

## ESTUDO COMPARATIVO DE QUATRO DIFERENTES MÉTODOS DE DIFUSÃO VISCOSA PARA APLICAÇÃO NO MÉTODO DE VÓRTICES

**Victor Santoro Santiago**

vsantoro@ig.com.br

**Gustavo C. R. Bodstein**

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica – Poli/COPPE  
Centro de Tecnologia, Bloco G, sala 204 – Ilha do Fundão, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ – Brasil  
gustavo@mecanica.coppe.ufrj.br

**Resumo.** O Método de Vórtices vem ganhando popularidade em diversas áreas da ciência, sobretudo na aplicação em problemas de mecânica dos fluidos. Tal crescimento se deve à utilização de uma metodologia puramente Lagrangiana, sem a necessidade de utilizar uma malha, o que em muito facilita o estudo de escoamentos externos ao redor de corpos com geometrias complexas. No método de vórtices os fenômenos de transporte de vorticidade por difusão e convecção são separados para resolver a equação de transporte da vorticidade. Diversas metodologias vêm sendo desenvolvidas para modelar a etapa difusiva. Neste trabalho são implementados quatro métodos de simulação da difusão: Avanço Randômico (MAR); Redistribuição de Vorticidade (MRV); Crescimento do Núcleo Modificado (MCNM); e Velocidade de Difusão (MVD). Utilizando-se como referência a solução analítica puramente difusiva para o Vórtice de Lamb, os quatro métodos são comparados dos pontos de vista de acurácia e custo computacional visando a aplicação destes ao Método de Vórtices. Por último, o MCNM mostra acurácia superior ao MAR no problema convectivo/difusivo de simulação do desenvolvimento da camada limite de Blasius sobre placa plana.

**Palavras-chave:** método do avanço randômico, método da redistribuição de vorticidade, método do crescimento do núcleo modificado, método da velocidade de difusão, método de vórtices.

### 1.Introdução

O estudo de escoamentos externos ao redor de corpos com geometria complexa representa uma área de grande interesse para a ciência e, sobretudo, para a engenharia, uma vez que situações práticas deste tipo ocorrem com frequência. Pode-se citar como exemplos os escoamentos ao redor de corpos rombudos, como cilindros de seção circular, e ao redor de corpos esbeltos, como aerofólios. A abordagem desses problemas utilizando métodos numéricos Eulerianos, baseados em malhas, nem sempre é conveniente para escoamentos externos, uma vez que o refinamento espacial das malhas pode acarretar erros por difusão numérica e/ou um esforço computacional desnecessário. Assim, o Método de Vórtices Discretos apresenta-se como alternativa viável, pois sua metodologia puramente Lagrangiana permite o completo abandono das malhas e sua modelagem se concentra nas regiões rotacionais do escoamento, que passa a ser representada por uma nuvem de vórtices. Na sua abordagem mais utilizada, o Método de Vórtices Discretos separa algoritmicamente os processos convectivo e difusivo durante a solução da equação de transporte da vorticidade.

A primeira metodologia aplicada ao Método de Vórtices para tratar a difusão viscosa foi desenvolvida por Chorin (1973). Denominado Método do Avanço Randômico (MAR), este foi rapidamente difundido devido a sua facilidade de implementação e rapidez de execução. Porém, a característica estocástica do método fez com que outras alternativas de natureza determinística fossem buscadas. Shankar e Van Dommelen (1996) propuseram o Método da Redistribuição de Vorticidade (MRV), cuja principal característica é a redistribuição da intensidade de um vórtice entre seus vizinhos através da solução de um sistema de equações algébricas que otimiza este processo. Quando não há solução para este sistema, novos vórtices são criados e passam a integrar a nuvem de vórtices. Ogami e Akamatsu (1991) desenvolveram o Método de Velocidade de Difusão (MVD), o qual simula a difusão da vorticidade através da inserção de uma velocidade extra no processo convectivo puramente devido à difusão. Tal velocidade é relacionada à viscosidade cinemática do fluido, ao campo de vorticidade e ao gradiente do campo de vorticidade. Rossi (1996) apresentou uma correção ao Método do Crescimento do Núcleo proposto por Leonard (1980), o qual havia sido abandonado após Greengard (1985) provar que esta metodologia não converge para as equações de Navier-Stokes. No método de Rossi (1996), denominado Método do Crescimento do Núcleo Modificado (MCNM), o campo de vorticidade evolui à medida que o raio do núcleo de desingularização dos vórtices pontuais cresce até um valor máximo. Neste ponto é necessário que o vórtice seja dividido, dando origem a novos vórtices, cujos raios podem novamente se expandir. Este processo garante a convergência do método. Takeda *et al.* (1997) fez um estudo comparativo desses quatro métodos e concluiu que o MRV produz melhores resultados que os demais. No entanto, o estudo não mantém o número de vórtices aproximadamente igual entre os métodos, o que inviabiliza uma comparação mais efetiva.

Utilizando-se como referência a solução analítica puramente difusiva para o Vórtice de Lamb, este artigo analisa novamente, do ponto de vista de acurácia e custo computacional, os mesmos quatro métodos de simulação da difusão viscosa estudados por Takeda *et al.* (1997): MAR, MRV, MCNM e MVD. Os resultados permitem apontar mais claramente algumas vantagens e desvantagens de cada método na aplicação destes ao Método de Vórtices. Em seguida, são apresentados alguns resultados preliminares obtidos ao se comparar o MCNM ao MAR para o estudo do problema convectivo/difusivo de desenvolvimento da camada limite de Blasius sobre placa plana.

## 2. Formulação Matemática Geral do Método dos Vórtices Discretos

O Método de Vórtices Discretos se constitui em uma ferramenta extremamente eficaz para simular escoamentos onde a vorticidade se concentra em regiões finitas do domínio fluido e a dinâmica de transporte convectivo/difusivo da vorticidade é modelada através do movimento de uma nuvem de vórtices discretos. O desenvolvimento no tempo do campo de vorticidade é calculado a partir da equação de transporte da vorticidade. No caso bidimensional, foco deste trabalho, o termo de esticamento e deformação das linhas de vorticidade é nulo e a vorticidade possui apenas uma componente não nula, a componente  $\omega$  normal ao plano do escoamento. Logo, a equação de transporte da vorticidade se reduz a

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega. \quad (1)$$

Considerando-se a discretização no tempo da Eq. (1) necessária para se calcular numericamente a evolução temporal do campo de vorticidade, pode-se impor uma separação dos fenômenos de transporte difusivo e convectivo durante um mesmo intervalo de tempo. Partindo desta concepção, Chorin (1973) propôs a decomposição da Eq. (1) em dois operadores, um puramente convectivo e outro puramente difusivo, dando origem às seguintes equações

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \omega = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega. \quad (3)$$

As Equações (2) e (3) representam, deste modo, o transporte da vorticidade devido aos efeitos convectivo e difusivo, respectivamente, presentes no escoamento. A solução da Eq. (3), em particular, é o objeto dos diversos métodos implementados e comparados neste trabalho. A seguir tais métodos são apresentados com mais profundidade, evidenciando suas particularidades e seus detalhes de implementação.

