

ANÁLISE DE DESEMPENHO DO MÉTODO DE EXPANSÃO EM MULTIPÓLOS ADAPTATIVO APLICADO A SIMULAÇÕES NUMÉRICAS VIA MÉTODO DE VÓRTICES

Victor Santoro Santiago

vsantoro@ig.com.br

Daniel F. C. Silva

danfcs@yahoo.com

Gustavo C. R. Bodstein

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica – Poli/COPPE
Centro de Tecnologia, Bloco G, sala 204 – Ilha do Fundão, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ – Brasil
gustavo@mecanica.coppe.ufrj.br

Resumo. O transporte de vorticidade simulado na etapa convectiva do Método de Vórtices impõe a necessidade de se calcular a velocidade induzida por cada vórtice sobre todos os outros que compõem uma nuvem de vórtices. Tal procedimento acarreta um tempo de processamento da ordem de N^2 , onde N é o número de vórtices presentes na nuvem. Visando reduzir o tempo necessário para realizar simulações de tempo longo, onde o número de vórtices cresce muito ao longo de uma simulação, utiliza-se, neste trabalho, o Método da Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA), que reduz o tempo de processamento para ordem N . As simulações são realizadas aplicando-se o MEMA a cinco nuvens de vórtices diferentes, as quais representam possíveis configurações geométricas instantâneas de esteiras viscosas. Por último, o MEMA é integrado ao Método de Vórtices Discretos e utilizado para calcular escoamentos com elevados Números de Reynolds ao redor de aerofólios. Os resultados são comparados entre si e mostram o enorme ganho de tempo computacional proporcionado pelo MEMA.

Palavras-chave: método de expansão em multipolos, método de vórtices, método dos painéis, aerofólio, aerodinâmica.

1. Introdução

A avaliação em larga escala da interação entre partículas é parte integrante da simulação numérica de diversos fenômenos físicos. Como exemplo, podem ser citados os cálculos envolvendo o campo gravitacional, os problemas de radiação térmica, a solução da equação de Laplace via Teoria Potencial, a simulação de plasma e o Método de Partículas. O Método de Vórtices, caso particular do Método de Partículas, é utilizado em Mecânica dos Fluidos para o cálculo de escoamentos externos ao redor de corpos rombudos e aerodinâmicos, onde são utilizadas nuvens de vórtices discretos para representar a região rotacional do escoamento.

Neste trabalho, o escoamento ao redor de corpos é resolvido através da combinação do Método dos Painéis com o Método de Vórtices. Para tanto, discretiza-se o corpo em uma série de painéis retos com distribuição de vorticidade linear, e satisfaz-se a condição de contorno de impermeabilidade a cada instante de tempo e em cada ponto de controle dos painéis, transferindo a vorticidade do contorno sólido, onde ela é criada, para o escoamento, através da criação de novos vórtices discretos, um para cada painel.

Outra característica do Método de Vórtices utilizado neste trabalho é que os termos difusivo e convectivo da equação de transporte da vorticidade são calculados sequencialmente, para cada instante de tempo. Percebe-se, deste modo, que, a cada instante de tempo, cresce o número de vórtices presentes na esteira viscosa, os quais modelam a região rotacional do escoamento.

A etapa convectiva do método inclui, além do cálculo do campo gerado pelos painéis, o cálculo do campo gerado por cada vórtice discreto da nuvem. Assim, no algoritmo do Método de Vórtices, há a necessidade de se calcular a velocidade induzida por cada vórtice sobre todos os outros para que a convecção de cada vórtice seja realizada, o que implica em um custo computacional da ordem de N^2 , onde N é o número de vórtices presentes na simulação.

Para lidar com esta limitação, que se torna impeditiva para simulações de tempo longo ou para discretizações mais refinadas do corpo e da região rotacional do escoamento, diversos esquemas de aceleração têm sido propostos. Guedes *et al.* (1999), Mustto e Bodstein (2000) e Ogami (2002), apresentaram aceleradores baseados no Método da Expansão em Multipolos do tipo partícula-caixa, que reduzem o custo computacional para $N \log N$. Greengard e Rokhlin (1987) propuseram um Método da Expansão em Multipolos do tipo caixa-caixa, que reduz o esforço computacional para ordem N , porém o algoritmo apresenta dependência com relação à distribuição espacial das partículas. Esta deficiência foi sanada por Carrier *et al.* (1988), que introduziram o Método da Expansão em Multipolos Adaptativo – MEMA. Este é um esquema adaptativo do tipo caixa-caixa, também de ordem N , que distribui um número maior de caixas nas regiões de escoamento com maior concentração de vórtices e reduz o número de caixas onde a concentração é menor, melhorando o desempenho do método de Greengard e Rokhlin (1987). O emprego do MEMA em simulações com o Método de Vórtices e a avaliação do seu desempenho é o foco do estudo apresentado no presente trabalho.

Especificamente, este trabalho possui dois objetivos. O primeiro consiste em analisar o desempenho do MEMA através de simulações utilizando o código computacional original implementado por Carrier *et al.* (1988) em linguagem FORTRAN e compará-lo ao desempenho do cálculo direto partícula-partícula realizado pela lei de Biot-Savart. O segundo objetivo consiste em incorporar este código computacional ao código numérico do Método de Vórtices desenvolvido por Silva e Bodstein (2005) e testar a aplicabilidade do MEMA em simulações para tempo longo de escoamento incompressível, viscoso e bidimensional ao redor de um aerofólio. Assim, é apresentado na seção 2 um breve resumo do MEMA, que serve de base para seu entendimento geral. Em seqüência, o desempenho do MEMA é testado na seção 3 com relação a sua adaptabilidade espacial quando aplicado a cinco diferentes tipos de distribuição de vórtices, enquanto que a seção 4 testa sua aplicabilidade ao Método de Vórtices Discretos.

