

TOMOGRAFIA TÉRMICA VIA SENSORIAMENTO ACÚSTICO: FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E ESTUDOS DE SENSIBILIDADE

E. R. Filletti

NETeF – SEM - EESC
Universidade de São Paulo
Av. Trabalhador São-carlense, 400
13560-970 São Carlos - SP
filletti@sc.usp.br

P. Selegim Jr.

NETeF – SEM - EESC
Universidade de São Paulo
Av. Trabalhador São-carlense, 400
13560-970 São Carlos - SP
selegim@sc.usp.br

Resumo. A tomografia térmica de materiais e processos representa uma ferramenta de grande potencial para a otimização de aplicações industriais, particularmente no contexto atual de demandas por aumentos de performance, minimização de consumo energético e emissões poluentes. De fato, o número de publicações técnicas e científicas dedicadas a este assunto tem crescido bastante, embora muitas questões de natureza fenomenológica estejam ainda em aberto. Uma delas concerne à possibilidade de interrogar o meio estudado com auxílio de um campo acústico e medir os perfis de pressão resultantes sobre o contorno, de tal forma que a distribuição interna de temperaturas possa ser reconstruída numericamente a partir destes dados. Essa abordagem baseia-se no fato que, para um material com propriedades físicas conhecidas, a impedância acústica local depende da distribuição interna de temperaturas, de forma que ambas estão vinculadas por uma relação biunívoca parametrizada pela excitação. Entretanto, apesar de matematicamente possível, a relação entre as medidas no contorno e a distribuição interna de impedância (a qual mapeia a distribuição interna de temperaturas) é inversa e, conseqüentemente, o problema de reconstruir esta última a partir da primeira é intrinsecamente mal condicionado. Isso implica que o procedimento de reconstrução será extremamente sensível à presença de erros experimentais nas medidas feitas no contorno e, para se obter um resultado aceitável, seria necessário realizar as medidas com um nível de precisão irrealista. A determinação das condições de excitação e medida nas quais se incorre nesse tipo de problema constitui o objetivo central desse trabalho. Isso é feito a partir de simulações numéricas da equação de Helmholtz modificada, representando um domínio bidimensional onde diferentes condições de sensoriamento são reproduzidas. A sensibilidade é quantificada variando a posição de uma inclusão de teste, no interior da qual a impedância acústica é diferente do meio circundante, e computando a correspondente variação da pressão acústica no contorno. Dois perfis de excitação são testados: o perfil clássico tipo Dirac e um perfil triangular otimizado. Os resultados mostram que a técnica clássica de excitação sofre de falta de sensibilidade intrínseca, com conseqüências desastrosas para a performance do algoritmo de reconstrução. Já o perfil otimizado proposto possui uma sensibilidade intrínseca muito superior e pode viabilizar a tomografia termo-acústica em condições experimentais realistas.

Palavras chave: tomografia térmica, termografia, sensoriamento acústico, problema inverso, sensibilidade

1. Introdução

A tomografia térmica de materiais e processos representa uma ferramenta de grande potencial para a otimização de aplicações industriais, particularmente no contexto atual de demandas por aumentos de performance, minimização de consumo energético e emissões poluentes. Em outras palavras, a possibilidade de monitorar um processo físico-químico através de imagens obtidas a partir de medições externas, i.e. não intrusivas e/ou não invasivas, permite obter informações extremamente importantes sobre sua fenomenologia e sobre como melhorar a aplicação como um todo. Pode-se dizer sem exagero que a tomografia de processos industriais terá o mesmo impacto que teve a tomografia médica para o diagnóstico clínico, a condição de serem resolvidos problemas práticos ainda em aberto. A origem destes problemas está no mau condicionamento intrínseco do problema de reconstrução numérica das imagens, uma vez que ao fazê-lo a partir de medidas externas recai-se num problema matematicamente inverso. Esse problema é menos importante na área médica, onde normalmente são empregadas técnicas de sensoriamento baseadas em campos de alta energia (ressonância nuclear magnética, raios X e γ , emissão de pósitrons, etc.) que têm como propriedade fundamental não se deformar em função da constituição do meio investigado. Entretanto, devido ao alto custo normalmente envolvido, à resposta intrinsecamente lenta e a problemas de segurança, esse tipo de tecnologia não se justifica em aplicações industriais. Nesse caso, as opções se voltam para o uso de campos elétricos ou acústicos cuja, tecnologia é

