

O EFEITO DO NÚMERO DE PONTOS DA QUADRATURA DE GAUSS NA ANÁLISE NUMÉRICA DA PROTEÇÃO TÉRMICA POR ABLAÇÃO

Aluisio Viais Pantaleão

aluisio@mec.ita.br

Claudia Regina de Andrade

claudia@mec.ita.br

Edson Luiz Zaparoli

zaparoli@mec.ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Energia Pça Marechal Eduardo Gomes, 50, Vila das Acácias, São José dos Campos, SP, Brasil.

Resumo. Este trabalho apresenta o efeito do número de pontos da quadratura de Gauss na análise numérica da proteção térmica por ablação utilizando uma abordagem entálpica para mudança de fase em problemas bidimensionais. Na solução numérica deste problema, a discretização no espaço foi feita utilizando-se o método de elementos finitos de Galerkin com um procedimento totalmente implícito e iterativo no tempo, para capturar o efeito do calor latente de ablação durante o desgaste da superfície da proteção térmica. Por fim, os resultados obtidos foram comparados com a literatura específica, onde foi verificada uma boa concordância.

Palavras chave: ablação, quadratura de Gauss, elementos finitos, proteção térmica, método entálpico.

1. Introdução

Processos envolvendo o fenômeno de ablação são utilizados em diversos campos da engenharia. Na área de bioengenharia, por exemplo, utiliza-se de processos ablativos na cura de taquicardia (Triediman et al., 1997) e no tratamento de miopia e astigmatismo (Knorz et al., 2000), entre outros. Já no setor aeroespacial, a ablação é utilizada principalmente na proteção térmica de veículos de reentrada atmosférica, pois esses veículos, quando do retorno espacial, são submetidos a intensos aquecimentos aerodinâmicos, devido à conversão da energia cinética do satélite em calor (Costa e Moraes Jr, 2002), ocasionada pelo atrito entre a estrutura do veículo e a atmosfera terrestre, durante o processo de desaceleração do mesmo.

O fenômeno de ablação consiste de uma evaporação ou uma pirólise na superfície de um material submetido a um elevado fluxo de calor. Sob o ponto de vista de proteção térmica tal processo ocorre devido ao aquecimento por atrito, oriundo da interação entre o material ablativo e o escoamento em alta velocidade. No caso de materiais que se desgastam por um processo físico, quando é atingido o ponto de fusão ou de sublimação do material, se dá início à ablação. Surge então, na superfície do material, uma camada líquida ou gasosa, que é transportada por convecção, da interface para a camada limite. Devido às condições de reentrada na atmosfera, o material ablativo usualmente é vaporizado, se mistura com o gás da camada limite, reduzindo assim a transferência de calor por convecção e aumentando a espessura da camada limite.

Na literatura existe uma grande quantidade de trabalhos que tratam do problema de ablação. Sutton (1982) faz uma descrição dos desenvolvimentos iniciais ocorridos na década de 50 e início de 60 dos tipos de proteções térmicas que utilizam materiais ablativos em aplicações espaciais e veículos hipersônicos.

Considerando a condução de calor unidimensional em um cilindro semi-infinito, Biot et al. (1964) utilizaram uma análise variacional para estudar o fenômeno de ablação, considerando a condutividade térmica como função da temperatura e a capacitância térmica constante. Os autores estabeleceram uma expressão para o cálculo da distância da penetração da frente de fusão para regime permanente.

Uma solução aproximada para o problema transitório de ablação e unidimensional com fluxo de calor dependente do tempo foi proposta por Zien (1978). O autor explicita os resultados em função de duas formas de dependência do fluxo de calor com o tempo, ambas admitindo fluxo de calor como sendo função monotônica do tempo.

Diniz et al. (1999) apresentaram uma solução analítica para o problema ablativo unidimensional em quatro geometrias distintas submetidas a um fluxo de calor conhecido. Foram utilizadas as técnicas da transformada integral e transformada integral generalizada. Os resultados referem-se à profundidade de ablação, velocidade da frente ablativa e perfil de temperatura.

Kurokawa (2003) empregou a técnica da transformada integral generalizada para solução do sistema não linear de equações diferenciais parciais acopladas. A solução do problema foi obtida pela transformação do sistema de equações

diferenciais parciais não linear em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acopladas e então resolvidas numericamente. O autor considerou no trabalho a superfície externa do domínio sujeito a um fluxo de calor transiente prescrito. Os resultados de interesse tais como o tempo de ablação e perda total de material ablativo foram apresentados e comparados com os disponíveis na literatura.

Os primeiros trabalhos numéricos sobre ablação utilizavam uma abordagem onde o sistema de coordenadas era fixo e o material utilizado também. À medida que a superfície era desgastada, eliminavam-se sucessivamente, os nós da malha computacional que recobriam o domínio na região “queimada”. Este procedimento resultava em uma instabilidade numérica. Posteriormente, os trabalhos sobre ablação adotaram uma abordagem (no caso unidimensional) onde o material da proteção se deslocava em direção à origem do sistema de coordenadas com uma velocidade igual à velocidade de desgaste da superfície, de modo que a face aquecida permanecia sempre na origem. Neste procedimento é necessária a determinação da velocidade de desgaste a partir de uma equação obtida através de um balanço de energia na superfície aquecida Blackwell (1988). Este último autor utilizou o método dos volumes finitos com diferenciação exponencial para ponderar os termos convectivos à montante do escoamento na predição de ablação unidimensional.