2. Método de Expansão em Multipolos Adaptativo - MEMA

Nesta seção o MEMA é apresentado de maneira resumida, o que permite um bom entendimento conceitual do método, mas um entendimento apenas superficial dos seus detalhes de implementação e funcionamento. Para mais detalhes quanto à formulação matemática, as deduções e a descrição completa do algoritmo de MEMA, deve-se consultar o artigo de Carrier *et al.* (1988).

Resumidamente, a estratégia utilizada pelo MEMA é de agrupar os vórtices de uma nuvem em caixas de tamanhos diferentes, de acordo com a densidade local de vórtices, e se avaliar as interações entre as caixas que se encontram suficientemente distantes umas das outras. A avaliação das interações entre as partículas que se encontram na mesma caixa é feita pelo método direto, ou seja, partícula-partícula. Deste modo, suponha que existam m partículas de intensidade q_j localizadas em $z_j = x_j + iy_j, j = 1, \dots, m$, onde $i \equiv \sqrt{-1}$ e $|z_j| < r$, sendo r um número real. Pode-se dizer que, para todo $z \in C$, sendo C o conjunto dos números complexos, e $|z_j| > r$, o potencial $\phi(z)$ pode ser escrito como

$$\phi(z) = Q \log(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad (1)$$

onde

$$Q = \sum_{j=1}^m q_j \quad \text{e} \quad a_k = \sum_{j=1}^m \frac{q_j z_j^k}{k}. \quad (2a,b)$$

Truncando-se o somatório em p termos, tem-se, para todo $p \geq 1$, que

$$\left| \phi(z) - Q \log(z) - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \alpha \left| \frac{r}{z} \right|^{p+1} \leq \left(\frac{A}{c-1} \right) \left(\frac{1}{c} \right)^p, \quad (3)$$

onde

$$c = \left| \frac{z}{r} \right|, \quad A = \sum_{j=1}^m |q_j| \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{A}{1 - \left| \frac{r}{z} \right|}. \quad (4a,b,c)$$

Carrier *et al.* (1988) consideram caixas “bem separadas” aquelas em que $c = 2$. Assim, para este caso, p deve ser da ordem de $-\log_2 \varepsilon$, de acordo com a Eq. (3), quando se estabelece uma acurácia ε . O algoritmo tem início, então, com a escolha de ε , que será garantida realizando-se a expansão em multipolos com p termos. Para tanto, o domínio é dividido seqüencialmente em caixas quadradas, até que estas tenham um número de vórtices menor que o número máximo de vórtices por caixa, valor escolhido como dado de entrada. Este parâmetro influencia no desempenho do algoritmo do ponto de vista do tempo de processamento, mas não implica em perda de acurácia.

O código FORTRAN original de Carrier *et al.* (1988) possui a opção de cálculo diferenciado para o campo induzido em pontos muito próximos, o que permite a desingularização do campo de vorticidade de acordo com o modelo que o usuário deseja utilizar. Deste modo, o vórtice de Lamb foi adicionado ao programa, sendo o raio do seu núcleo, σ , o parâmetro utilizado como distância para esta desingularização.

Carrier *et al.* (1988) estabelecem ainda critérios para a formação de listas de caixas de acordo com a proximidade e com o tamanho de cada caixa. Assim, o domínio em questão é dividido inicialmente em quatro caixas iguais, as quais são seqüencialmente divididas em quatro, até que cada caixa contenha um número de partículas inferior ao número máximo de partículas por caixa, parâmetro numérico citado acima. Os autores denominam ainda caixas ascendentes, descendentes e contemporâneas, respectivamente, como aquelas que deram origem, aquelas que foram originadas e aquelas que pertencem ao mesmo estágio do processo de divisão, ou seja, aquelas que têm o mesmo tamanho.

Ao final do processo de divisão sucessiva do domínio, cada caixa terá cinco listas de caixas a ela associadas, como pode ser visto na Fig. 1, onde as cinco listas de caixas numeradas de 1 a 5 estão relacionadas à caixa *b*. Assim, observa-se que: a lista 1 da caixa *b* é formada pelas caixas adjacentes à caixa *b*; a lista 2 da caixa *b* é formada pelas caixas descendentes das contemporâneas da ascendente de *b* que não são adjacentes à *b*; a lista 3 é formada pelas caixas descendentes das contemporâneas adjacentes de *b* que não são adjacentes à *b*; a lista 4 é formada pelas caixas que tem *b* em sua lista 3; e, finalmente, a lista 5 de *b* é formada pelas caixas não adjacentes à ascendente de *b*.