bastante robusta para aplicações envolvendo ambientes hostis (altas temperaturas, alta umidade, ruído eletromagnético, etc.) e suficientemente barata de modo que a instrumentação possa, eventualmente, ser descartada após breve período de utilização. O grande problema associado ao uso desse tipo de tecnologia reside no fato de que campos elétricos e acústicos normalmente interagem com o meio investigado, sendo atraídos para regiões de maior permeabilidade e desviam de regiões menos permeáveis à passagem da energia de sensoriamento (Elicer-Cortés e Baudet, 1999), de maneira que o campo de sensoriamento não é somente atenuado mas também conformado pela não homogeneidade interna. O efeito disso pode ser devastador para a estabilidade numérica dos algoritmos de reconstrução, conforme demonstrado em trabalhos anteriores. O quanto isso pode ser problemático está claramente ilustrado no trabalho de Selegim e Milioli (2001), voltado para a determinação de histogramas de diâmetros a partir do histograma de cordas obtido de uma sonda de detecção de fase imersa em escoamento a bolhas. Neste trabalho foi demonstrado que erros da ordem de 0.01% em amplitude nos dados de entrada (cordas) produziam desvios de mais de 100% na solução reconstruída numericamente (diâmetros) !

Este trabalho deriva de um projeto de pesquisa em curso no Núcleo de Engenharia Térmica e Fluidos, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, dedicado ao desenvolvimento de técnicas de monitoração de escoamentos bifásicos industriais através de imageamento direto e tomográfico obtido a partir de medidas de distribuições externas de impedância elétrica e acústica. Em particular estamos interessados em estender os resultados obtidos para o sensoriamento elétrico, em termos da otimização dos perfis de excitação (Figueroa e Selegim, 2001) e da topologia dos funcionais de erro construídos a partir de uma formulação variacional do problema de reconstrução (Rolnik e Selegim, 2001), para os problemas ligados ao sensoriamento acústico e sua realização prática. O ponto a ser tratado neste trabalho concerne à possibilidade de utilizar ultra-som para reconstruir a distribuição interna de temperaturas de um corpo ou escoamento, baseado no fato que sua distribuição interna de impedância acústica (o produto da densidade local pela velocidade local de propagação do som) depende fortemente da temperatura. A motivação para tanto surgiu do problema de monitorar processos de destilação e altos fornos em que a utilização de sondas intrusivas não é viável devido à necessidade de manter a integridade das paredes dos recipientes que confinam esses processos. Estas aplicações são importantes mas a técnica proposta pode, certamente, encontrar aplicação em diversas outras, tanto na área industrial quanto na área médica (Fujii e Zhang, 2001).

Na seqüência, o problema será formulado matematicamente a partir da equação de propagação acústica e de um funcional de erro quantificando a sensibilidade dos perfis de pressão acústica externa relativamente a variações na distribuição interna de impedância acústica. Em seguida procede-se a uma experimentação numérica em que são comparadas duas técnicas de excitação. A primeira delas consiste na técnica clássica normalmente empregada, baseada na aplicação pontual da energia de excitação (Dirac). A segunda consiste em aplicar a energia de excitação segundo um perfil triangular de modo que todo o domínio de sensoriamento seja percorrido pelo ultra-som, e não somente as regiões vizinhas à região de aplicação do Dirac. Os resultados mostram que perfis externos de pressão acústica obtidos a partir do perfil triangular de excitação são suficientemente sensíveis para viabilizar a reconstrução numérica do campo de temperaturas em condições experimentais realistas. A sensibilidade da técnica proposta relativamente à técnica clássica de excitação é em média superior em pelo menos três ordens de grandeza.

2. Equações de propagação acústica

Quando uma onda sonora passa através de um fluido, sua densidade, pressão e temperatura locais variam periodicamente em relação ao tempo. Numa primeira aproximação é possível assumir que estas variações ocorrem de forma adiabática e reversível devido à rapidez da oscilação. Assim sendo, uma onda harmônica plana pode viajar sem ser significativamente atenuada, e com uma velocidade definida pela compressibilidade e equação de estado do fluido. Uma descrição matemática para este movimento pode ser construída a partir das leis de conservação de massa, momento e energia, especificada para um fluido ideal não viscoso e não absorvivo, relativamente a variações de primeira ordem nas variáveis de estado e fluidodinâmicas. Seja então um elemento diferencial de lados dx_1 , dx_2 e dx_3 , volume $d^3\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$ e centrado num ponto do espaço indicado por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, no interior do qual a velocidade do fluido é definida por $\mathbf{u} = (\mathbf{x}, t)$ e possui as componentes $u_1(\mathbf{x}, t)$, $u_2(\mathbf{x}, t)$ e $u_3(\mathbf{x}, t)$. Além da velocidade local, a descrição completa do processo requer a definição do estado termodinâmico nesse ponto, o que pode ser feito especificando-se duas propriedades termodinâmicas como a pressão $P(\mathbf{x}, t)$ e a densidade $\rho(\mathbf{x}, t)$ por exemplo. As componentes da força resultante nas direções cartesianas podem então ser calculadas e igualadas às respectivas acelerações. Em específico, para a direção x_1 tem-se

$$-\left\{P\left(x_1 + \frac{1}{2}dx_1, x_2, x_3, t\right) - P\left(x_1 - \frac{1}{2}dx_1, x_2, x_3, t\right)\right\}dx_2 dx_3 = -\frac{\partial P}{\partial x_1}d^3\mathbf{x} \quad (1)$$

o que se iguala à variação da velocidade na mesma direção

$$\rho \frac{Du_1}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_1} \quad (2)$$

Similarmente, para as outras direções é possível obter

$$\rho \frac{Du_2}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_2} \quad (3)$$

$$\rho \frac{Du_3}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_3} \quad (4)$$

Nestas, considerando-se a descrição implicitamente euleriana, a taxa de variação da velocidade deve ser considerada como sendo composta pela variação temporal do respectivo campo e pelos termos de transporte, i.e.

