnicos e Científicos, RJ.
- Granger, J., Dodds, J., and Midoux, N., 1989, Laminar Flow in Channels with Porous Walls, “The Chemical Engineering Journal”, Vol. 42, pp. 193–204.
- Haneda, R. N., 2006, Investigação do Desempenho de Diferentes Estruturas Microporosas Tubulares na Retenção de Bactérias em Suspensão por Microfiltração Tangencial, Master’s thesis, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.
- Hirt, C. W., Nicolas, B. D., and Romero, N. C., 1975, SOLA - A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows, “Los Alamos Scientific Report LA-5852”, Vol. .
- Munson-McGee, S. H., 2002, An Approximate Analytical Solution for the Fluid Dynamics of Laminar Flow in a Porous Tube, “Journal of Membrane Science”, Vol. 197, pp. 223–230.
- Nassehi, V., 1998, Modelling of Combined Navier-Stokes and Darcy Flows in Crossflow Membrane Filtration, “Chemical Engineering Science”, Vol. 53, pp. 1253–1265.
- Nassehi, V. and Petera, J., 1994, A New Least-Squares Finite Element Model for Combined Navier-Stokes and Darcy Flows in Geometrically Complicated Domains with Solid and Porous Boundaries, “International Journal for Numerical Methods in Engineering”, Vol. 37, pp. 1609–1620.
- Roma, W. N. L., 2003, “Fenômenos de Transporte para Engenharia”, RiMa Editora.
- Yeh, H. M., Dong, J. H., and Shi, M. Y., 2004, Momentum Balance Analysis of Flux and Pressure Declines in Membrane Ultrafiltration Along Tubular Modules, “Journal of Membrane Science”, Vol. 241, pp. 335–345.
- Zhu, J., 1992, On the Higher-Order Bounded Discretization Schemes for Finite Volume Computations of Incompressible Flows, “Computation Methods Application Mechanics Engineering”, Vol. 98, pp. 345–360.

Modeling of a Laminar and a Turbulent Flow in Cross-Flow Filtration Tubular Membranes

Juliana Maria da Silva

Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP
jmaria02@yahoo.com.br if any

Sergio Rodrigues Fontes

Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP
srf@sc.usp.br if any

Abstract. *In this work, a laminar and a turbulent flow in a tubular membrane is studied numerically. The mathematical model comprises the conservation of mass and conservation of momentum equations in cylindrical coordinates with the associated boundary conditions. The suction velocity is described by Darcy’s law, that relates the permeate flux with the transmembrane pressure. The turbulence model utilized is the Prandtl mixing length model. The governing equations are discretized by a finite-difference scheme on a staggered grid and solved numerically by the method called SOLA. Values to permeate flux are compared with experimental results of literature obtained. Velocity distributions are presented..*

Keywords *Laminar, Turbulence, Tubular membrane, Cross-flow, Modelling*