A abordagem entálpica para mudança de fase em problemas de ablação foi utilizada por Storti (1995). Este autor considerou que o material da proteção térmica ainda virgem e o “queimado” pertenciam a um mesmo domínio, o primeiro com as propriedades térmicas do material ablativo e o “queimado” representado por uma fase fictícia com calor específico nulo, para que esta fase não absorvesse energia após a queima. Na transição entre estas fases, o material absorve o “calor latente de ablação” incorporado na entalpia como função da temperatura. No entanto, na implementação computacional da abordagem de Storti (1995), verificou-se uma instabilidade associada ao calor específico nulo. Para evitar este problema, estabeleceu-se neste trabalho, que a fase fictícia tenha o mesmo valor do calor específico do material virgem, mas com um valor muito alto de condutividade térmica, resultando, também, em um alto valor de difusividade térmica. Esta abordagem foi testada para o caso unidimensional nos trabalhos de Leite e Zaporoli (1999), Pantaleão (2001) e Ferreira (2002).

No presente trabalho, os autores apresentam os resultados obtidos relacionados ao efeito do número de pontos da quadratura de Gauss na análise numérica da proteção térmica por ablação utilizando uma abordagem entálpica para mudança de fase em problemas bidimensionais, e os comparam com os resultados provenientes da literatura específica. Na obtenção da solução numérica deste problema, foi realizada uma discretização no espaço utilizando-se o método de elementos finitos de Galerkin com um procedimento totalmente implícito e iterativo no tempo, para capturar o efeito do calor latente de ablação durante o desgaste da superfície da proteção térmica.

2. Modelo Matemático - Formulação entálpica

A formulação entálpica utilizada em mudança de fase para o problema de ablação requer a introdução de um material fictício para representar a região da proteção térmica que já foi consumida pelo processo de desgaste. Na ablação o fluxo de calor incide diretamente na superfície de desgaste e depende de suas propriedades, isto impõe algumas restrições nas características do material fictício.

O fluxo de calor devido ao aquecimento aerodinâmico depende da temperatura da superfície de ablação (que na formulação entálpica está no interior ao domínio) e para que a temperatura da superfície original tenha um valor aproximado ao da temperatura de ablação, a condutividade térmica do material fictício deve ser elevada para reduzir os gradientes de temperatura a valores mínimos.

A equação da energia para a formulação entálpica é dada pela Eq. (1).

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot [k \nabla T] \quad (1)$$

onde ρ é a densidade, H é a entalpia, t é o tempo, k é a condutividade térmica, T é a temperatura e os símbolos $\nabla \cdot$ e ∇ são respectivamente, os operadores divergente e o gradiente.

A relação entre temperatura e entalpia para o material ablativo original e para o material fictício deve englobar o calor latente de mudança de fase. É importante ressaltar que a entalpia sofre uma variação abrupta quando a temperatura se aproxima da temperatura de mudança de fase, conforme apresentado na Fig. 1. Além disso, a capacidade térmica efetiva (que incorpora a evolução do calor latente de sublimação) tende a uma distribuição delta de Dirac- δ e, conseqüentemente, não pode ser representada na região de pico por uma função suave, surgindo dificuldades para sua integração nessa região.

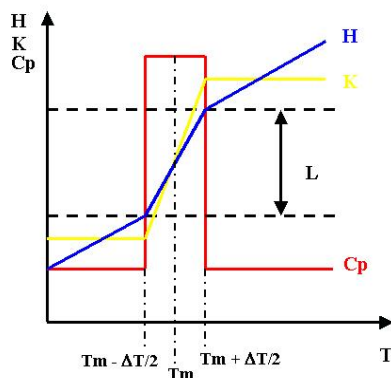


Figura 1 Propriedades térmicas do material ablativo em função da temperatura.

Para reduzir as instabilidades numéricas devido à variação em degrau da entalpia durante a ablação, supõe-se que o material passe pela sublimação em uma faixa de temperatura ΔT , com uma variação linear para a condutividade térmica e para entalpia com a temperatura, conforme descrito em Pantaleão (2003).

Introduzindo a definição do calor específico ($c_p = \partial H / \partial T$) para reduzir o número de variáveis dependentes do problema, e ao mesmo tempo possibilitar a implementação de um procedimento implícito de integração numérica no tempo, a Eq. (1) torna-se:

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \rho \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \nabla \cdot [k \nabla T] \quad (2)$$

Durante a solução numérica do problema, cada elemento da malha, cuja união reconstitui o domínio, passa pelo processo de ablação tendo parte com material ablativo e parte com material fictício. Neste caso deve-se dar atenção especial ao método de avaliação do calor específico efetivo deste elemento. Para que em cada ponto interno do domínio, o calor específico efetivo (Eq (3)) capture o efeito do calor latente de sublimação, é adotado o esquema apresentado pela Eq. (4):

$$c_{pef} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right) \quad (3)$$

$$c_{pef} = \frac{(H_n - H_{n-1})}{(T_n - T_{n-1})} \quad (4)$$

onde: H_{n-1} é a entalpia no instante $n - 1$ ou $(t - \Delta t)$; H_n é a entalpia no instante n ou (t) ; T_{n-1} é a temperatura no instante $n - 1$ ou $(t - \Delta t)$ e T_n é temperatura no instante n ou (t) .

As condições de contorno para a Eq. (2) são:

$$q_n(s_e) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{s_e} \quad (5)$$

para a superfície externa sujeita ao aquecimento aerodinâmico.