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad i=1, 2 \text{ e } 3 \quad (5)$$

Substituindo-se (5) nas equações (2), (3) e (4) obtém-se

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} \quad i=1, 2 \text{ e } 3 \quad (6)$$

ou, empregando uma notação não particular ao sistema de coordenadas

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \vec{\nabla} \mathbf{u} \right) = -\vec{\nabla} P \quad (7)$$

Em adição à equação (7), o processo deve igualmente satisfazer o princípio de conservação de massa. Isso pode ser feito considerando que a variação da quantidade de fluido envolvida por $d^3\mathbf{x}$ num intervalo de tempo dt deve corresponder à quantidade total de fluido que escoar para o interior do elemento diferencial no mesmo intervalo de tempo. Obtém-se então

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 \quad (8)$$

ou ainda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (9)$$

As equações (9) e (7) foram obtidas por Euler em 1755 e relacionam as incógnitas P , ρ e \mathbf{u} . O problema se completa com uma equação adicional definindo a relação entre P e ρ , considerando-se que suas oscilações devido à propagação da onda acústica são supostas adiabáticas e reversíveis e de primeira ordem, conforme mencionado no início da seção. Mais especificamente, as oscilações de P e ρ correspondem a pequenas variações relativamente aos valores de equilíbrio P_0 e ρ_0 , isto é:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \quad (10)$$

$$P = P_0 + \delta P \quad (11)$$

Ao substituir estas expressões em (6) e (8) é possível constatar a formação de produtos das componentes da velocidade com as variações $\delta\rho$ e δP que podem ser simplificados no contexto da acústica linear. Em termos mais exatos, esta aproximação consiste em assumir que as ondas acústicas são de intensidade tal que é razoável admitir $\delta\rho \ll \rho_0$ e $\delta P \ll P_0$, de forma a poder desprezar todo termo que envolva produtos de ordem dupla ou superior entre $\delta\rho$, δP e u_i . No caso da equação de conservação de massa esse procedimento resulta no seguinte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial [(\rho_0 + \delta\rho) u_k]}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \left\{ \frac{\partial \rho_0}{\partial x_k} u_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \rho_0 + \frac{\partial \delta\rho}{\partial x_k} u_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta\rho \right\} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \rho_0 = 0 \quad (12)$$

Para a equação de conservação da quantidade de movimento é possível chegar a seguinte forma simplificada

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \left(\frac{\delta P}{\delta \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (13)$$

O termo $\delta P/\delta \rho$ no S.I. tem dimensão de $(m/s)^2$ e, conforme será visto mais adiante, corresponde ao quadrado da velocidade de propagação isentrópica da onda acústica. Por ora é suficiente definir

$$\left(\frac{\delta P}{\delta \rho} \right) = c^2 \quad (14)$$

A equação de onda propriamente dita pode ser obtida a partir de (12) e (13), pela diferenciação da primeira em relação a x_i e da segunda em relação a t , e pela eliminação do termo comum $\partial^2 \rho / \partial x_i \partial t$ obtendo-se (já incluída a definição (14))

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad i = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (15)$$

A condição de irrotacionalidade do escoamento permite definir a velocidade \mathbf{u} em termos do gradiente de um campo escalar $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, t)$ de forma que

$$\mathbf{u} = \bar{\nabla} \phi \quad (16)$$

cuja substituição na equação (15) resulta na forma tradicionalmente conhecida como a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi \quad (17)$$

A equação de onda pode igualmente ser escrita em termos de outras variáveis do problema. Por exemplo, derivando-se (13) em relação à coordenada x_k , (12) em relação ao tempo, e eliminando o termo comum $\partial^2 u_k / \partial x_k \partial t$, resulta

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho \quad (18)$$

De forma similar, pode-se mostrar que a pressão também satisfaz a equação de onda, i.e.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 P \quad (19)$$

com a relação implícita entre estas variáveis dada por

$$\bar{\nabla} P = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho_0 \bar{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (20)$$