## 3. Apresentação Geral dos Métodos de Difusão Viscosa Implementados

### 3.1. Método do Avanço Randômico - MAR

O MAR foi inicialmente desenvolvido por Chorin (1973) para aplicação em escoamentos com alto número de Reynolds e tem sido bastante utilizado desde então. Seu princípio fundamental é substituir o processo difusivo por deslocamentos randômicos de partículas que carregam vorticidade de modo a simular o campo de vorticidade.

A Eq. 3 possui solução analítica para um vórtice inicialmente potencial, a qual pode ser escrita na forma adimensional como

$$\omega(r, t) = Re \frac{\Gamma}{4\pi t} \exp\left(-Re \frac{r^2}{4t}\right). \quad (4)$$

Pode-se mostrar que a solução da Eq. (4) pode ser reproduzida pelo movimento aleatório de uma nuvem vórtices, de maneira similar ao movimento Browniano molecular. Chorin (1973) demonstrou que, quando o número de vórtices tende ao infinito, o movimento aleatório da nuvem aproxima-se da solução exata da Eq. (4). Lewis (1991) propôs uma alteração à metodologia apresentada por Chorin (1973). Se a probabilidade de se encontrar um vórtice em uma determinada posição no instante  $t$  for representada por  $\omega(t)$ , pode-se encontrar os deslocamentos radial e polar deste vórtice,  $\Delta r$  e  $\Delta \theta$ , respectivamente, invertendo-se a Eq. (4) para obter

$$\Delta r = \sqrt{\frac{4t}{Re} \ln\left(\frac{1}{P}\right)} \quad \text{e} \quad \Delta \theta = 2\pi Q, \quad (5a \text{ e } 5b)$$

onde  $P$  e  $Q$  são números randômicos entre 0 e 1 retirados de uma distribuição estatisticamente uniforme. As Eq. (5a) e (5b) podem ser escritas em coordenadas cartesianas como

$$\begin{pmatrix} \Delta x_D \\ \Delta y_D \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \Delta r \cos(\Delta \theta) \\ \Delta r \sin(\Delta \theta) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

### 3.2 Método da Redistribuição de Vorticidade – MRV

O MRV, desenvolvido por Shankar e Van Dommelen (1996), se propôs a ser uma alternativa determinística ao MAR, mantendo a grande vantagem de ser completamente livre de malhas, o que não ocorre com o Método da Troca de Intensidade das Partículas – MTIP (Cottet e Koumoutsakos, 1999). Tanto o MRV quanto o MTIP baseiam-se na troca de parcelas de circulação entre vórtices vizinhos, o que simula o transporte difusivo de vorticidade.

O algoritmo do MRV é estruturado para achar a parcela de circulação  $f_{ij}^n$  que é transferida do vórtice  $i$  para o vórtice  $j$  (vórtices vizinhos) no instante de tempo  $n$ . Vórtices vizinhos são aqueles que se encontram a uma distância inferior à distância de difusão, a qual é da ordem de  $h_v = \sqrt{\nu\Delta t}$ . O sistema para a determinação de  $f_{ij}^n$  é obtido comparando-se a transformada de Fourier do campo de vorticidade obtido pela redistribuição com a transformada de Fourier do campo de vorticidade exato, e representa uma aproximação de ordem  $\Delta t$ . Deste modo, o sucesso do método reside em se achar uma solução positiva válida para o seguinte sistema,

$$\sum_j f_{ij}^n = 1, \quad (7)$$

$$\sum_j f_{ij}^n \xi_{1ij} = 0, \quad \sum_j f_{ij}^n \xi_{2ij} = 0, \quad (8)$$

$$\sum_j f_{ij}^n \xi_{1ij}^2 = 2, \quad \sum_j f_{ij}^n \xi_{1ij} \xi_{2ij} = 0, \quad \sum_j f_{ij}^n \xi_{2ij}^2 = 2, \quad (9)$$

onde  $\vec{\xi}_{ij} = (\bar{x}_j - \bar{x}_i)/h_v$ , ou seja,  $\xi_{1ij}$  e  $\xi_{2ij}$  são as componentes cartesianas de  $\vec{\xi}_{ij}$ . Assim, o vórtice  $j$  está na vizinhança do vórtice  $i$  se  $|\bar{x}_j - \bar{x}_i| \leq Rh_v$ , onde  $R$  é uma constante. Shankar e Van Dommelen (1996) definem o valor de  $R$  como  $R = \sqrt{12}$ . O sentido físico das Eqs.(7), (8) e (9) pode ser entendido respectivamente como sendo a conservação de circulação, conservação do centro de vorticidade e a correta expansão do diâmetro médio, ou seja, a conservação do momento linear e do momento angular. Outra restrição imposta é de que  $f_{ij}^n > 0$ , que representa o fato de que a vorticidade não pode ser criada ou destruída no interior do fluido.

O sistema formado pelas Eqs.(7), (8) e (9) é do tipo de “fase I” em programação linear e pode ser resolvido por deslocamento de variáveis. Entretanto, Shankar e Van Dommelen (1996) propuseram uma transformação de variáveis do tipo  $w_j = f_{ij}^n - 1/2$ . Assim, o universo alvo da solução do sistema passa de  $[0,1]$  para  $[-1/2,1/2]$ , o que permite dizer que a norma máxima do vetor solução é  $\|\vec{w}\|_\infty = \max_j \{|w_j|\}$ . O sistema, então, pode ser resolvido por um algoritmo de otimização que minimize a norma máxima até um valor limite de  $1/2$ . A partir deste valor não é possível encontrar solução, ou seja, faz-se necessário adicionar novos vórtices ao sistema. Shankar e Van Dommelen (1996) citam a distância de  $\sqrt{6}$  do vórtice  $i$  para o nascimento de novos vórtices, em intervalos de  $30^\circ$ , até que o sistema apresente solução possível.

O sistema formado pelas Eqs.(7), (8) e (9) pode ser reescrito para cada vórtice  $i$  como

$$A\vec{w}_j = \vec{b}. \quad (10)$$

Trocando a igualdade acima por  $\geq$  e  $\leq$  e inserindo-se  $\|\vec{w}\|_\infty$  como incógnita, pode-se resolver o problema através de uma rotina de otimização que minimize  $\|\vec{w}\|_\infty$ , como se segue

$$\begin{pmatrix} A & \vec{0} \\ I & \vec{1} \\ -A & \vec{0} \\ -I & \vec{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w}_j \\ \|\vec{w}\|_\infty \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \\ -\vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

A primeira e a terceira equações do sistema de Eqs. (11) são:  $A\vec{w}_j \geq \vec{b}$  e  $A\vec{w}_j \leq \vec{b}$ , ou seja,  $A\vec{w}_j = \vec{b}$ . A segunda e a quarta equações são:  $\|\vec{w}\|_\infty \geq -\vec{w}_j$  e  $\|\vec{w}\|_\infty \geq \vec{w}_j$ , ou seja,  $\|\vec{w}\|_\infty = \max_j \{|w_j|\}$ . Deste modo, o objetivo se torna resolver o sistema de equações (11), minimizando-se o valor de  $\|\vec{w}\|_\infty$  e, caso  $\|\vec{w}\|_\infty > 1/2$ , novos vórtices devem ser acrescentados. Neste trabalho as Eqs. (11) são resolvidas utilizando-se a rotina DDLPRS da IMSL.