Enquanto que na superfície interna a condição de contorno imposta é dada por:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{s_i} = 0 \quad (6)$$

onde n é a direção normal à superfície.

Na abordagem entálpica não é necessário fazer o rastreamento da superfície de desgaste e também não é necessária a mudança de condições de contorno do período pré-ablativo para o período ablativo. Como a velocidade de desgaste da superfície em cada ponto não é calculada, há uma economia de tempo computacional, mas que é penalizado pela necessidade de ainda se calcular as temperaturas na região de material fictício. A vantagem da abordagem entálpica, por não ser necessário determinar a posição da superfície de ablação, torna-se mais importante em problemas bi e tridimensionais.

3. Metodologia de Solução

3.1. Método de Elementos Finitos

Para a solução numérica do problema de ablação foi utilizada a abordagem entálpica, descrita anteriormente, juntamente com a aplicação do método de elementos finitos de Galerkin para a discretização no espaço. Para a integração no tempo foi adotado um procedimento totalmente implícito e iterativo. Assim pode-se capturar o efeito do calor latente de ablação durante o desgaste da superfície da proteção térmica e assegurar que a cada passo de tempo, e para todos os elementos que estão sofrendo ablação, seja utilizado um valor correto do “calor específico efetivo” e também da condutividade térmica.

A discretização no espaço baseada no método de Galerkin (Huang e Usmani, 1994) consiste na minimização do resíduo “ \mathfrak{R} ” que surge quando uma solução aproximada do campo de temperatura T é substituída na equação diferencial $L(T) = 0$:

$$\int_{\Omega} \mathfrak{R} N_i d\Omega = 0 \quad (7)$$

onde:

$$L(T) = \bar{\nabla} \cdot (k \bar{\nabla} T) - \rho c_{pef} \frac{dT}{dt} = 0,$$

$$\mathfrak{R} = L(\bar{T}) \quad \text{e} \quad \bar{T}(x, y) = \sum_{i=1}^K T_i N_i(x, y)$$

onde “ K ” é o número de nós no domínio $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$ (união dos sub-domínios de cada elemento “ e ”); N_i é uma função de interpolação global que fornece a propagação da influência do valor da temperatura no nó “ i ” sobre o domínio.

Aplicando-se o método de resíduos ponderados de Galerkin e o Teorema de Green (para reduzir a ordem da derivada no termo difusivo), a Eq. (7) assume a seguinte forma:

$$\sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} [\nabla N_i(x, y)] \cdot [k \nabla \bar{T}_e(x, y)] dV + \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \left[C_{pef} N_i \frac{\partial \bar{T}_e}{\partial t} \right] dV = \sum_{S_e} \int_{S_e} [N_i(x, y) k \nabla \bar{T}_e(x, y)] \cdot \bar{n} dS \quad ; i=1, K \quad (8)$$

onde S_e indica a superfície do elemento “ e ” que tem intersecção com a fronteira do domínio Ω .

Nos elementos, que em determinado instante estão passando pelo processo de ablação, o calor específico efetivo tem uma variação muito acentuada. Para se atingir a precisão necessária na integração do último termo do lado esquerdo da Eq. (8) adotou-se uma quadratura de Gauss com o número de pontos mais elevado que o usual. Em cada ponto da quadratura de Gauss o calor específico efetivo foi avaliado segundo a Eq. (9) (Morgan et al, 1978):

$$\left(\frac{dH}{dT} \right)_n = \frac{(H_n - H_{n-1})}{(T_n - T_{n-1})} \quad (9)$$

Normalmente o calor específico efetivo é calculado nos nós dos elementos a partir do valor da temperatura em cada instante de tempo para posteriormente ser propagado para o interior do elemento, isto é, para os pontos da quadratura de Gauss, através de uma função de interpolação. Uma vez que a temperatura é uma função que sofre menores variações que a entalpia, decidiu-se neste trabalho, determinar a temperatura primeiramente em cada ponto de Gauss, utilizando para isso a função de interpolação para temperatura, para depois, calcular o calor específico efetivo nestes pontos. Este processo conferiu ao programa uma maior estabilidade numérica, já que as oscilações devido aos grandes gradientes na

função entalpia foram minimizados, uma vez que a temperatura se comporta de forma mais estável que a entalpia. Para a determinação da condutividade térmica foi utilizado um esquema análogo ao usado para determinação do calor específico efetivo, ou seja, com o valor da temperatura conhecido (nos pontos de Gauss) calculou-se então a condutividade térmica para cada um desses pontos.

3.2 Cálculo dos Coeficientes da Matriz dos Elementos

O primeiro e o segundo termo do lado esquerdo da Eq. (8) determinam as integrações a serem calculadas em todo o domínio físico do problema, que correspondem respectivamente, à avaliação da condutância e da capacitância térmica no interior dos elementos, enquanto o termo do lado direito corresponde ao cálculo do fluxo de calor na fronteira do domínio, onde são impostas as condições de contorno.

A matriz do elemento A_{ij}^e será composta pelas contribuições provenientes das matrizes de condutância (Eq. (10)) e de capacitância térmica (Eq. (11)) de cada elemento, respectivamente chamadas de matrizes de massa $[K^{(e)}]$ e de rigidez $[C^{(e)}]$ do elemento e (Owen, 1980).