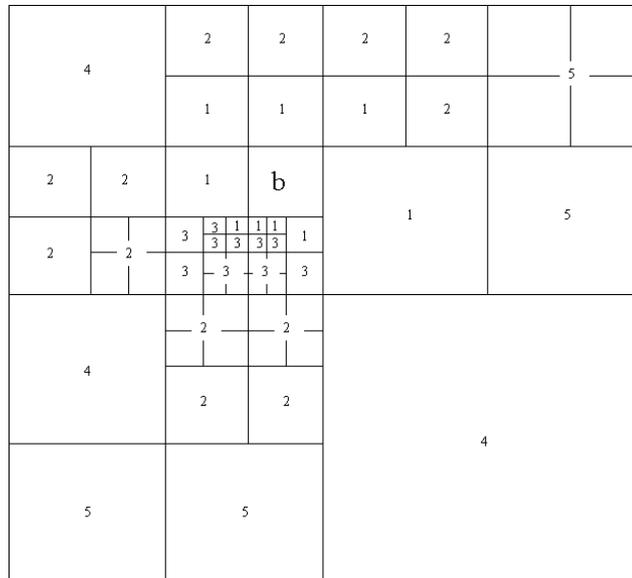


Figura 1. Famílias de caixas (Carrier *et al.*, 1988).

A formação das listas citadas acima permite que se perceba a hierarquização das caixas de acordo com a proximidade e com o tamanho de cada caixa. Regiões com caixas menores representam maiores densidades de vórtices, o que justifica o tratamento diferenciado e a conseqüente separação em famílias distintas.

Diversos lemas e teoremas são apresentados em Carrier *et al.* (1988) que fornecem ferramentas para translação do centro da expansão em multipolos e para a conversão de expansões em multipolos para expansões locais. Estas ferramentas se fazem necessárias para avaliar a justaposição de efeitos devido às interações entre as caixas e às interações entre os vórtices que se encontram na mesma caixa.

Na próxima seção são apresentados os resultados dos testes de adaptabilidade espacial do algoritmo em questão, assim como o desempenho correspondente para cada caso estudado. Além da adição do vórtice de Lamb para a desingularização dos vórtices pontuais, o código FORTRAN original desenvolvido por Carrier *et al.* (1988) sofreu pequenas modificações de natureza operacional para ser utilizado neste trabalho.

3. Adaptabilidade espacial do MEMA

A adaptabilidade espacial do algoritmo desenvolvido por Carrier *et al.* (1988) foi avaliada recorrendo-se a quatro tipos de configurações geométricas diferentes, a saber: quadrado com distribuição estatisticamente uniforme (Fig. 2a); distribuição estatisticamente não uniforme em torno quatro pontos com posições aleatórias (Fig. 2b); distribuição estatisticamente não uniforme em linha (Fig. 2c); distribuição estatisticamente não uniforme em senóide (Fig. 2d); e esteira formada por aerofólio estolado (Fig.2e). Para cada caso, as posições exatas dos vórtices são aleatórias, geradas a partir de uma distribuição estatisticamente uniforme.

Estas geometrias representam, qualitativamente, diferentes tipos de configurações instantâneas de esteiras que podem ser obtidas em simulações via método de vórtices, com diferentes níveis de aglomeração e não uniformidade. A Fig. 2a representa uma região com bastante uniformidade na distribuição dos vórtices, enquanto que a Fig. 2b apresenta uma não uniformidade na distribuição limitada a uma região bem definida. A Fig. 2c representa a esteira de um aerofólio com baixo ângulo de ataque, e a Fig. 2d uma esteira com ângulo de ataque elevado. A Fig. 2e foi gerada com a posição dos vórtices obtida ao se simular o escoamento ao redor de um aerofólio com ângulo de ataque 90°.

As Figuras 3a – 3e apresentam as curvas de tempo de processamento obtidas pelo cálculo direto com precisão dupla e pelo MEMA (*Fast Multipole Method* – FMM) para cada geometria citada anteriormente.

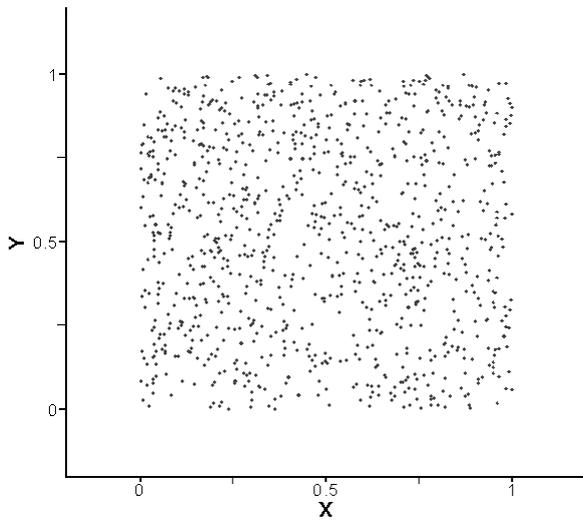


Figura 2a. Quadrado com distribuição uniforme.

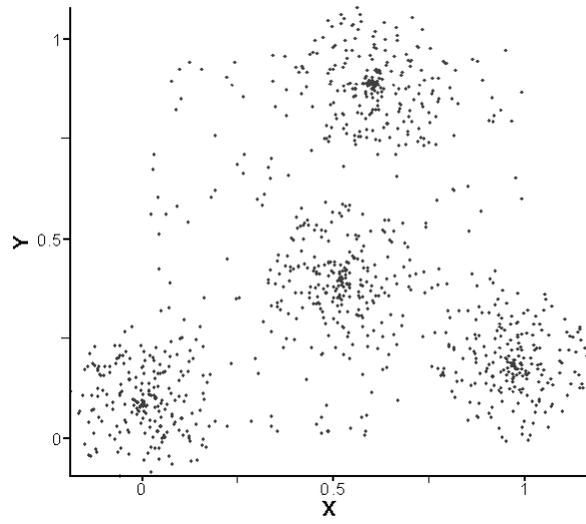


Figura 2b. Distribuição não uniforme.