### 3.3 Método da Velocidade de Difusão - MVD

O Método da Velocidade de Difusão desenvolvido por Ogami e Akamatsu (1991) acrescenta uma parcela de velocidade relativa à difusão da vorticidade para o deslocamento de cada vórtice. Tal equacionamento é obtido manipulando-se a equação de Navier-Stokes e comparando o resultado com a equação que descreve o movimento de uma função 2D qualquer. Os detalhes podem ser vistos em Ogami e Akamatsu (1991).

Define-se então a velocidade de difusão  $\vec{u}_d$ , cujas componentes em coordenadas cartesianas são

$$u_d = -\frac{\nu}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad \text{e} \quad v_d = -\frac{\nu}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} . \quad (12a, 12b)$$

Para que se obtenha uma distribuição de vorticidade suavizada, desingulariza-se os vórtices pontuais, o que neste trabalho foi realizado através da utilização do vórtice de Lamb. Assim, a vorticidade induzida pela nuvem de vórtices  $j$  sobre o vórtice  $i$  pode ser escrita como

$$\omega_i = \frac{1}{\pi \sigma^2} \sum_j \exp \left[ -\frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{\sigma^2} \right] \Gamma_j , \quad (13)$$

sendo  $\sigma$  o raio do núcleo do vórtice. Substituindo-se a Eq. (13) nas Eqs. (12a) e (12b), chega-se às componentes da velocidade de difusão em coordenadas cartesianas

$$u_{di} = \frac{2\nu}{\pi \sigma^4 w_i} \sum_j (x_i - x_j) \exp \left[ -\frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{\sigma^2} \right] \Gamma_j , \quad (14)$$

$$v_{di} = \frac{2\nu}{\pi \sigma^4 w_i} \sum_j (y_i - y_j) \exp \left[ -\frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{\sigma^2} \right] \Gamma_j . \quad (15)$$

As Eqs. (14) e (15) representam a parcela a ser somada na velocidade de convecção que permite a determinação da posição futura dos vórtices.

### 3.4 Método do Crescimento do Núcleo Modificado – MCNM

O método do crescimento do núcleo de Leonard (1980) estabelece uma aproximação para a evolução no tempo do campo de vorticidade devido à difusão através do crescimento do raio do núcleo dos vórtices. Este método deixou de ser estudado quando Greengard (1985) provou que sua solução não converge para a equação de Navier-Stokes para longos tempos de simulação. Rossi (1996) apresentou uma modificação que tornou o método de Leonard convergente.

A modificação implementada por Rossi (1996), denominada “refinamento espacial”, torna o método do crescimento do núcleo convergente porque se baseia na escolha de parâmetros numéricos que controlam a evolução temporal do raio do núcleo, realizando uma divisão dos vórtices em intervalos regulares. Assim, o Método do Crescimento do Núcleo Modificado (MCNM) de Rossi tornou-se uma opção como um método de difusão determinístico, de fácil implementação e completamente livre de malhas. Outra particularidade do MCNM é o fato deste não utilizar a decomposição da equação de transporte de vorticidade, Eq. (1), nas Eqs. (2) e (3). Apesar de não pesar negativamente na convergência, esta decomposição introduz um erro numérico que não está presente no MCNM.

No MCNM, a taxa de crescimento do raio do núcleo é determinada por

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sqrt{\nu} . \quad (16)$$

Define-se os parâmetros numéricos  $\alpha$  e  $l$  que determinam a frequência do referido refinamento espacial. Deste modo, um vórtice com intensidade inicial  $\gamma$  terá seu raio variando de um valor mínimo inicial  $\alpha l$  à um valor máximo  $l$ , quando sofrerá uma divisão em quatro novos vórtices, como sugerido por Rossi (1996), com vorticidades de  $\gamma/4$ . Estes novos vórtices são posicionados a  $90^\circ$  uns dos outros e a uma distância  $r$  em torno do vórtice original, o que garante a conservação do momento de segunda ordem. O valor de  $r$  é dado por

$$r = 2\sigma \sqrt{1 - \alpha^2} . \quad (17)$$

#### 4. Difusão de um Vórtice Pontual

O problema clássico de difusão de um vórtice pontual é simulado pelo MAR, MRV, MVD e MCNM, tendo em vista a existência de uma solução analítica que permite uma comparação geral entre estes quatro métodos de difusão. Entretanto, a escolha dos diversos parâmetros numéricos influencia os resultados encontrados e dificulta um pouco esta comparação, uma vez que tais parâmetros não mantêm correspondência entre os diferentes métodos analisados.

##### 4.1 Formulação do Problema de Difusão para um Vórtice Pontual

A taxa de variação da vorticidade de um vórtice pontual centrado na origem, com intensidade inicial  $\Gamma$ , é descrita pela Eq. (3), a qual em coordenadas polares pode ser escrita como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right\}. \quad (18)$$

Batchelor (1970) apresenta a solução para a Eq. (18), relacionando a distribuição espacial com a temporal. O resultado pode ser expresso por

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right). \quad (19)$$

Definindo-se as variáveis adimensionais  $\tau = \frac{\nu t}{L^2}$ ,  $r^* = \frac{r}{L}$ ,  $\omega^* = \frac{2\pi L^2 \omega}{\Gamma}$ , a Eq. (19) se torna

$$\omega^* = \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{r^{*2}}{4\tau}\right). \quad (20)$$

##### 4.2. Resultados para o Vórtice Pontual

A seguir são apresentados os resultados para o caso de difusão de um vórtice pontual, localizado na origem, simulada pelo MAR, MRV, MVD e MCNM, de acordo com a adimensionalização mostrada na Eq. (20). Após a simulação, o campo de vorticidade é determinado utilizando-se a metodologia descrita por Lewis (1991), onde são traçados anéis concêntricos, sobre os quais é calculada a vorticidade de acordo com o número de vórtices encontrados em cada anel. Alternativamente, o campo de vorticidade também é calculado desingularizando-se os vórtices e aplicando o princípio da superposição de efeitos, ou seja, utilizando-se a Eq. (13) para cada ponto de interesse.

###### 4.2.1. Método do Avanço Randômico – MAR

Lewis (1991) propõe a simulação da difusão de um vórtice pontual através do deslocamento randômico de um conjunto de  $N$  vórtices com intensidade  $2\pi/N$ , todos partindo da origem e se deslocando como descrito na seção 3.1. Tal procedimento foi executado para  $N = 1000$ , utilizando inicialmente um único passo no tempo ( $NT = 1$ ). Os resultados para  $\tau = 1$  e  $\tau = 2$ , obtidos calculando-se  $\omega^*$  através de anéis concêntricos, são comparados à Eq. (20) na Fig. 1, onde se observa alguma dispersão dos resultados calculados pelo MAR em relação à curva teórica.