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} [\nabla N_i(x, y)] \left[k \sum_{j=1}^{j=P} N_j^e(x, y) \right] dV = \sum_{l=1}^g w_l [\nabla N_i(x, y)] \left[k \sum_{j=1}^{j=P} N_j^e(x, y) \right] \quad (10)$$

$$C_{ij}^e = \int_{\Omega_e} C_{pof} N_i \sum_{j=1}^{j=P} N_j^e(x, y) dV = \sum_{l=1}^g C_{pof} N_i \sum_{j=1}^{j=P} N_j^e(x, y) \quad (11)$$

onde g é o número de pontos da quadratura de Gauss no interior do elemento, w_i é o peso atribuído a cada ponto da quadratura de Gauss e "e" é um dos elementos que contém o nó i .

Uma vez obtidas as matrizes de condutância e capacitância térmica em cada elemento, é montada a matriz global (Eq. (12)), resultando no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$[K] * \{T\} + [C] * \{\dot{T}\} - \{Q\} = 0 \quad (12)$$

onde: $[K]$ = matriz de condutância global; $[C]$ = matriz de capacitância global; $\{T\}$ = matriz-temperatura, $\{\dot{T}\}$ = matriz derivada da temperatura; $\{Q\}$ = matriz-fluxo de calor incidente.

Adotou-se um procedimento implícito no tempo para se obter a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias representado pela Eq. (12), de modo que a cada passo de tempo resolve-se um sistema de equações algébricas. No caso de um regime transitório bidimensional, este sistema de equações resulta em uma matriz simétrica de coeficientes. Utilizou-se um esquema numérico para se obter a solução do sistema equações pelo procedimento "Profile Solver", para matriz simétrica (Bathe e Wilson (1987)).

3.3 Integração Numérica – Quadratura Gaussiana

A integrais indicadas pelas Eq. (10) e Eq. (11) serão calculadas numericamente utilizando a regra da quadratura Gaussiana apresentada por Bathe (1996) e Cowper (1973).

As integrais das Eq. (10) e Eq. (11) foram obtidas pela fórmula para integração numérica através da quadratura de Gauss, no elemento triangular de área S assume a forma da Eq. (13), abaixo.

$$\iint f dr ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g w_i f(r_i, s_i) \quad (13)$$

onde r_i e s_i são as coordenadas de área dos g - pontos da quadratura de Gauss localizados no interior de cada elemento do domínio; w_i é o peso atribuído a cada ponto da quadratura de Gauss e f é a função avaliada, correspondente aos integrandos das Equações. (10) e (11).

Neste trabalho, os pontos da quadratura de Gauss no interior do elemento triangular (2D) e seus respectivos pesos foram obtidos de uma tabela fornecida por Dunavant (1985). A Fig. 2 apresenta um elemento triangular com 79 pontos e a localização dos respectivos pontos da quadratura de Gauss.

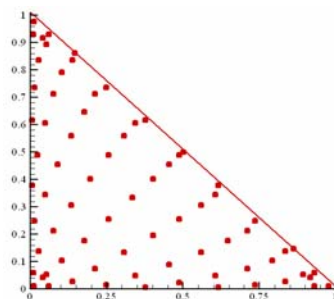


Figura 2. Distribuição dos g-pontos da quadratura de Gauss nos elementos triangulares (79 pontos).

As integrais do último termo da Eq. (8) foram obtidos pela quadratura de Gauss (Eq. 14). Os pontos da quadratura de Gauss e seus respectivos pesos foram obtidos em Abramowitz (1964).

$$\int f dr = \sum_{i=1}^g w_i f(r_i) \quad (14)$$

onde r_i é a coordenada linear dos g- pontos da quadratura de Gauss localizados na fronteira de cada elemento que coincide com a fronteira do domínio; w_i é o peso atribuído a cada ponto da quadratura de Gauss e f é a função avaliada, correspondente ao integrando do último termo da Eq. (8).

4. Resultados

Neste trabalho utilizou-se como referência para comparação dos resultados obtidos a solução apresentada por Blackwell (1988), que simulou o desgaste de uma proteção térmica de teflon empregando a abordagem de Stefan. Essa proteção térmica é esquematizada na Fig. 3 onde q é o fluxo de calor incidente.

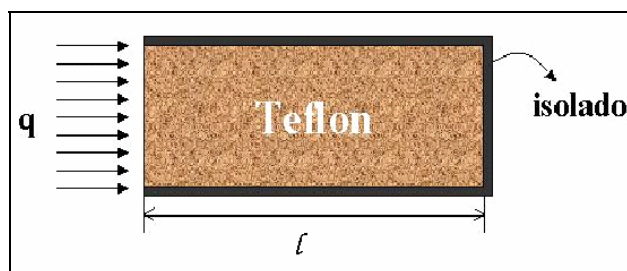


Figura 3. Representação esquemática do sistema de proteção térmica estudado.

Na simulação foi imposto um fluxo de calor incidente $q = 2,84 \text{ MW/m}^2$ por um período de 4 segundos. As propriedades físicas do teflon utilizadas são indicadas na Tab. 1 enquanto as do material fictício são apresentadas pela Tab. 2. A condição inicial de temperatura foi admitida igual a $T_i = 298 \text{ K}$ em todos os nós do domínio físico.