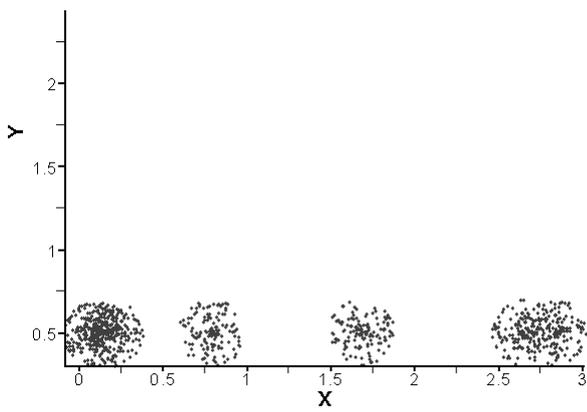


Figura 2c. Distribuição não uniforme em linha.

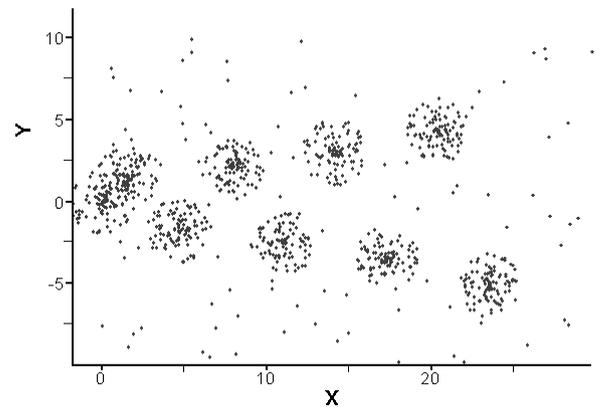


Figura 2d. Distribuição não uniforme em senóide.

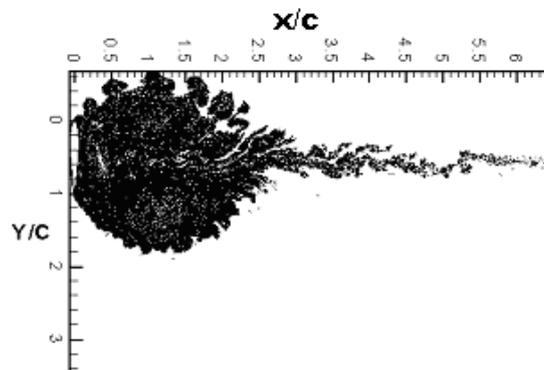


Figura 2e. Esteira formada por aerofólio estolado.

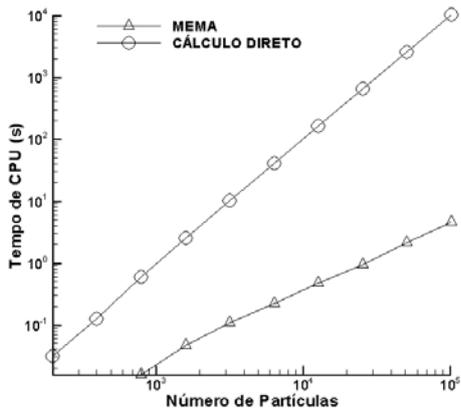


Figura 3a. Quadrado com distribuição uniforme.

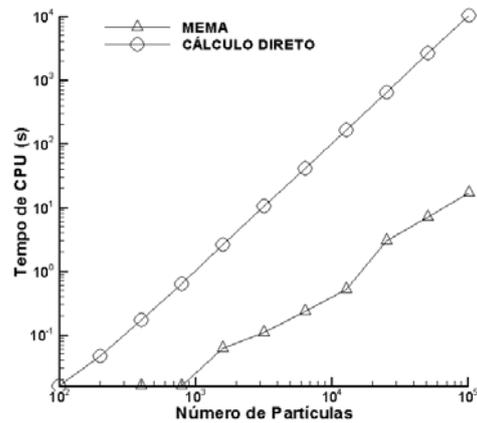


Figura 3b. Quadrado com distribuição não uniforme.

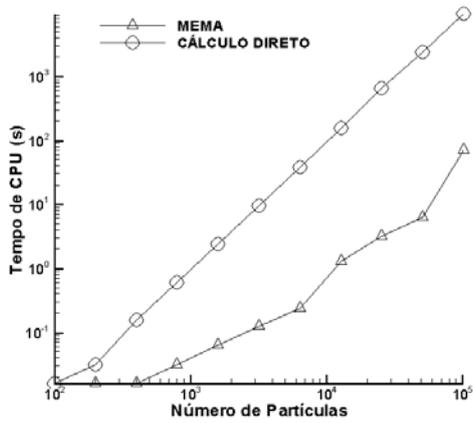


Figura 3c. Linha reta.

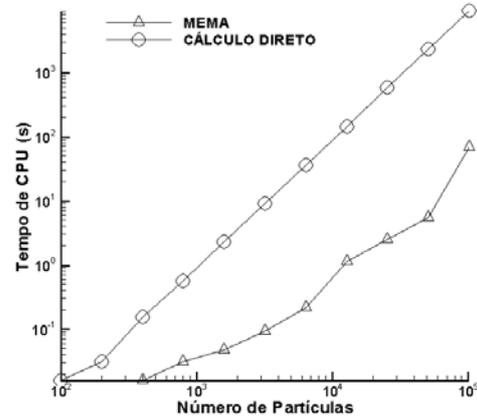


Figura 3d. Senóide.