Estas equações são genéricas no sentido de descreverem o movimento de qualquer tipo de onda, porém estão restritas às hipóteses da chamada acústica linear. Para ilustrar em que implicam tais hipóteses é interessante analisar o caso particular de uma onda harmônica plana propagando-se na direção de x_1 . Sendo a frequência e o comprimento de onda denotados respectivamente por ω e λ , uma solução particular satisfazendo (17), (18) e (19) corresponde a

$$u_2 = u_3 = 0 \quad (21)$$

$$u_1 = u_{\sim} \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} \right) \right] \quad (22)$$

$$\delta P = P_{\sim} \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} \right) \right] \quad (23)$$

$$\delta p = \rho_0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} \right) \right] \quad (24)$$

para as quais u_0 , P_0 e ρ_0 representam os valores das amplitudes das perturbações de velocidade, pressão e densidade respectivamente. Substituindo estas formas na equação (15) obtém-se para a velocidade c

$$c = \frac{\omega \lambda}{2\pi} \quad (25)$$

o que corresponde, de fato, à celeridade da onda. Outra constatação importante que se pode realizar por procedimento análogo a este último, porém partindo da expressão (12), é o de que a condição $\delta p \ll \rho_0$ da acústica linear é equivalente a $u_0 \ll c$, ou seja, que a velocidade de deslocamento das partículas do fluido seja desprezível quando comparada à velocidade de propagação acústica no meio. Em aplicações práticas, à esta restrição se somam limites impostos pela geometria finita do dispositivo de excitação (frente de onda não plana), limites de cavitação, desvios de linearidade (potência acústica $< 0.01 \text{ W/cm}^2$), etc.

A celeridade de uma onda acústica pode ser calculada a partir de relações termodinâmicas e da equação de estado para o meio. Em específico, para a dedução de c a partir de (14) é necessário especificar como a temperatura se altera durante as oscilações de pressão. Conforme mencionado anteriormente, as variações de P e ρ associadas a uma onda acústica são tais que, em primeira aproximação, não há transferência de calor entre as regiões quentes e frias, e tampouco os efeitos de dissipação viscosa são significativos. Em outras palavras o processo pode ser considerado adiabático e reversível e, portanto, ocorre a entropia constante. A equação (14) pode então ser escrita como

$$c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_S \quad (26)$$

cujo cálculo no caso de gases perfeitos leva a

$$c^2 = \gamma R T \quad (27)$$

onde R representa a constante universal dos gases e $\gamma = C_p/C_v$.

Já para o cálculo da velocidade do som em meios líquidos os efeitos de interação molecular têm papel substancial e devem ser considerados. Partindo-se da hipótese que as moléculas do meio são representadas por esferas perfeitamente elásticas e de que a propagação acústica ocorre no espaço intermolecular com velocidade equivalente à do gás, e no interior das moléculas com velocidade infinita. Seja L a distância média entre os centros e L_V a distância livre média entre moléculas contíguas. Neste caso a velocidade de propagação do som no líquido se calcula por (Bhatia, 1967, Ascher, 1997)

$$c_{\text{liq}} = c_{\text{gás}} \frac{L}{L_V} \quad (28)$$

expressão na qual $c_{\text{gás}}$ deve ser calculada com auxílio de (26). A principal dificuldade que se apresenta para o cálculo teórico de c_{liq} decorre do fato de que uma determinação objetiva e não ambígua do termo L/L_V não é possível. Diversas teorias foram propostas por autores consagrados mas sua aplicabilidade não é geral pois se baseiam em diferentes equações de estado para líquidos. Uma discussão detalhada destas teorias pode ser encontrada no livro de Beyer e Letcher (1969).

Tendo em vista os objetivos deste trabalho, os resultados empíricos publicados na literatura técnica e científica são suficientes. Por exemplo, a relação entre velocidade do som na água à pressão ambiente e a temperatura é dada por (Greenspas e Tschiegg, 1959)

$$c = 1402,736 + 5,03358T - 0,0579506T^2 + 3,3163610^{-4} T^3 - 1,4526210^{-6} T^4 + 3,044910^{-9} T^5 \quad (29)$$

Além da temperatura, outros parâmetros influenciam a velocidade do som. Obviamente em um meio isotérmico composto por fases distintas e imiscíveis, um escoamento bifásico água-óleo por exemplo, a velocidade de propagação acústica variará conforme a organização espacial das fases. Em outras palavras, nas equações de onda (17), (18) ou (19) deve-se considerar

$$c = c(x_1, x_2, x_3) \quad (30)$$

com a dependência temporal podendo ser desprezada se a evolução da organização interna das fases devido ao escoamento for lenta relativamente à velocidade de propagação acústica. Assim, existindo uma relação biunívoca entre a geometria interna do escoamento e $c(x_1, x_2, x_3, t)$, imagens do escoamento bifásico podem ser reconstruídas a partir dos perfis de excitação e resposta acústica.