Tabela. 1 Propriedades físicas do teflon

PROPRIEDADE	SÍMBOLO	VALOR / UNIDADE
Densidade	ρ	1922 $[\text{kg/m}^3]$
Condutividade térmica	k	0,22 $[\text{W/m K}]$
Calor específico a pressão constante	cp	1256 $[\text{J/kg K}]$
Calor latente de sublimação	H_{fs}	2326 $[\text{MJ/kg}]$
Temperatura de sublimação	T_m	833 $[\text{K}]$

Tabela. 2 Propriedades físicas do material queimado (fictício)

PROPRIEDADE	SÍMBOLO	VALOR / UNIDADE
Densidade	ρ_{fc}	1922 $[kg/m^3]$
Condutividade térmica	k_{fc}	500 $[W/m K]$
Calor específico à pressão constante	c_{pfc}	1256 $[J/kg K]$

A condutividade térmica do material fictício foi definida como sendo igual à 500 $[W/m K]$ uma vez que o intuito era obter uma condutância no material fictício tendendo ao infinito, como discutido anteriormente. Para isso, foram feitas diversas tentativas, elevando-se sucessivamente o valor de k_{fc} até a obtenção do efeito desejado.

A malha computacional utilizada para obtenção dos resultados apresentados neste trabalho é constituída de 3314 elementos triangulares não estruturados e 1780 nós. A Fig. 4 apresenta esta malha computacional, para o intervalo de $x = 0$ até $x = \ell$.

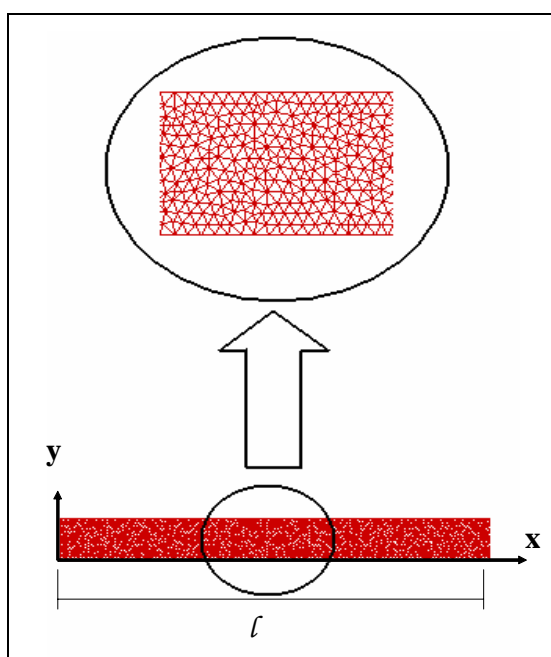


Figura 4. Malha computacional utilizada na metodologia de solução aplicada ao sólido representado pela Fig. 3.

4.1 Efeito do número de pontos da quadratura de Gauss.

As Figs. 5 a 9 apresentam os resultados obtidos nas simulações numéricas comparados com a solução fornecida por Blackwell (1988) para o fenômeno de desgaste na proteção térmica por ablação. As figuras em questão mostram a evolução da solução do problema de ablação para um ΔT de mudança de fase constante e igual a 10 K e tempos iguais a 0,2 s, 1,0 s, 2,0 s, 3,0 s e 4,0s (respectivamente para as Figs. 5, 6, 7, 8 e 9). Além disso, é comparada em cada um dos gráficos, a influência do aumento do número de pontos da quadratura de Gauss (no interior de cada elemento do domínio) na solução do problema.

Pode-se notar, observando a Fig. 5, que para um instante de tempo muito pequeno ($t = 0,2$ s) os resultados obtidos para todos os casos estudados (para números de pontos da quadratura de Gauss iguais a 3, 7, 13, 25, 37 e 79) apresentam uma boa concordância quando comparados à solução da abordagem de Stefan apresentada por Blackwell (1988).

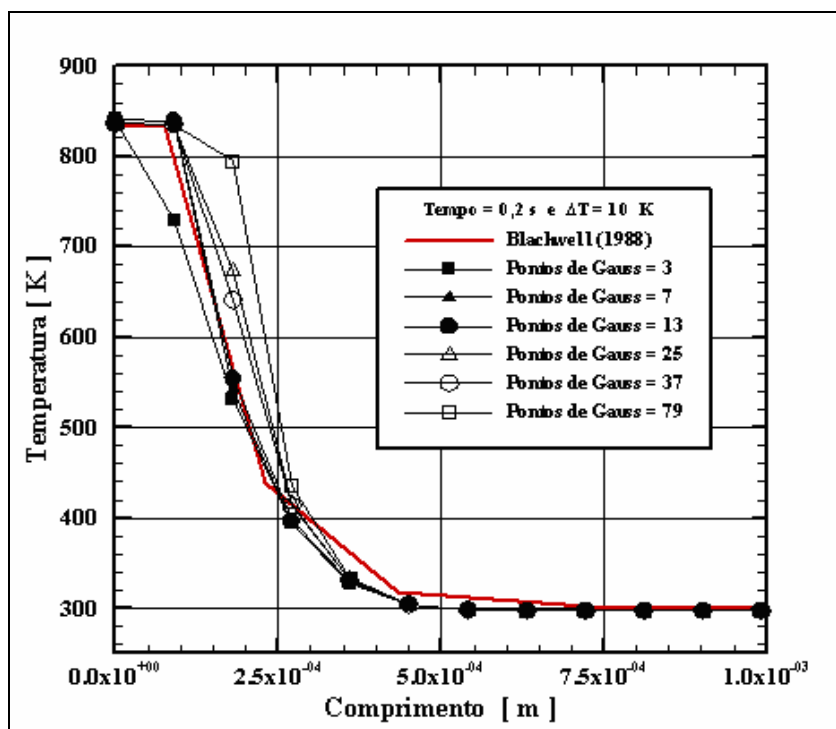


Figura 5. Comparação dos resultados obtidos com os fornecidos por Blackwell para $t = 0,2$ s.