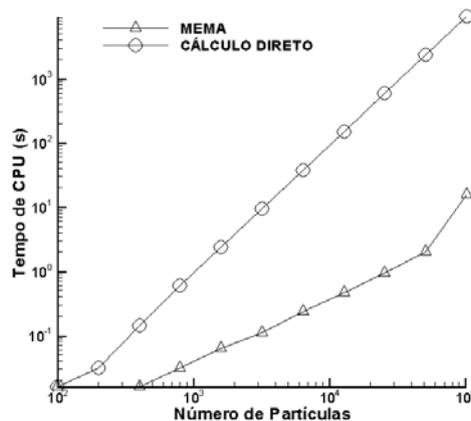


Figura 3e. Esteira formada por aerofólio estolado.

O algoritmo do MEMA requer que o domínio que contém a nuvem de vórtices seja dividido em caixas quadradas seqüencialmente, até que estas possuam um número de vórtices menor que o número máximo de vórtices por caixa. Este parâmetro é importante para o desempenho do algoritmo. Entretanto, este refinamento também é interrompido

quando o tamanho da caixa se torna menor do que a distância para desingularização. Nesta situação, se o refinamento tivesse continuidade, vórtices que devem ser tratados pelo cálculo direto seriam colocados em caixas diferentes, o que faria a interação entre eles ser calculada pela expansão em multipolos. Em outras palavras, a distância para desingularização não pode ser superior ao tamanho da caixa e, por este motivo, regiões com grande densidade de vórtices causam situações em que se deve aumentar o número máximo de vórtices por caixa para se manter o tamanho das caixas superior à distância de desingularização.

Em contrapartida, quando se torna necessário aumentar o número máximo de vórtices por caixa, o tempo de processamento se torna maior, uma vez que o refinamento espacial é interrompido com um número menor de caixas. Como consequência, o número de interações diretas partícula-partícula aumenta. Tal prejuízo no desempenho do código pode ser visualizado nas Figs. 3a – 3e, onde as retas de desempenho do MEMA se aproximam das curvas obtidas com o cálculo direto. Este comportamento é consequência da multiplicação do número de vórtices por caixa por um fator igual a oito toda vez que a distância de desingularização ultrapassa o tamanho da caixa onde aquele vórtice se encontra. O procedimento adotado tem como objetivo dobrar o tamanho da menor caixa na próxima chamada do MEMA, tendo em vista que, para a confecção dos gráficos das Figs. 3a – 3e, o número de vórtices dobra entre cada chamada. A configuração geométrica da esteira simulada na Fig. 3a não apresenta a necessidade de se utilizar este procedimento, uma vez que a distribuição estatisticamente uniforme de vórtices mostrada na Fig. 2a faz com que não surja localmente nenhuma região com caixas menores que a distância de desingularização. Para o caso da Fig. 3e, verifica-se que ocorre aproximação entre as curvas apenas para o último ponto ($N = 10^5$), o que se deve ao fato de que a distribuição de vórtices gerados pelo aerofólio estolado da Fig. 2e apresenta, estatisticamente, grande uniformidade.

O desempenho do MEMA pode ser medido de duas maneiras. A primeira, a mais facilmente observável nos gráficos das Figs. 3a – 3e, é o fato de que a ordem de grandeza dos tempos de CPU obtidos para as simulações com o MEMA é muito menor do que a ordem de grandeza dos tempos de CPU obtidos com o método direto partícula-partícula. Por exemplo, pelo cálculo direto, são necessários aproximadamente 10^2 s para processar 10^4 vórtices e 10^4 s para processar 10^5 vórtices, em todas as configurações geométricas estudadas. No caso do MEMA, são necessários 0,5 s para processar 10^4 vórtices e 5 s para 10^5 vórtices. Como se pode ver nas figuras, o tempo de CPU requerido pelo MEMA é muito menor. Por outro lado, o exemplo acima serve também para ilustrar a segunda observação que pode ser inferida. O tempo de processamento obtido pelo método direto é multiplicado por 10^2 ao se multiplicar o número de vórtices por 10, enquanto que, no caso do MEMA, multiplicando-se por 10 o número de vórtices, o tempo necessário também é multiplicado por 10. Este comportamento se deve à inclinação que cada reta tem nas Figs. 3a – 3e, o que é mais facilmente notado na Fig. 3a. Deste modo comprova-se que o MEMA é de ordem N , enquanto que o cálculo direto é da ordem de N^2 , como esperado.

As Figuras 3a – 3e também mostram que a inclinação da reta se mantém constante nos intervalos em que o número máximo de vórtices por caixa é mantido constante. A inclinação da reta aumenta localmente a sua inclinação nos pontos em que há um aumento do número máximo de vórtices por caixa, como claramente mostrado nas Figs. 3b – 3e, mas o desempenho global do MEMA não é alterado mesmo nesse casos.

O erro quadrático médio, E , pode ser utilizado como uma medida do erro global introduzido ao se calcular as interações entre as partículas pelo MEMA ao invés de se utilizar o método direto. Esta grandeza é definida pela seguinte expressão

$$E = \left(\frac{\sum_{i=1}^N |f_i - \tilde{f}_i|^2}{\sum_{i=1}^N |f_i|^2} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

onde f_i é o valor do campo gerado no vórtice i por todos os $N-1$ vórtices, calculado pelo método direto com precisão dupla, enquanto \tilde{f}_i é o valor do campo no vórtice i calculado pelo MEMA. O máximo valor de E encontrado para todos os casos simulados foi de $1,0 \times 10^{-11}$, nos quais foram utilizados um número máximo de vórtices por caixa inicial igual a 30, e uma distância para desingularização igual $5,0 \times 10^{-03}$.