3. Formulação matemática do sensoriamento e da estratégia de reconstrução tomográfica

A propagação acústica no interior de um domínio de sensoriamento Ω com inclusões Ω_i pode ser modelada com auxílio da equação (19), cuja adaptação para variações harmônicas da pressão, isto é

$$P = \tilde{P}(x, y) \exp(i\omega t) \quad (31)$$

reduz-se à seguinte expressão

$$\nabla^2 \tilde{P}(x, y) + \frac{\omega^2}{c(x, y)^2} \tilde{P}(x, y) = 0 \quad \text{para } (x, y) \in \Omega \quad (32)$$

Nestes termos, a distribuição de temperaturas internas pode ser definida como

$$T(x, y) = \begin{cases} T_i(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega_i \\ T_e(x, y) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (33)$$

cuja influência na distribuição de velocidades locais de propagação acústica, determinadas, por exemplo, através de expressões empíricas do tipo (29), pode ser modelada pela da expressão

$$c(x, y) = \begin{cases} C_i(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega_i \\ C_e(x, y) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (34)$$

Estabelecidas estas definições e hipóteses, o sensoriamento acústico e o problema de reconstruir $T(x, y)$ podem agora ser convenientemente formulados. Em termos matemáticos, a equação (32) possui duas funções incógnitas: as distribuições de pressões locais $\tilde{P}(x, y)$ e de velocidades locais de propagação acústica $c(x, y)$. Para resolvê-la são, portanto, necessárias duas condições de contorno (Gzyl, 2001). Estas condições são normalmente definidas através dos perfis de excitação imposto no contorno e de resposta medida também no contorno. Utilizando transdutores capazes de impor pressões harmônicas de amplitudes pré-estabelecidas e de captar a taxa de deslocamento resultante, parâmetros relacionados matematicamente através de (20), o sensoriamento pode ser modelado com auxílio das seguintes definições:

$$\text{(excitação)} \quad \tilde{P}(x, y) = P_{\text{exc}}(s) \quad (35)$$

$$\text{(resposta)} \quad \tilde{\nabla} \tilde{P}(x, y) \cdot \tilde{n} = Q_{\text{res}}(s) \quad (36)$$

expressões nas quais está implícito que $(x, y) \in \partial\Omega$, e s representa uma coordenada curvilínea percorrendo o contorno a partir de $(x=0, y=0)$ no sentido anti-horário.

Conforme mencionado anteriormente, a reconstrução de $c(x, y)$ a partir do par $P_{\text{exc}}(s)$ e $Q_{\text{res}}(s)$, conjugados por $\tilde{P}(x, y)$ na expressão (32), constitui um problema inverso e, portanto, implicitamente mal condicionado. Entre outras implicações importantes, isso significa que os erros experimentais inerentes à imposição do perfil de excitação (35) e à medida do perfil de resposta (36) serão provavelmente bastante amplificadas, a ponto de comprometer completamente a solução reconstruída (Selegim e Milioli, 2001). Numerosos estudos têm sido realizados no sentido de equacionar esse problema, embora não haja um consenso sobre qual a melhor maneira de resolvê-lo. Nossa proposta baseia-se na realização de sensoriamentos redundantes e na combinação dos respectivos parâmetros em um macro-funcional de erro expressando a diferença entre uma distribuição estimada $c_{\text{est}}(x, y)$, implementada num modelo numérico da equação (32), e a distribuição verdadeira $c_{\text{exp}}(x, y)$ à qual se tem acesso indireto através dos parâmetros de sensoriamento. Estas idéias têm sido testadas com sucesso em problemas de imageamento elétrico (Rolnik e Selegim, 2001) e térmico (Campos et al., 2002). Assim, se $Q_{\text{res,exp}}(s)$ denota a taxa de deslocamento medida experimentalmente no contorno, determinada pelo perfil de excitação P_{exc} e por c_{exp} , e se $Q_{\text{res,est}}(s)$ denota a taxa de deslocamento estimada, obtida de (36) a partir das pressões obtidas da solução de (32), com $c = c_{\text{est}}$ e impondo-se o mesmo perfil de excitação P_{exp} em (35), este funcional de erro pode ser definido como:

$$e = \int_{\partial\Omega} |Q_{res,exp}(s) - Q_{res,est}(s)|^2 ds \quad (37)$$

Neste quadro de trabalho a reconstrução tomográfica da distribuição interna de temperaturas vinculada à distribuição interna de velocidades de propagação acústica transforma-se num problema de otimização funcional que pode ser resolvido resolvendo-se as equações de Euler-Lagrange correspondentes. Alternativamente, é talvez mais conveniente fazer a expansão de $c(x, y)$ numa base de funções $\psi_i(x, y)$ adequadamente arbitrada, ou seja,

$$c(x, y) \equiv a_0\psi_0(x, y) + a_1\psi_1(x, y) + a_2\psi_2(x, y) + \dots + a_N\psi_N(x, y) \quad (38)$$

de modo que o funcional de erro (37) se torna uma função do \mathfrak{R}^N em \mathfrak{R} , tendo como argumentos os coeficientes de Fourier a_i . As equações que levam à reconstrução de $c(x, y)$ podem, portanto, ser formalmente escritas como

$$\frac{\partial e}{\partial a_0} = \frac{\partial e}{\partial a_1} = \frac{\partial e}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial e}{\partial a_N} = 0 \quad (39)$$

É importante ressaltar que o mau condicionamento intrínseco do problema inverso é tal que, em condições normais, a solução das equações (39) é inviável, tanto devido à presença de erros experimentais quanto à aritmética finita dos cálculos. O emprego de técnicas especiais de minimização de e (equação (37)) nas variáveis a_0, a_1, \dots, a_N , é condição sine qua non para o sucesso da estratégia proposta (Ying e Son, 1996).