À medida que o tempo vai evoluindo, surgem erros numéricos relacionados aos altos gradientes do calor específico efetivo (Eq. 4) de mudança de fase e da condutividade dentro do elemento, exigindo uma precisão cada vez maior nos resultados da integração numérica em cada um dos elementos na região de mudança de fase. Portanto, para minimizar os erros cometidos no cálculo do calor efetivo e da condutividade térmica, faz-se necessário a utilização de quantidades cada vez maiores de pontos da quadratura de Gauss no interior desses elementos, aumentando assim a exatidão da solução. Isso pode ser verificado nas Figs. 6, 7, 8, e 9, onde as curvas obtidas para número de pontos da quadratura de Gauss maiores que 25 convergiram para um mesmo resultado.

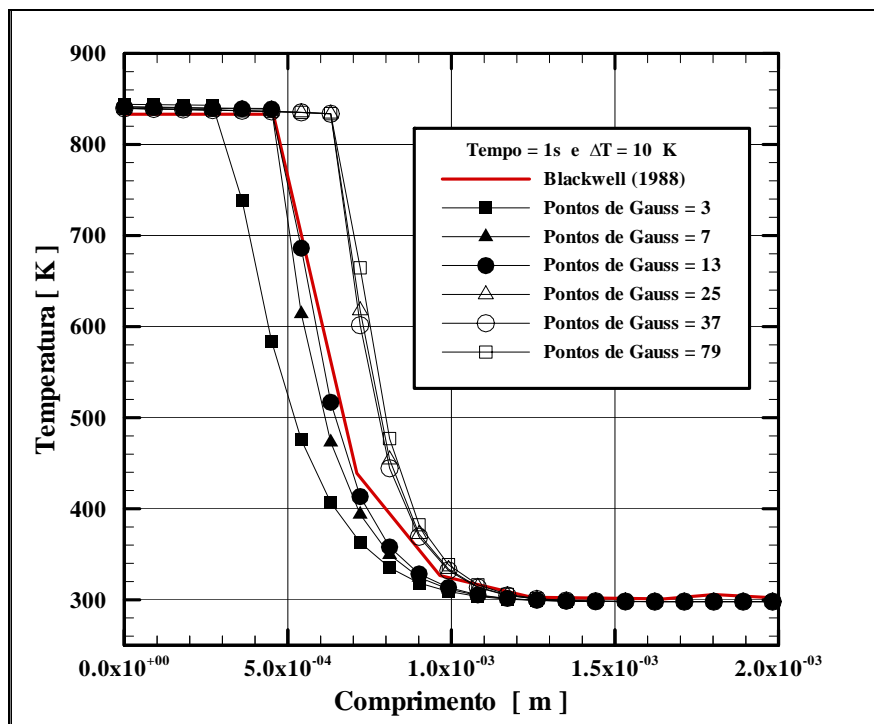


Figura 6. Comparação dos resultados obtidos com os fornecidos por Blackwell para $t = 1,0$ s.

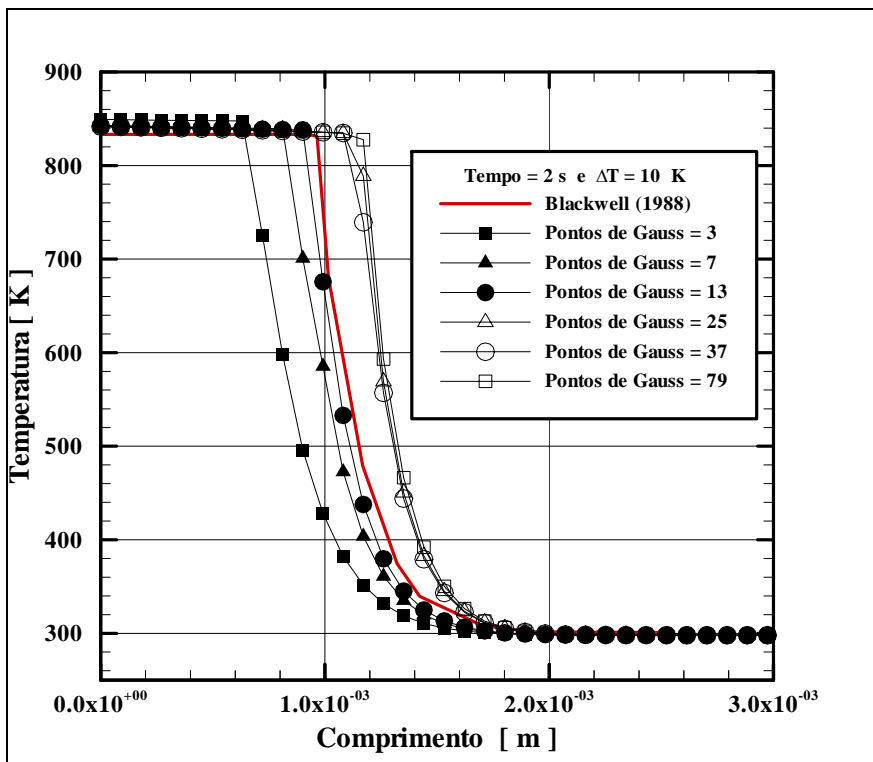


Figura 7. Comparação dos resultados obtidos com os fornecidos por Blackwell para $t = 2,0$ s.