4. Utilização do MEMA

Como dito anteriormente, o presente trabalho objetiva também avaliar a aplicabilidade do MEMA no Método dos Vórtices Discretos desenvolvido por Silva e Bodstein (2005) para estudar o escoamento viscoso, bidimensional e incompressível de um fluido Newtoniano com propriedades constantes ao redor de um aerofólio. A seguir, o método de vórtices utilizado neste trabalho é descrito de maneira sucinta. A seção 4.1 apresenta o sistema de equações a ser resolvido, montado com base no Método dos Painéis, e que determina a intensidade da vorticidade gerada na superfície do corpo e transferida para o escoamento. A seção 4.2 trata da evolução temporal conduzida pelo Método dos Vórtices Discretos, na qual a vorticidade calculada anteriormente é transportada para o meio fluido por convecção e difusão.

4.1. Método dos Painéis

O Método dos Painéis (Katz e Plotkin, 2001) é uma particularização do Método dos Elementos de Contorno no qual a presença do corpo é modelada por singularidades que induzem no domínio fluido o mesmo efeito que seria obtido pela presença do corpo imerso em um escoamento irrotacional. Os valores destas singularidades são obtidos ao se satisfazer à condição de impermeabilidade em cada um dos painéis que discretizam o contorno do sólido. O Método dos Painéis utilizado permite a discretização do corpo em N painéis retos, com distribuição linear de vorticidade sobre eles. A cada painel corresponde um ponto de controle, onde se impõe a condição de impermeabilidade.

A utilização de uma distribuição linear de vorticidade implica no aparecimento de $N+1$ incógnitas. No entanto, a imposição da condição de contorno de impermeabilidade gera uma equação para cada ponto de controle, ou seja, N equações. Utiliza-se, adicionalmente, a condição de conservação de circulação para formar um sistema fechado de $N+1$ equações, que pode ser escrito como

$$U \cdot \bar{n}_i + \sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} \gamma_j + \sum_{g=1}^{N_v} G_{ig} k_g = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j + \gamma_{j+1}}{2} \Delta \ell_j = 0. \quad (7)$$

Na Equação (6), o primeiro termo refere-se ao escoamento incidente, o segundo termo refere-se aos painéis retos, e o terceiro termo refere-se aos vórtices liberados na esteira ao final de cada passo no tempo e que compõem a nuvem. Ainda nessa mesma equação, o termo γ_j refere-se à intensidade da vorticidade calculada naquele instante de tempo para cada extremo (nós) dos painéis e que forma um vórtice livre no passo de tempo seguinte, o termo A_{ij} é relativo à geometria dos painéis, também chamado matriz de coeficientes de influência, o termo k_g é a intensidade de cada vórtice presente na esteira, enquanto que o termo G_{ig} representa a função de transferência, que no caso do presente trabalho é a função descrita pelo vórtice de Lamb. Pode-se observar que a Eq. (7), que representa a equação de conservação de circulação, não leva em consideração os vórtices livres, uma vez que no instante de tempo inicial a circulação é nula.

4.2. Método dos Vórtices Discretos

O Método de Vórtices Discretos simula o escoamento externo ao redor de corpos utilizando modelos de vórtices para representar a região rotacional do escoamento, ou seja, considera-se o escoamento irrotacional a não ser nas regiões abrangidas pelos núcleos dos vórtices. O modelo de vórtice utilizado neste trabalho é o vórtice de Lamb.

A utilização do vetor vorticidade $\omega \equiv \nabla \times \mathbf{u}$ permite o cálculo do campo de velocidade sem que seja necessário calcular o campo de pressão. Deste modo, considerando escoamento bidimensional incompressível de um fluido Newtoniano, pode-se obter a equação de transporte de vorticidade, como se segue

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega. \quad (8)$$

Com o objetivo de calcular o avanço temporal do escoamento, Chorin (1973) propõe a decomposição do operador convectivo-difusivo da Eq. (8) em dois, um puramente convectivo e outro puramente difusivo, na forma

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega. \quad (10)$$

A Eq. (9) representa o transporte convectivo da vorticidade, realizado neste trabalho pelo esquema de Adams-Bashforth de segunda ordem, enquanto a Eq. (10) representa o transporte difusivo, realizado pelo Método do Avanço Randômico (Lewis, 1990).

Para o cálculo da velocidade de convecção \mathbf{u} da Eq. (9) é necessário se levar em consideração o campo de velocidade do escoamento incidente, o campo de velocidade induzido pelos painéis e o campo de velocidade induzido pelos vórtices livres, este último responsável pelo maior custo computacional do método, que é da ordem de N^2 , justificando-se neste ponto a aplicação do MEMA para reduzi-lo para N .