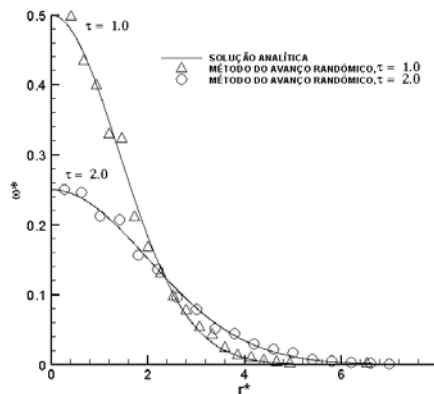


Figura 1. Vórtice pontual – MAR:  $N = 1000$  e  $NT = 1$ .

As Fig. 2 e Fig. 3, geradas utilizando-se o princípio da superposição e a Eq. (13), apresentam a análise de convergência ao se variar o número de passos no tempo para atingir  $\tau = 1$  e  $\tau = 2$ , respectivamente. Verifica-se, em primeiro lugar, que o princípio da superposição fornece resultados mais acurados que os anéis concêntricos para comparação com a solução analítica. Em segundo lugar, há uma melhora nos resultados com o aumento de  $NT$ .

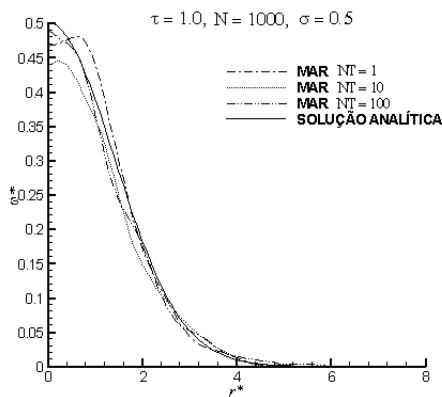


Figura 2. Vórtice pontual – MAR:  
 $\tau = 1$ ;  $N = 1000$ ;  $\sigma = 0.5$ .

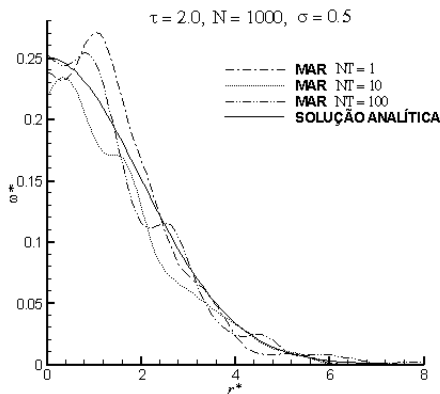


Figura 3. Vórtice pontual – MAR:  
 $\tau = 2$ ;  $N = 1000$ ;  $\sigma = 0.5$ .

As Figuras 4 e 5, geradas com o princípio da superposição, apresentam a análise de convergência para o raio do núcleo do vórtice  $\sigma$ , para  $\tau = 1$  e  $\tau = 2$ , respectivamente. Verifica-se um aumento de acurácia com o aumento de  $\sigma$ .

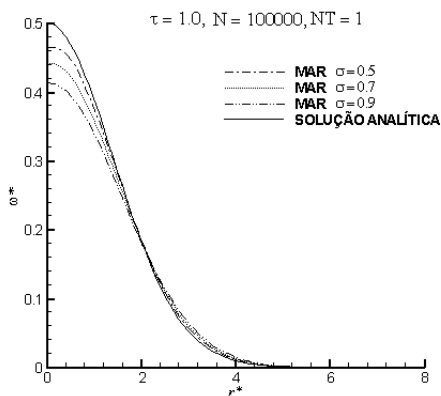


Figura 4. Vórtice pontual – MAR:  
 $\tau = 1$ ;  $N = 100000$ ;  $NT = 1$ .

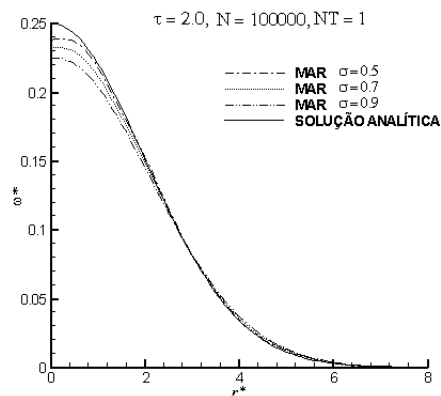


Figura 5. Vórtice pontual – MAR:  
 $\tau = 2$ ;  $N = 100000$ ;  $NT = 1$ .

As Figuras 6 e 7, mais uma vez geradas com o princípio da superposição, apresentam a análise de convergência para o número de vórtices  $N$ , para  $\tau = 1$  e  $\tau = 2$ , respectivamente. Há uma clara melhora de acurácia quando  $N$  aumenta.

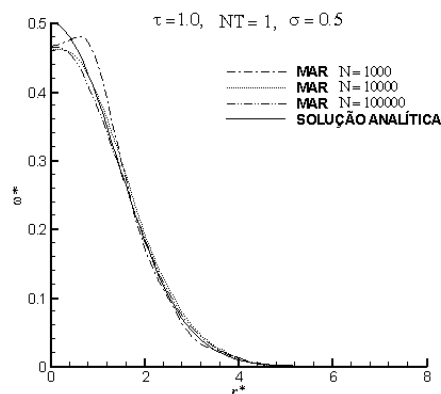


Figura 6. Vórtice pontual – MAR;  
 $\tau = 1$ ;  $NT = 1$ ;  $\sigma = 0.5$ .

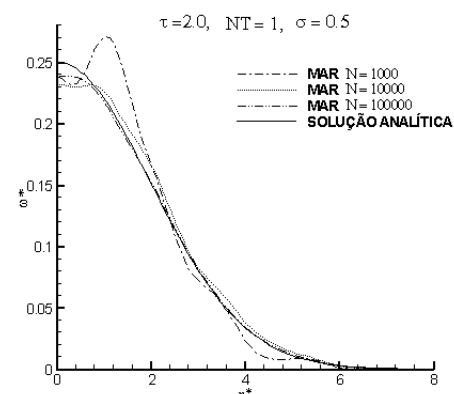


Figura 7. Vórtice pontual – MAR;  
 $\tau = 2$ ;  $NT = 1$ ;  $\sigma = 0.5$ .

#### 4.2.2. Método da Redistribuição de Vorticidade - MRV

A simulação da difusão de vorticidade do vórtice pontual utilizando-se o MRV foi realizada seguindo-se a formulação apresentada na seção 3.2 e os resultados são comparados com a solução analítica da Eq. (20). Deste modo, um vórtice com intensidade inicial  $2\pi$  é posicionado na origem no instante  $t = 0$ , dando início à simulação. Uma vez que não existem vórtices vizinhos, o sistema de Eqs. (11) não apresenta solução possível, sendo necessária a criação de seis novos vórtices, distando  $\sqrt{6}$  do vórtice inicial. Deste modo, novos vórtices são criados a cada passo no tempo, o que aumenta a área abrangida pelos vórtices a partir da origem e possibilita que o sistema de Eqs. (11) seja resolvido, determinando-se, assim, as parcelas de vorticidade que devem ser trocadas entre os vórtices.