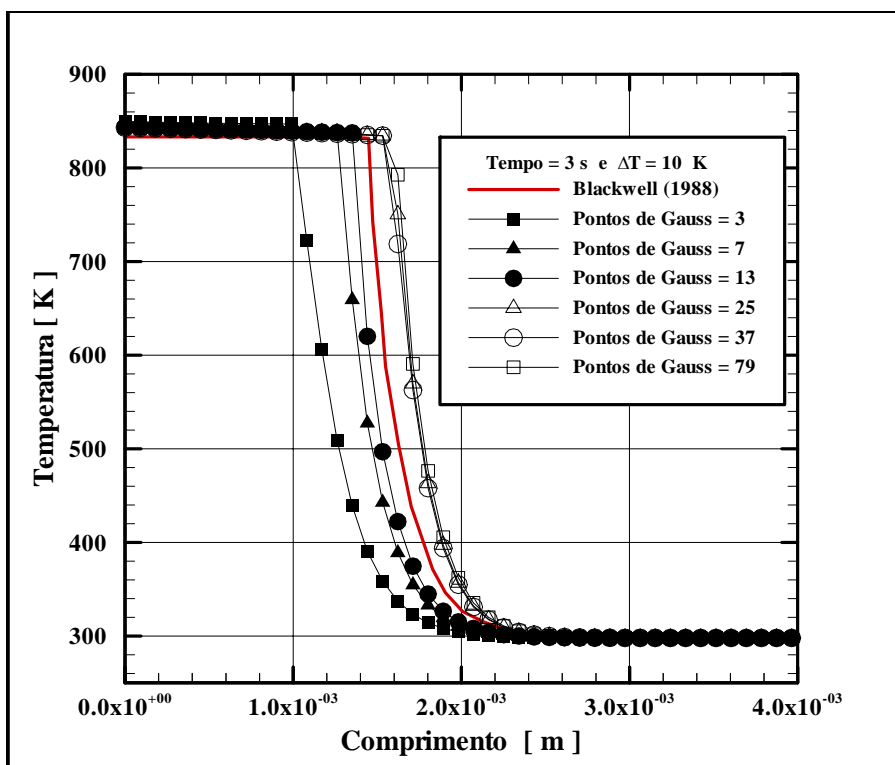


Figura 8. Comparação dos resultados obtidos com os fornecidos por Blackwell para $t = 3,0$ s.

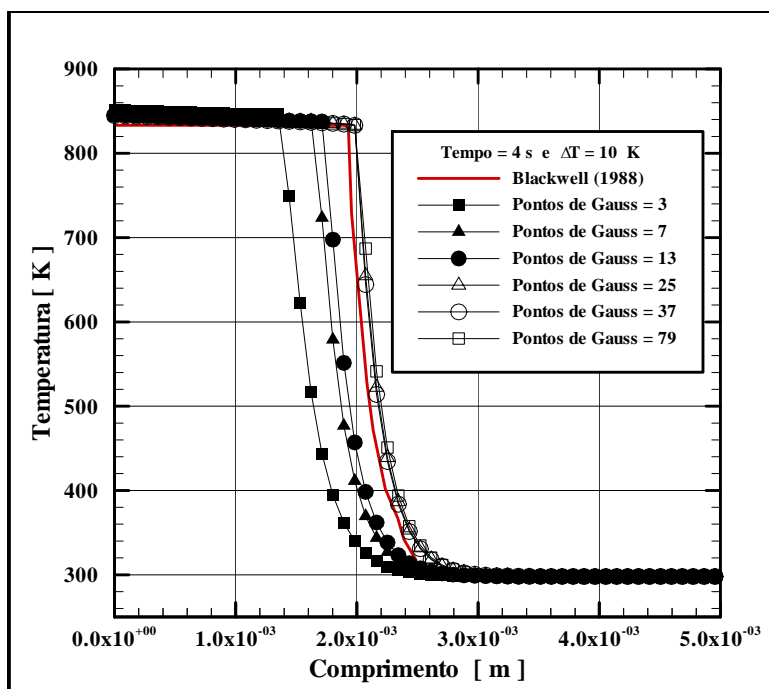


Figura. 9 Comparação dos resultados obtidos com os fornecidos por Blackwell para $t = 4,0$ s.

À proporção que ocorre uma evolução no tempo, a frente de mudança de fase determinada computacionalmente sofre um ligeiro adiantamento quando comparada à solução proposta por Blackwell (1988), sendo que para o tempo $t = 4$ s, ocorre a maior aproximação entre as curvas relacionadas ao número de ponto da quadratura Gauss maiores e igual a 25 e a solução advinda da literatura.

5. Conclusões

Os resultados obtidos neste trabalho, revelaram que, com o aumento do número de pontos da quadratura de Gauss no interior de cada elemento, a solução converge para um resultado único, levando-se a concluir que, para um determinado problema específico, a exatidão da solução aumenta à medida que aumenta a quantidade de pontos da quadratura de Gauss. Pôde-se observar que os resultados obtidos concordaram com os resultados da literatura fornecidos por Blackwell (1988) e Ferreira (2002). Foi verificada uma melhoria na concordância entre os resultados obtidos e os provenientes da literatura (Blackwell, 1988), a medida que se aumentava o número de pontos da quadratura de Gauss (para uma faixa de temperatura de mudança de fase constate). Isso se deve à precisão da integração através da quadratura de Gauss implementada no programa computacional, onde se conseguiu atingir uma integração com 79 pontos da quadratura de Gauss. Uma maior precisão para solução deste problema poderia ser obtido com um refinamento adicional da malha, mas isto não foi possível neste trabalho devido à limitação do equipamento computacional utilizado.