De posse da velocidade de convecção \mathbf{u} , calcula-se o deslocamento convectivo dos vórtices através do esquema de Adams-Bashforth de segunda ordem, o qual, utilizando-se os componentes cartesianos de \mathbf{u} , pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \Delta x_c \\ \Delta y_c \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1,5u(t) - 0,5u(t - \Delta t) \\ 1,5v(t) - 0,5v(t - \Delta t) \end{pmatrix}_i \Delta t. \quad (11)$$

O Método do Avanço Randômico (Lewis, 1991) utilizado neste trabalho baseia-se na obtenção de números randômicos P e Q de uma distribuição de probabilidade uniforme, o que permite calcular os deslocamentos aleatórios cartesianos dos vórtices pelas equações abaixo

$$\zeta = \sqrt{\frac{8\Delta t}{Re} \ln\left(\frac{1}{P}\right)} \cos(2\pi Q), \quad (12)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{8\Delta t}{Re} \ln\left(\frac{1}{P}\right)} \text{sen}(2\pi Q). \quad (13)$$

A nova posição dos vórtices é calculada levando-se em consideração os deslocamentos convectivo e difusivo, e pode ser expressa como

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x_c + \zeta, \quad (14)$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta y_c + \eta. \quad (15)$$

4.3. Resultados

Esta seção apresenta alguns resultados da utilização do MEMA no Método de Vórtices Discretos para simular um escoamento com $Re=1,7 \times 10^5$ ao redor de um aerofólio NACA 0012, discretizado com 300 painéis, e com $\Delta t = 0,025$ e raio do vórtice de Lamb $\sigma = 0,005$. O desempenho do método em termos de tempo de processamento é, então, comparado ao obtido pelo método direto.

As Figuras 4 – 7 abaixo apresentam esteiras contendo 240.000 vórtices, geradas com ângulo de ataque $\alpha = 0^\circ, 10^\circ, 18^\circ$ e 45° , respectivamente, no último instante da simulação ($t = 20$).



Figura 4. Esteira viscosa de 240.000 vórtices; aerofólio NACA 0012, $\alpha = 0^\circ$.



Figura 5. Esteira viscosa de 240.000 vórtices; aerofólio NACA 0012, $\alpha = 10^\circ$.



Figura 6. Esteira viscosa de 240.000 vórtices; aerofólio NACA 0012, $\alpha = 18^\circ$.

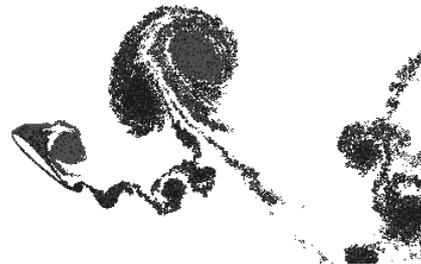


Figura 7. Esteira viscosa de 240.000 vórtices; aerofólio NACA 0012, $\alpha = 45^\circ$.

Para a obtenção das esteiras apresentadas acima foi necessário gerar 300 vórtices em cada um dos 800 passos no tempo, totalizando os 240.000 vórtices presentes em $t = 20$. Simulações de tempo longo tornam o tempo de processamento impeditivo no caso do cálculo direto, que chega a 30 horas para apenas 400 passos no tempo. Pode-se estimar em 168 horas, aproximadamente, o tempo necessário para simulações semelhantes às mostradas nas Figs. 4 – 7 utilizando o cálculo direto. A Tabela 1 apresenta os tempos de processamento medidos para as simulações acima utilizando o MEMA. Todas as simulações, com MEMA e com método direto, foram realizadas em uma máquina que possui processador Pentium IV 3.2 GHz, com 2 Gb de memória RAM.

Tabela 1. Tempo de processamento.

Ângulo de Ataque (°)	Tempo de CPU (h): MEMA
0	21
10	19
18	16
45	15

Os tempos de processamento da Tab. 1 mostram que há uma dependência do ângulo de ataque, que é fruto do grau de espalhamento dos vórtices. Como discutido anteriormente, quanto maior for a densidade local de vórtices, maior será o número máximo de vórtices por caixa no cálculo por expansão em multipolos, tendo em vista que o tamanho da menor caixa tem que ser necessariamente maior que a distância de desingularização (raio do vórtice de Lamb). Assim, baixos ângulos de ataque têm a tendência de formar maiores concentrações de vórtices em sua esteira, implicando em maiores tempos de processamento quando se utiliza a expansão em multipolos do que nos casos de alto ângulo de ataque.

5. Conclusões

Este trabalho apresenta de forma geral o Método de Expansão em Multipolos Adaptativo (MEMA) de Carrier *et al.* (1988) e utiliza o código computacional originalmente desenvolvido pelos autores para testar a sua adaptabilidade espacial do MEMA no cálculo da interação entre vórtices de Lamb presentes em esteiras de diversas configurações geométricas. Adicionalmente, o trabalho avalia a aplicabilidade deste código ao Método de Vórtices Discretos (Silva e Bodstein, 2005) e compara os resultados com simulações para um aerofólio obtidas pelo método direto partícula-partícula.

Os resultados de tempo de processamento das simulações que visam testar a adaptabilidade espacial do MEMA para cinco tipos de configurações geométricas da nuvem de vórtices comprovam a grande superioridade em desempenho com relação ao cálculo direto partícula-partícula. Estes resultados atestam que, para todos os casos simulados, o tempo de processamento do MEMA é da ordem de N , sendo N o número de partículas, enquanto que para o cálculo direto é da ordem de N^2 . Conclui-se também que a necessidade de se aumentar o número máximo de vórtices por caixa, quando o tamanho da caixa se torna menor do que a distância de desingularização, provoca uma ligeira queda de desempenho do MEMA, e o tempo de processamento das simulações com o método da expansão em multipolos se aproxima do tempo de processamento obtido pelo cálculo direto. Porém, mesmo nesses casos, a inclinação da reta de multipolos volta a ser de ordem N até que um novo aumento do número máximo de vórtices por caixa seja necessário. Este comportamento permite afirmar que o tempo de processamento do MEMA é da ordem de N desde que o número máximo de vórtices por caixa seja mantido constante.