As Figuras 8 e 9 apresentam os resultados das simulações para o campo de vorticidade calculados, respectivamente, pelo método da divisão do domínio em anéis concêntricos, seguida da contagem do número de vórtices nos anéis (Lewis, 1991), e pelo procedimento de superposição de efeitos, Eq. (13). Novamente observa-se que o princípio da superposição fornece resultados mais acurados que o método dos anéis concêntricos e com menos dispersão. Além disso, nota-se a grande acurácia dos resultados produzidos pelo MRV em comparação com a solução analítica.

F

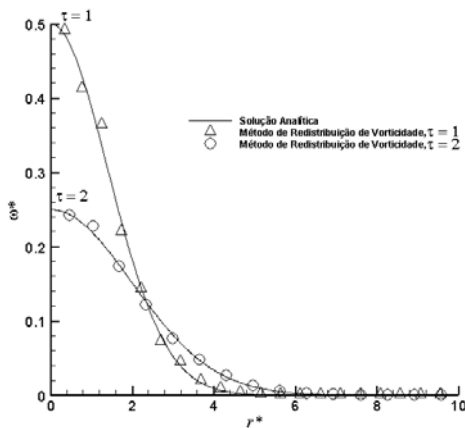


Figura 8. Vórtice pontual – MRV: anéis concêntricos.

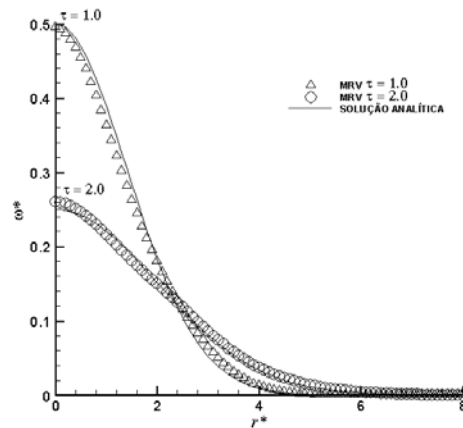


Figura 9. Vórtice pontual – MRV: superposição.

#### 4.2.3. Método da Velocidade de Difusão – MVD

A difusão de um vórtice pontual foi simulada desta vez utilizando-se a metodologia apresentada na seção 3.3. No entanto, esta implementação apresenta a dificuldade adicional de não se contar com o gradiente do campo de vorticidade em  $\tau = 0$ , uma vez que toda a vorticidade está concentrada na origem. Para contornar este problema, deixou-se a simulação evoluir a partir da condição inicial de um vórtice com intensidade  $2\pi$ , utilizando-se o MCNM por 30 passos consecutivos, gerando-se, assim, um gradiente de vorticidade que permitiu a utilização do MVD a partir deste ponto.

A Fig. 10 apresenta os resultados desta simulação para  $\tau = 1$  e  $\tau = 2$  utilizando-se o método de contagem de vórtices em anéis concêntricos proposto por Lewis (1991). Como observado nos resultados anteriores com o método dos anéis concêntricos, os resultados acompanham a curva teórica, mas apresentam alguma dispersão.

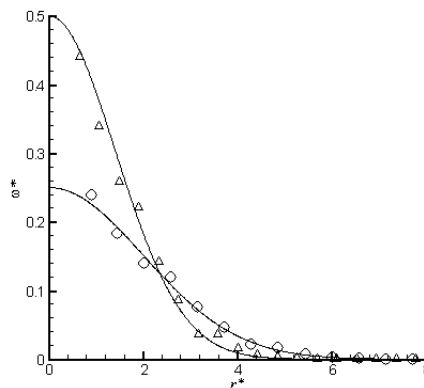


Figura 10. Vórtice pontual – MVD (anéis concêntricos).

As Figuras 11 e 12, geradas para  $\tau = 1$  e  $\tau = 2$ , respectivamente, analisam a convergência do MVD com relação à variação do número de vórtices  $N$ , utilizando o princípio da superposição descrito pela Eq. (13). Estas figuras permitem observar que os resultados apresentam melhora à medida que o número de vórtices na simulação,  $N$ , cresce.

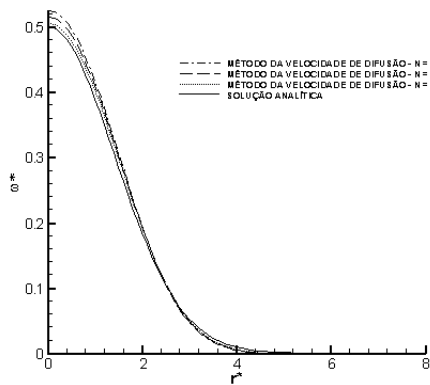


Figura 11. Vórtice pontual – MVD:  $\tau = 1$ .

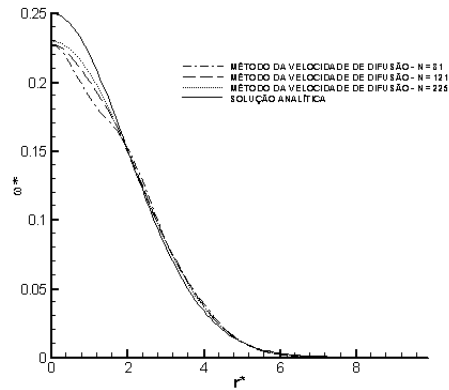


Figura 12. Vórtice pontual – MVD:  $\tau = 2$ .

#### 4.2.4. Método do Crescimento do Núcleo Modificado – MCNM

Os resultados a seguir foram gerados utilizando-se o MCNM para simular a difusão de um vórtice pontual centrado na origem, com intensidade  $2\pi$ , de acordo com a formulação apresentada na seção 3.4. A Figura 13 refere-se novamente à aplicação do princípio da contagem de vórtices distribuídos em anéis concêntricos (Lewis, 1991). Mais uma vez observa-se que o cálculo de  $\omega^*$  utilizando-se o método dos anéis produz alguma dispersão nos resultados.

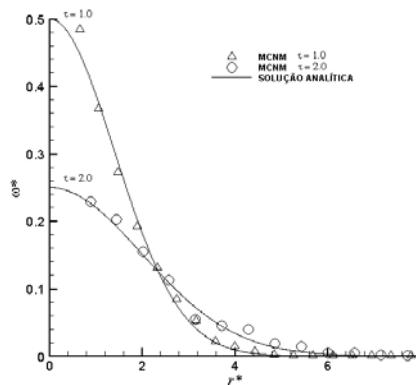


Figura 13. Vórtice pontual – MCNM: anéis.

As Figuras 14 e 15 mostram a convergência de  $\omega^*$  com relação a  $\alpha$  para  $\tau = 1$  e  $\tau = 2$ , respectivamente, calculada pelo MCNM utilizando-se o princípio da superposição. Nota-se claramente resultados mais convergidos quando  $\alpha$  aumenta.