6. Agradecimento

Ao CNPq (processo nº 146405/1999-4) pelo apoio para o desenvolvimento deste trabalho.

7. Referências

- Abramowitz, M.; STEGUN, I. A 1964. "Handbook of Mathematical Functions; With Formulas, Graphs and Mathematical Tables". New York: Dover,
- Bathe, K. J. 1996, "Finite Element Procedures". Englewood Cliffs, N J: Prentice-Hall of India.
- Bathe, K. J.; Wilson, E. L. 1987, "Numerical Methods in Finite Elements Analysis". New Delphi: Prentice-Hall of India.
- Biot, M. A.; Agrawal, H. C. 1964, "Variational Analysis of Ablation for Variable Properties". Journal of Heat Transfer, august, p. 437-441.
- Blackwell, B. F. 1988, "Numerical Prediction of One-Dimensional Ablation Using a Finite Control Volume Procedure With Exponential Differencing". Numerical Heat Transfer, v.14, pp. 17-34.
- Costa, L. E. V. L; Moraes, P. J. ,2002 "Aspectos de Projeto do Escudo Térmico do Primeiro Protótipo da Plataforma Orbital Recuperável SARA". In: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2., , João Pessoa, PB. Anais...

- Cowper, G. R. 1973, "Gaussian Quadrature Formulas for Triangles". International Journal for Numerical Methods in Engineering", v.7, p. 405-408.
- Diniz, A.J., Campos Silva, J.B., Zaparoli, E.L. 1999, "Analytical Solution of Ablation Problem with Nonlinear Coupling Equation". Hybrid Methods in Engineering, New York, USA, v. 1, n.3, p. 265-77.
- Dunavant, D. A. 1985, "High Degree Efficient Symmetrical Gaussian Quadrature Rules for the Triangles". International Journal for Numerical Methods in Engineering,, v. 21, p.1129-1148.
- Ferreira, M. V. C. 2002, "Influência dos Métodos de Avaliação da Capacidade Térmica Efetiva nos Resultados da Simulação de Sistema Ablativo por Sublimação". Dissertação (Mestrado) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos – SP.
- Huang, H. C.; Usmany, A. S. 1994, "Finite Element Analysis for Heat Transfer -Theory and Software". New York: Springer-Verlag.
- Knorz, Michael C.; 2000, "Neuhann, T. Treatment of Myopia and Myopic Astigmatism by Customized Laser In Situ Keratomileusis Based on Corneal Topography". American Academy of Ophthalmology, ISSN 0161-6420/00.
- Kurokawa, F. Y. 2003, "Estudo Híbrido Analítico/Numérico da Equação de Difusão Bidimensional em Sólidos com Proteção Térmica Ablativa", Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira - SP.
- Leite, R. M. G.; Zaparoli, E. L. 1999, "Aplicação da Técnica de Elementos Finitos para a Solução de um Problema de Ablação Utilizando uma Abordagem Entálpica". In: XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, SP, Brasil. *Anais...*
- Morgan, K.; Lewis, R. W.; Zienkiewicz, O. C. 1978, "An Improved Algorithm for Heat Conduction Problems with Phase Change". International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.12, p. 1911-1195.
- Owen, D. E. J.; Hilton, E. 1980, "A Simple Guide to Element Finites". Swansea, UK: Pineridge Press Ltd.
- Pantaleão, A. V. de Marco, F.C.G, Zaparoli, E, L, Ferreira, M. V. C., de Andrade, C. R., 2001, "Influência da Técnica de Interpolação das Propriedades Térmicas na Abordagem Entálpica em Ablação". In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 16., Uberlândia, MG, Brasil. *Anais...*
- Pantaleão, A. V., 2003, "Análise Bidimensional de Proteção Térmica por Ablação", Tese (Doutorado), Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA, São José dos Campos - SP.
- Storti, M., 1995, "Numerical Modeling of Ablation Phenomena as Two-phase Stefan Problems". Int. J. Heat Mass Transfer, v. 38, n. 15, p 2843-2854.
- Sutton, G. W. ,1982, "The Initial of Ablation Heat Protection An Historical Perspective. Journal and Spacecraft and Rockets", v.19, nº 2, p .3-11.
- Triedman, John K. *et al.* 1997, "Efficacy of Radiofrequency Ablation for Control of Intraatrial Reentrant Tachycardia in Patients With Congenital Heart Disease". JACC, v.30, nº 4, p 1032-1038.
- Zien, T. F. ,1978 "Integral Solutions of Ablation Problems with Time-Dependent Heat Flux". AIAA Journal, v.16, nº12, December

8. Direitos autorais

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

THE EFFECT OF GAUSSIAN POINTS NUMBER ON NUMERICAL ANALYSIS OF ABLATION THERMAL PROTECTION

Aluisio Viais Pantaleão

aluisio@mec.ita.br

Claudia Regina de Andrade

claudia@mec.ita.br

Edson Luiz Zaparoli

zaparoli@mec.ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Energia Pça Marechal Eduardo Gomes, 50, Vila das Acácias, São José dos Campos, SP, Brasil.

Abstract This work presents the effect of Gaussian points number in analysis of ablation thermal employing the enthalpy approach for phase change in two-dimensional problems. For the numerical solution, the space discretization was made using the Galerkin finite elements method with an implicit and iterative procedure in time, to capture the effect of the ablation latent heat during the thermal protection surface consumption. Finally, the results were compared with the specific literature obtaining a good agreement.

Keywords: *ablation, Gaussian quadrature, finite element, thermal protection, enthalpy*