4. Simulações numéricas e resultados

Simulações numéricas foram feitas em um problema teste bidimensional visando demonstrar a exequibilidade de se reconstruir sua distribuição interna de temperaturas a partir de medidas acústicas não intrusivas feitas em seu contorno. A geometria adotada é esquematizada na figura seguinte, na qual são também representados os conjuntos de transdutores piezelétricos responsáveis pela aplicação do campo acústico de excitação e, simultaneamente, pela medida dos perfis de resposta. O processador central (computador) é responsável pelo controle da excitação, definindo perfis de pressão acústica a serem aplicados no contorno por exemplo, bem como pelo processamento das respostas obtidas. O campo interno de temperaturas a ser reconstruído com estes dados é definido em dois patamares característicos: 1) temperatura mais elevada no interior da inclusão e 2) temperatura baixa no meio circundante. Por simplicidade as dimensões foram fixadas de maneira que o contorno do domínio de sensoriamento e a inclusão tenham formas quadradas, com lados respectivamente iguais a 1.0 (unitários) e 0.2.

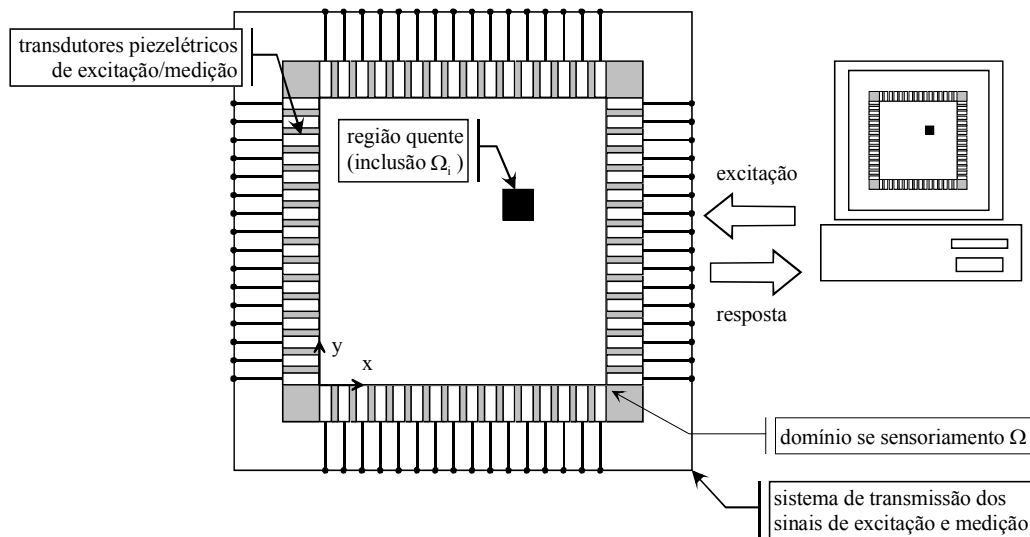


Figura 1. Representação esquemática do problema estudado (a inclusão representa uma região de temperatura mais elevada que a do meio circundante) e do conjunto de transdutores piezelétricos empregados no sensoriamento.

Para que a estratégia de reconstrução tomográfica proposta seja bem sucedida é necessário que haja suficiente sensibilidade nos perfis de resposta Q_{res} , relativamente a variações da distribuição de velocidades de propagação, vinculada à temperatura interna através de relações do tipo (29). Estudos anteriores realizados em problemas de sensoriamento elétrico (Figuroa e Selegim, 2001) demonstraram que a forma dos perfis de excitação P_{exc} é crucial para que isso ocorra. No caso do sensoriamento acústico, o efeito da forma do perfil de excitação é ainda mais pronunciado devido à presença do termo dissipativo nas equações que governam o problema, ou seja, nas equações

(17), (18) e (19). Tomando o problema esquematizado na figura 1 como base é possível estudar esta sensibilidade deslocando-se a inclusão em torno de uma posição de referência, o centro do domínio de sensoriamento por exemplo, e quantificando as alterações nos perfis de resposta com auxílio do funcional (37) para um mesmo perfil de excitação.