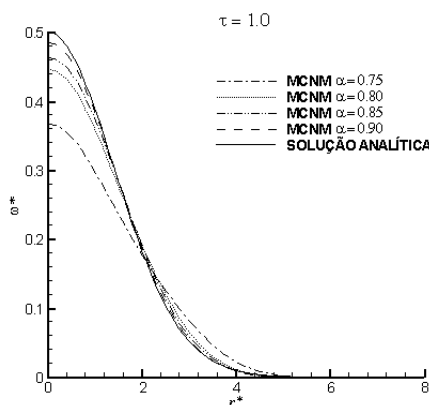


Figura 14. Vórtice pontual – MCNM:  $\tau = 1$ .

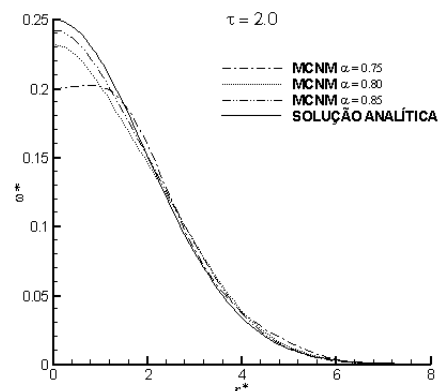


Figura 15. Vórtice pontual – MCNM:  $\tau = 2$ .



### 4.3. Análise dos Resultados para a Difusão do Vórtice Pontual

A Tabela 1 apresenta resultados que permitem uma análise comparativa entre os métodos quanto à acurácia de cada um. Manteve-se o  $\Delta t$  fixo para todos os casos, variando-se  $\tau$  apenas para o MRV e para o MCNM com o objetivo de produzir um número de vórtices semelhante para todos. Os demais parâmetros numéricos são os que geram os melhores resultados para cada método, no que se refere ao erro máximo ( $E_{max}$ ) e ao erro médio ( $\bar{E}$ ) do valor da vorticidade, calculada com a Eq. (13) e comparados à solução analítica. Define-se o erro médio como a média aritmética do módulo da diferença entre o valor da vorticidade calculada pelo método numérico em questão e o valor exato em cada ponto.

Tabela 1. Erro máximo ( $E_{max}$ ) e erro médio ( $\bar{E}$ ) da vorticidade.

	$E_{max}$	$\bar{E}$	$N$	$\Delta t$	$\tau$	$\sigma$	$\alpha$
<b>MAR</b>	$5,51205 \times 10^{-3}$	$3,32237 \times 10^{-2}$	1000	0,05	2	0,005	-
<b>MVD</b>	$6,76687 \times 10^{-3}$	$3,46612 \times 10^{-2}$	1089	0,05	2	0,005	-
<b>MRV</b>	$1,97361 \times 10^{-3}$	$8,49746 \times 10^{-2}$	1024	0,05	1,65	0,005	-
	$2,67586 \times 10^{-3}$	$1,11671 \times 10^{-2}$	1521	0,05	2	0,005	-
<b>MCNM</b>	$1,07325 \times 10^{-3}$	$5,35153 \times 10^{-3}$	4447	0,05	2	0,005	0,97
	$2,06599 \times 10^{-3}$	$1,02798 \times 10^{-2}$	1027	0,05	1	0,005	0,97

Do ponto de vista de acurácia, os resultados da Tabela 1 permitem que se conclua que o MCNM é superior aos demais métodos porque apresenta os menores erros, enquanto que o MVD é o que apresentou pior desempenho, com acurácia ligeiramente inferior ao MAR. Porém, deve-se ressaltar que tanto o MAR quanto o MVD produzem oscilações na distribuição de vorticidade resultantes da baixa ocorrência de interseção entre os núcleos dos vórtices, como mostrado nas Figs. 2, 3, 6 e 7, para o MAR, e Fig. 12 para o MVD. Nota-se, entretanto, que as oscilações dos resultados obtidos com o MAR são bem maiores que as do MVD. Estas oscilações impossibilitam o uso do MAR em simulações de grande acurácia, sem um mecanismo que introduza vórtices na região rotacional, de modo a eliminar tais flutuações e garantir a convergência. Nas simulações realizadas, o MVD possui ainda uma limitação quanto ao estabelecimento da condição inicial, pois o gradiente de vorticidade necessário para o cálculo da velocidade de difusão é inexistente em  $t = 0$ . Esta limitação, porém, não existe na sua aplicação no método de vórtices para escoamento externo sobre corpos. Os outros dois métodos, MRV e MCNC, são os que se mostram mais acurados de um modo geral, além de não apresentarem o problema de convergência resultante da baixa ocorrência de interseção entre os núcleos dos vórtices. No entanto, o MCNC possui erros um pouco menores e é muito mais simples de ser implementado.

A Tabela 2 ilustra os tempos de CPU obtidos para  $\tau = 1$  e  $\tau = 2$ , variando-se o passo de tempo,  $\Delta \tau$ , e o número de vórtices. A comparação entre os quatro métodos simulados, MAR, MRV, MVD e MCNM, quanto ao custo computacional é tarefa bastante complexa e difícil de ser realizada, tendo em vista a inexistência de uma relação entre os diversos parâmetros numéricos de cada método. Como consequência, nem sempre é possível manter o número de vórtices constante entre as diversas simulações. Apesar deste fato tornar difícil o estabelecimento de critérios que permitam uma comparação definitiva, pode-se observar que os resultados, organizados do método mais lento para o mais rápido, são: MRV, MVD, MCNC e MAR. As diferenças em tempo de CPU são muito grandes entre o MAR e os demais métodos porque o contador de operações do MAR é proporcional a  $N$ . Essa diferença, no entanto, diminui muito se considerarmos que, para reduzir drasticamente as oscilações no campo de  $\omega$ , seria necessário povoar a região rotacional do escoamento com um número muito maior de vórtices, o que aumentaria muito o tempo computacional. O MVD é intrinsecamente um método lento porque possui contador de operações proporcional a  $N^2$ , mas seu desempenho nos resultados obtidos é superior ao MCNC e ao MRV porque  $N$  é menor nas simulações realizadas. Os resultados em termos de tempo de CPU para o MCNC e o MRV são bastante piores que para o MAR e o MVD porque os algoritmos do MCNC e do MRV povoam continuamente a região rotacional com novos vórtices para garantir convergência, o que gera um número muito maior de vórtices na região fluida e um grande aumento no tempo de CPU, apesar de produzir resultados mais acurados.

Tabela 2: Tempos de CPU (s) e número de vórtices ( $N$ ) para os quatro métodos estudados.