A acurácia do MEMA foi avaliada em todas as situações simuladas. O erro quadrático médio manteve-se sempre abaixo de $1,0 \times 10^{-11}$, o que evidencia a grande acurácia do MEMA na avaliação do campo gerado por um conjunto de partículas.

A análise de desempenho do MEMA na etapa convectiva do Método de Vórtices Discretos utilizado para simular o escoamento ao redor de um aerofólio NACA 0012 para ângulos de ataque de 0° a 45° permite concluir que o MEMA pode ser aplicado com segurança tanto em simulações de escoamento perfeitamente colado ao aerofólio, as quais ocorrem com ângulos de ataque baixos, quanto em situações de grande descolamento, as quais acontecem após o estol. As esteiras obtidas permitem a visualização do bom desempenho do MEMA nos diferentes tipos de escoamentos, sejam eles com esteiras viscosas estreitas e grande densidade de vórtices, ou com esteiras oscilatórias e grande espalhamento de vórtices.

Assim, as situações testadas e as simulações conduzidas no presente trabalho permitem que se afirme que o MEMA possui grande adaptabilidade espacial, podendo ser utilizado para avaliar a interação entre os vórtices durante a etapa convectiva do Método de Vórtices Discretos. Da mesma forma, pode-se afirmar que o MEMA reduz o tempo de processamento para ordem N , enquanto que no cálculo direto este é da ordem de N^2 , mantendo excelente acurácia e permitindo, deste modo, que simulações mais longas possam ser executadas, uma vez que o aumento do número de vórtices não se torna fator impeditivo como ocorre no cálculo direto.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Prof. Leslie Greengard por ceder o código FORTRAN original do MEMA, o qual sofreu pequenas adaptações implementadas pelos autores para utilização neste trabalho. Os autores também agradecem ao Exército Brasileiro, à CAPES e ao CNPq, respectivamente, pelo apoio financeiro a este projeto de pesquisa.

Referências

- Carrier, J., Greengard, L. and Rokhlin, V., 1988, "A fast adaptive multipole algorithm for particle simulation", SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 9, No. 4, July 1988.
- Chorin, A. J., 1973, Numerical Study of Slightly Viscous Flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 57, part 4, pp. 785-796.
- Guedes, V. G., Bodstein, G. C. R. e Hirata, M. H., 1999, "Esquema de Expansão em Multipolos Aplicado ao Cálculo de Interações entre Partículas Baseado na Lei de Biot-Savart", Anais do XV COBEM (em CD-ROM), Águas de Lindóia, SP, 22-26 de novembro, 1999.
- Greengard, L. and Rokhlin, V., 1987, "A fast algorithm for particles simulations", Journal of Computational Physics, Vol. 73, No. 2, 1987.
- Katz, J. & Plotkin, A., 2001, Low - Speed Aerodynamics, 2nd edition, Cambridge University Press.
- Lewis, R. I., 1991, Vortex Element Method for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems, Cambridge, Cambridge University Press.
- Mustto, A. A. e Bodstein, G. C. R., 2000, "Um Novo Esquema do Método de Expansão em Multipolos para a Interação entre Partículas na Presença de um Cilindro Circular", Anais do VIII ENCIT - Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas (em CD-ROM), Paper s08p27, Porto Alegre, RS, 03-06 de Outubro, 2000.
- Ogami, Y., 2002, "Fast summation algorithms for the particle simulation of far-field potential and rapidly-decaying potential", JSME International Journal, Series B., Vol. 45, No. 1., 2002.
- Silva, D. F. C. and Bodstein, G. C. R., 2005, "Numerical Simulation of Unsteady Two-Dimensional Incompressible Flows Around Airfoils Using the Vortex Method", Proceedings of the 3rd International Conference on Vortex Flows and Vortex Models (ICVFM2005), Yokohama, JAPAN, November 21 - 23, pp. 173-178.

PERFORMANCE ANALYSIS OF THE FAST ADAPTIVE MULTIPOLE ALGORITHM APPLIED TO VORTEX METHOD SIMULATIONS

Victor S. Santiago
vsantoro@ig.com.br

Daniel F. C. Silva
danfcs@yahoo.com

Gustavo C. R. Bodstein
Federal University of Rio de Janeiro (UFRJ), Department of Mechanical Engineering – Poli/COPPE
Centro de Tecnologia, Bloco G, sala 204 – Ilha do Fundão, 21945-970 Rio de Janeiro, RJ – Brazil
gustavo@mecanica.coppe.ufrj.br

Abstract. *The vorticity transport simulated in the convective step of the Vortex Method imposes the need to compute the velocity induced by each vortex at all the other vortices that make up the cloud. This procedure produces a CPU time of the order N^2 , where N is the number of vortices in the cloud. In order to reduce the time to carry out long-time simulations, where the number of vortices increases as time increases, the Fast Adaptive Multipole Algorithm is used in this paper, which decreases the CPU time down to order N . The simulations are carried out applying the Fast Adaptive Multipole Algorithm to five different vortex clouds, each representing one possible instantaneous wake configuration. In addition, the Fast Adaptive Multipole Algorithm is integrated into a Discrete Vortex Method algorithm to calculate high Reynolds number flows around airfoils. The results are compared to those obtained from the direct method and show the enormous advantage of using the Fast Adaptive Multipole Algorithm.*

Keywords: *Fast Multipole Method, Vortex Method, Panel Method, airfoil, aerodynamics.*