Nesse sentido estamos interessados em analisar duas estratégias de sensoriamento baseadas na imposição de perfis de amplitude de pressão no contorno e na medida das taxas de deslocamento resultantes, conforme formalismo expresso nas expressões (35) e (36). Assim, foram testados o perfil clássico tipo Dirac e um perfil triangular otimizado, ambos representados na figura seguinte. A distribuição de velocidade local de propagação acústica é definida através do número de onda $k(x, y)$, conforme as seguintes expressões:

$$k(x, y) = \frac{\omega^2}{c(x, y)^2} \quad (40)$$

$$k(x, y) = \begin{cases} 50 & \text{se } (x, y) \in \Omega_i \\ 10 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (41)$$

Definindo um parâmetro de deslocamento denotado por d , e, caso a inclusão seja movida ao longo da semi-diagonal superior direita, Ω_i deve ser calculado como

$$\Omega_i = [0.4 + d, 0.6 + d] \times [0.4 + d, 0.6 + d] \quad (42)$$

ou, caso a inclusão seja movida ao longo da semi-diagonal superior esquerda, Ω_i deve ser calculado como

$$\Omega_i = [0.4 - d, 0.6 - d] \times [0.4 + d, 0.6 + d] \quad (43)$$

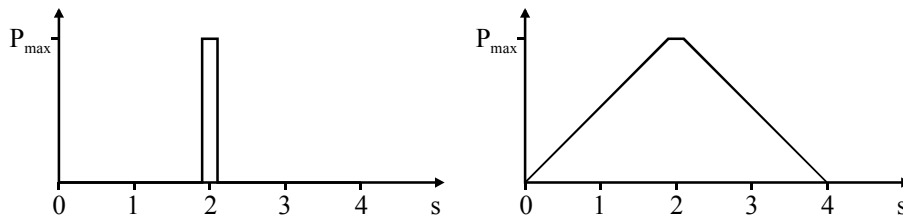


Figura 2. Perfis de excitação usados na equação (35) para representar as estratégias clássica (tipo Dirac) e otimizada (triangular) de sensoriamento acústico (s representa uma coordenada curvilínea percorrendo o contorno a partir de $(x=0, y=0)$ no sentido anti-horário).

O modelo numérico da equação governante do problema de propagação acústica estudado foi desenvolvido em elementos finitos com formato triangular e funções de interpolação de primeira ordem (lineares). Foi realizado um estudo preliminar de convergência das soluções em relação ao refinamento da malha de discretização, visando otimizar compromisso entre tempo de cálculo e precisão dos resultados. As rotinas foram programadas em ambiente Matlab e implementadas num microcomputador padrão IBM com processador Pentium-III de 700 MHz. O procedimento de construção das curvas de sensibilidade do problema de referência, i.e. a inclusão na posição central do domínio de sensoriamento, para deslocamentos sobre a semi-diagonal superior direita, pode ser resumido nas seguintes etapas:

- 1 – Cálculo da resposta de referência (experimental) $Q_{res,exp}$ por intermédio de (36) com $\tilde{P}(s)$ obtido da solução de (32), condição de contorno conforme indicado na figura 1 e distribuição de velocidades locais de propagação segundo (41) e (42) para $d = 0$,
- 2 – A resposta do modelo (estimada) $Q_{res,est}$ é estimada de forma análoga a etapa 1, e com os mesmos perfis de excitação, porém com valores de d progressivamente maiores,
- 3 – Para cada valor do deslocamento d a sensibilidade é calculada segundo a definição (37), após normalização dos perfis de resposta de maneira a permitir a comparação dos resultados para diferentes perfis de excitação.

Os resultados obtidos são apresentados nos gráficos da figura seguinte. Nestes gráficos é possível constatar que a sensibilidade da técnica clássica de excitação tipo Dirac é aproximadamente três ordens de grandeza inferior à sensibilidade associada à excitação obtida através da aplicação do perfil triangular proposto. De fato, relativamente ao problema de sensoriamento elétrico tratado no trabalho de Figueroa e Selegim (2001), o sensoriamento acústico segundo a técnica tradicional apresenta falta de sensibilidade intrínseca ainda mais pronunciada, provavelmente devido à presença dos termos dissipativos nas equações que governam o fenômeno. Isso provavelmente explica a abrangência bastante limitada dos resultados reportados na literatura técnica e científica envolvendo tomografia termo-acústica.