MÉTODO	$\Delta t$	$\tau=1$	$\tau=2$
MAR	0.025	$N=1000$ ; $t=3,12 \times 10^{-2}$ s	$N=1000$ ; $t=6,25 \times 10^{-2}$ s
	0.050	$N=1000$ ; $t=1,56 \times 10^{-2}$ s	$N=1000$ ; $t=3,12 \times 10^{-2}$ s
MRV	0.025	$N=4921$ ; $t=2,30 \times 10^3$ s	$N=19441$ ; $t=1,35 \times 10^5$ s
	0.050	$N=1261$ ; $t=4,75 \times 10^1$ s	$N=4921$ ; $t=2,31 \times 10^3$ s
MCNM	0.025	$N=1600$ ; $t=9,68 \times 10^2$ s	$N=6400$ ; $t=1,33 \times 10^5$ s
	0.050	$N=400$ ; $t=7,25 \times 10^0$ s	$N=1600$ ; $t=9,57 \times 10^2$ s
MVD	0.025	$N=961$ ; $t=3,50 \times 10^1$ s	$N=961$ ; $t=7,23 \times 10^1$ s
	0.050	$N=961$ ; $t=1,79 \times 10^1$ s	$N=961$ ; $t=3,60 \times 10^1$ s

Dois fatores adicionais devem ser ressaltados quando se analisa tempo de CPU. Em primeiro lugar, métodos que geram muitos vórtices, como o MCNC e o MRV, podem reduzir a quantidade de vórtices presentes no escoamento utilizando um algoritmo de aglomeração de vórtices, como o desenvolvido por Rossi (1997). Em segundo lugar, outro fator que deve ser levado em consideração na comparação quanto ao custo computacional é a grande particularidade do problema de difusão do vórtice pontual, que tende a encobrir deficiências que seriam aparentes em um problema que envolvesse convecção. Como exemplo, pode-se citar a criação de vórtices coincidentes no MRV e no MCNM, o que só ocorre em um problema puramente difusivo como o do vórtice pontual estudado. Em simulações de escoamento externo utilizando o método de vórtices, a convecção presente no escoamento movimenta vórtices coincidentes e produz a mesma modelagem da região rotacional do escoamento com menos vórtices, o que também reduz o tempo de CPU.

## 5. Camada Limite sobre Placa Plana Alinhada com o Escoamento Incidente

Nesta seção são apresentados os resultados para o problema convectivo/difusivo do desenvolvimento de camada limite sobre placa plana alinhada com o escoamento incidente. Utiliza-se o algoritmo do método de vórtices proposto por Lewis (1991), simulando-se o processo difusivo pelo MAR e pelo MCNM.

A escolha do problema de desenvolvimento de camada limite em placa plana deve-se à existência de solução teórica para este problema, o que permite uma análise dos resultados em uma situação que envolve convecção e difusão simultaneamente, e que por esta razão se torna uma análise mais representativa.

### 5.1. Formulação do Problema

O problema da camada limite de Blasius sobre uma placa plana sem espessura pode ser modelado pelo método de vórtices como o resultado de um escoamento uniforme  $U$  que incide impulsivamente sobre a placa em  $t = 0$  e que resulta na geração de uma folha de vorticidade na placa de intensidade  $\gamma(s_i) = U$  em  $0 \leq x \leq l$ . Esta vorticidade gerada na placa se difunde para o meio fluido e sofre, em seguida, convecção e difusão, dando origem a uma nuvem de vórtices que representa a região rotacional do escoamento.

A folha de vorticidade gerada na placa plana é dividida em  $N$  elementos que satisfazem automaticamente à condição de não escorregamento sobre a placa, a cada passo no tempo. Estes elementos são transformados em vórtices, formando uma nuvem. Utilizando o Método das Imagens para satisfazer automaticamente à condição de contorno de impermeabilidade sobre a placa, o campo de velocidade total sobre cada elemento da folha de vorticidade pode ser calculado subtraindo-se a velocidade induzida pela nuvem de vórtices do escoamento incidente, de acordo com a equação abaixo, a qual, considera a influência dos vórtices  $j$  e de suas imagens sobre o elemento  $i$  da placa, ou seja,

$$\gamma(s_i) = U - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\Delta\Gamma_j y_j}{(x_i - x_j)^2 + y_j^2}. \quad (21)$$

A vorticidade calculada pela Eq. (21) dá origem a um vórtice de Lamb, o qual é posicionado a uma distância da placa igual ao seu raio, definido por  $\sigma = 4.48364 (\Delta t/Re)^{1/2}$  e cuja intensidade é  $\Delta\Gamma_i = \gamma_i \Delta s_i$ , onde  $\Delta s_i = l/N$ . Os vórtices se deslocam por ação da convecção gerada pela nuvem e por suas imagens, que levam em conta a influência do vórtice  $i$  e de sua imagem sobre o vórtice  $j$ , de acordo com

$$\Delta u_j = \frac{\Delta\Gamma_i}{2\pi} \left( \frac{y_j - y_i}{r_1^2} - \frac{y_j + y_i}{r_2^2} \right) \quad \text{e} \quad \Delta v_j = \frac{\Delta\Gamma_i}{2\pi} (x_j - x_i) \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right), \quad (22a \text{ e } 22b)$$

onde  $r_1^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2$  e  $r_2^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j + y_i)^2$ . Deve-se atentar para a necessidade de cálculo em separado da influência da imagem do vórtice  $j$  sobre o mesmo, conforme as equações

$$\Delta u_j = -\frac{\Delta\Gamma_i}{4\pi y_i} \quad \text{e} \quad \Delta v_j = 0. \quad (23)$$

Lewis (1991) propõe uma aproximação para a influência dos vórtices cujos raios cortam a placa, a qual é utilizada neste trabalho e descrita pela equação

$$\Delta\gamma(s_i) = \frac{\phi \Delta\Gamma_j}{2\pi \Delta s_i}, \quad (24)$$

onde,  $\phi$  é o ângulo formado pelo vórtice  $j$  e pelos extremos do elemento  $i$  da placa. Assim, a influência do vórtice  $j$  sobre o elemento  $i$  da placa é calculada com a Eq. (24), caso o raio do vórtice seja maior que sua distância à placa.

## 5.2. Resultados para Placa Plana

O problema formulado acima é resolvido utilizando-se o MAR e o MCNM, o que dá origem ao conjunto de resultados apresentados a seguir. Para ilustrar as esteiras obtidas, as Figuras 16 e 17 apresentam as nuvens de vórtices geradas utilizando-se respectivamente o MAR, para  $Re = 500$ , e o MCNM, para  $Re = 50000$ , onde  $Re \equiv U/\nu$ .

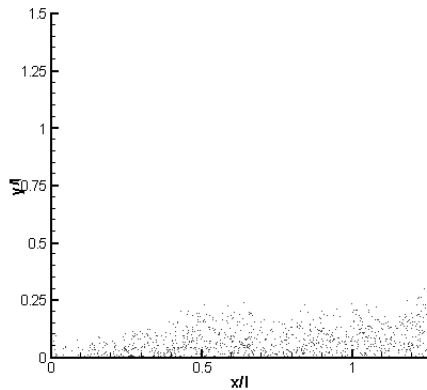


Figura 16. Camada limite – MAR:  $Re = 500$ .

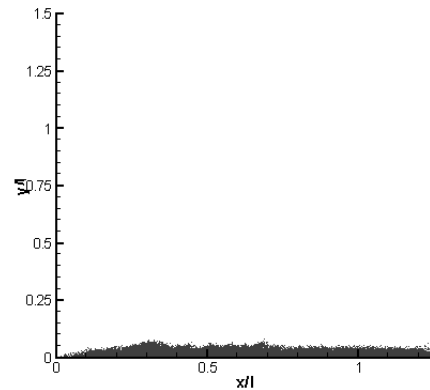


Figura 17. Vórtice pontual – MCNM:  $Re = 50000$ .

O perfil de velocidade é calculado e comparado à solução de Blasius para camada limite. Os resultados encontrados permitem uma comparação efetiva entre a acurácia do MAR e do MCNM, conforme visto na Fig. 18.

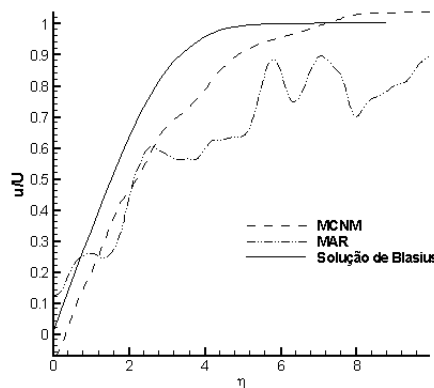


Figura 18. Camada limite: perfil de velocidade.

A Figura 18, gerada para  $Re_x \equiv Ux/\nu = 50000$ , onde  $\eta \equiv y(U/\nu x)^{1/2}$ , permite que se constate a melhor qualidade dos resultados obtidos pelo MCNM em comparação ao MAR. A grande oscilação observada nos resultados obtidos com o MAR é fruto do caráter estocástico do método e à relativa falta de interseção entre os núcleos dos vórtices. Por outro lado, o MCNM não possui essas deficiências e sua curva de  $u/U$  é muito mais suave. Este resultado foi obtido ainda para os instantes iniciais da simulação, mas já mostra a convergência dos métodos em relação ao perfil de Blasius.

## 6. Conclusões

Neste trabalho foram implementados quatro métodos Lagrangianos para simular a difusão de vorticidade sobre vórtices pontuais: o MAR, o MRV, o MVD e o MCNM. Estas implementações objetivam comparar a acurácia obtida por cada método na simulação de escoamentos externos com vistas a fornecer embasamento para a escolha de um dos três métodos determinísticos, MRV, MVD e MCNM, como alternativa ao tão difundido, porém probabilístico, MAR. Deste modo, a solução analítica para a difusão de um vórtice pontual permite que se conclua que o MCNM possui acurácia superior aos demais, além de ser de fácil implementação numérica. Seu alto custo computacional comparado ao MAR pode ser facilmente contornado utilizando-se um algoritmo de aglomeração de vórtices.

O problema da camada limite de Blasius foi utilizado como teste para a comparação entre o MAR e o MCNM porque é um problema convectivo/difusivo e possui solução exata. Estas simulações são bem mais abrangentes que o caso anterior estudado. Os resultados permitiram concluir que mais uma vez o MCNM apresentou maior acurácia frente ao MAR, desta vez em uma situação que contempla também a convecção e que, por isso, melhor representa uma real aplicação dos métodos testados.

Durante as simulações realizadas, foi percebida a tendência de aumento do custo computacional do MCNM, sobretudo para *Re* pequenos, uma vez que os vórtices são divididos com maior frequência. Para que esta deficiência não se torne impeditiva é necessário introduzir um esquema de aglomeração que evite um número de vórtices excessivo que surge quando os núcleos dos vórtices se interceptam. Esta é a condição para a convergência do método de vórtices.

A aplicação efetiva do MCNM ao Método de Vórtices requer ainda estudo e pesquisa adicionais, sobretudo no que se refere ao já citado problema do aumento indiscriminado do número de vórtices. Porém, este trabalho permite que se conclua quanto a sua superioridade em acurácia, o que garante a este método a permanência em linhas de pesquisa que buscam aprimorar os resultados de suas simulações com o Método de Vórtices Discretos.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao Exército Brasileiro e ao CNPq, respectivamente, pelo apoio financeiro a este projeto de pesquisa.

## Referências

- Chorin, A. J., 1973, "Numerical Study of Slightly Viscous Flow", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 57, part 4, pp. 785-796.
- Cottet, G.-H. and Koumoutsakos, P., 1999. "Vortex Methods. Theory and Practice". Cambridge University Press.
- Greengard, C., 1985, "The core spreading vortex method approximates the wrong equation", Journal of Computational Physics, Vol. 61, pp. 345-348.
- Leonard, A., 1980, "Vortex methods for flow simulation", Journal of Computational Physics, Vol. 37, pp. 289-335.
- Lewis, R. I., 1991, "Vortex Element Method for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems", Cambridge, Cambridge University Press.
- Ogami, Y. and Akamatsu, T., 1991, "Viscous flow simulation using the discrete vortex model – The Diffusion Velocity Method", Computer&Fluids, Vol. 19, No. 3/4, pp. 433-441.
- Rossi, L., 1996, "Resurrecting core spreading vortex methods: A new scheme that is both deterministic and convergent", SIAM Journal, Vol. 17, No. 2, pp. 370-397.
- Rossi, L., 1997, "Merging Computational Elements in Vortex Simulations", SIAM Journal, Vol. 18, No. 4, pp. 1014-1027.
- Shankar, S., and Van Dommelen, L., 1996, "A new diffusion procedure for vortex methods", Journal of Computational Physics, Vol.127, pp. 88-109.
- Takeda, K., Tutty, O. R. and Fitt, A. D., 1997, "A Comparison of Four Viscous Models for the Discrete Vortex Method", 13<sup>th</sup> AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Snowmass Village, CO, June 29 – July 02.

## COMPARITIVE STUDY OF FOUR DIFFERENT VORTICITY DIFFUSION METHODS FOR APPLICATIONS TO VORTEX METHODS

**Victor S. Santiago**

vsantoro@ig.com.br

**Gustavo C. R. Bodstein**

Federal University of Rio de Janeiro (UFRJ), Department of Mechanical Engineering – Poli/COPPE  
Centro de Tecnologia, Bloco G, sala 204 – Ilha do Fundão, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ – Brazil  
gustavo@mecanica.coppe.ufrj.br

**Abstract.** *The Vortex Method has become widely used in several areas of science and engineering, mainly in fluid mechanics applications. This is partly due to the fact that vortex methods use a purely Lagrangian methodology, which requires no grid. This characteristic facilitates the study of external flows around bodies with complex geometries. The splitting of the diffusive and convective vorticity transports is the approach most commonly employed to solve the vorticity transport equation. In this paper, we implement four numerical methods to simulate vorticity diffusion: Random Walk, Vorticity Redistribution, Corrected Core Spreading and Velocity Diffusion. Using as a reference the analytical solution for the Lamb vortex, these four models are compared from the point of view of accuracy and computational cost, which allows us to point out the advantages of each one for fluid flow applications. Additionally, we show that the Corrected Core-Spreading method produces superior accuracy over the Random-Walk method in the solution of the Blasius flat plate boundary layer problem.*

**Keywords:** *random-walk method, vorticity-redistribution method, corrected core-spreading method, velocity-diffusion method, vortex method.*