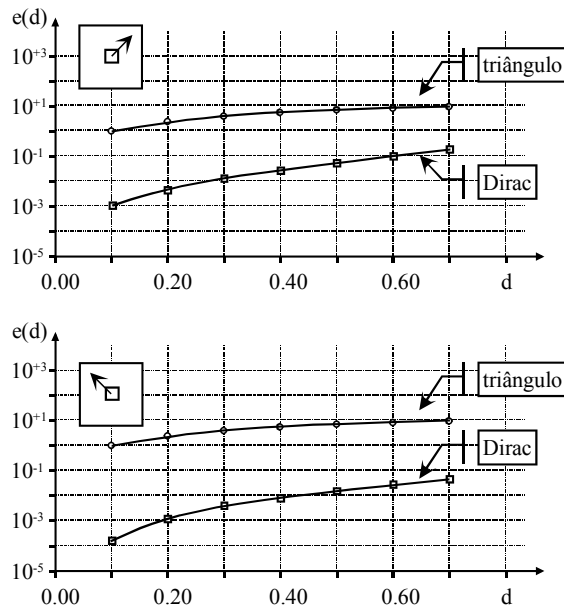


Figura 3. Evolução da sensibilidade quantificada segundo a expressão (37) para a inclusão Ω_i se deslocando sobre a semi-diagonal superior direita e esquerda.

As razões ligadas a estes fatos podem ser melhor compreendidas analisando-se a evolução dos perfis de taxas de deslocamento obtidos ($Q_{res,est}$) como resposta à aplicação dos perfis de excitação e em função do deslocamento da inclusão prospectiva, conforme mostrado nas figuras seguintes. Observando as figuras 4a e 5a, correspondentes à excitação tipo Dirac, é possível constatar que deslocamentos significativos ocorrem somente em pequenas vizinhanças do ponto onde ocorre P_{max} (em $s = 2$), devido à pouca penetração da energia de sensoriamento. Em outras palavras, esta estratégia clássica de excitação é incapaz de “iluminar” ou “insonificar” adequadamente a inclusão contida no domínio de medida e, conseqüentemente, variações na posição de Ω_i terão forçosamente pouco ou nenhum efeito sobre os perfis de resposta. Nestas condições o problema numérico de reconstrução tomográfica será extremamente mal condicionado e, provavelmente, inviável de ser resolvido satisfatoriamente na presença de erros experimentais e de truncamento numérico. Contrastando com esse comportamento, a excitação feita segundo o perfil triangular proposto produz insonificação intensa e multidirecional da inclusão presente no domínio de sensoriamento e, em decorrência disto, as taxas de deslocamento resultantes são significativamente mais intensas e mais sensíveis à variações na posição da inclusão prospectiva Ω_i . Pode-se afirmar então que a reconstrução tomográfica nestas bases ocorrerá de maneira bem menos problemática e com maior chances de sucesso em condições práticas de aplicação.

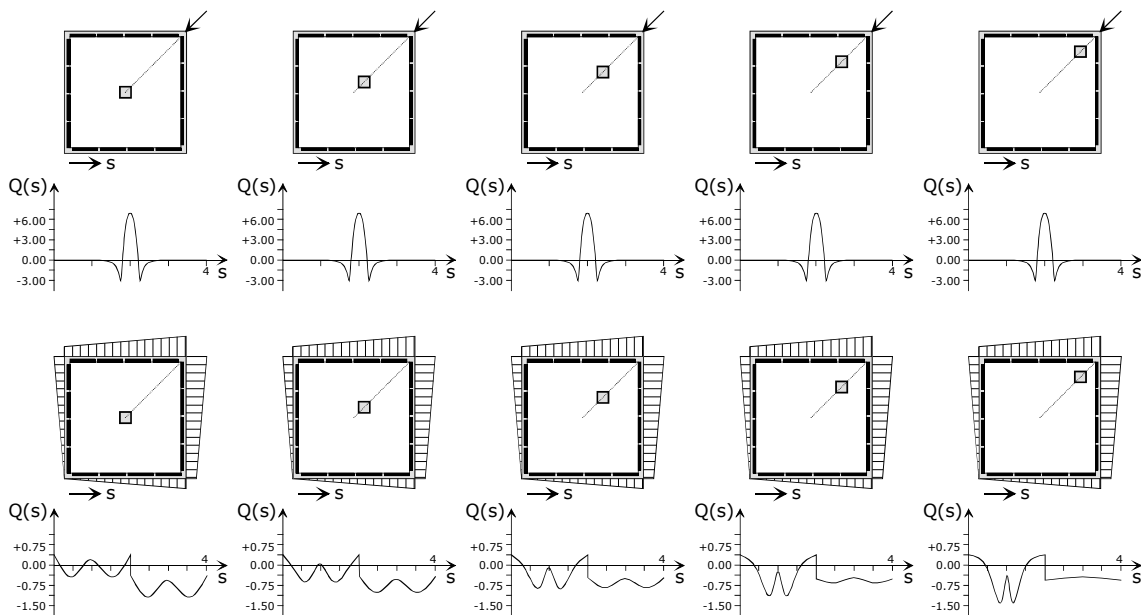


Figura 4. Evolução dos perfis de taxas de deslocamento ($Q_{res,est}$) obtidos como resposta à aplicação dos perfis de excitação para deslocamentos da inclusão prospectiva sobre a semi-diagonal superior direita – 4a: excitação clássica tipo Dirac, 4b – excitação através de perfis triangulares de pressão.

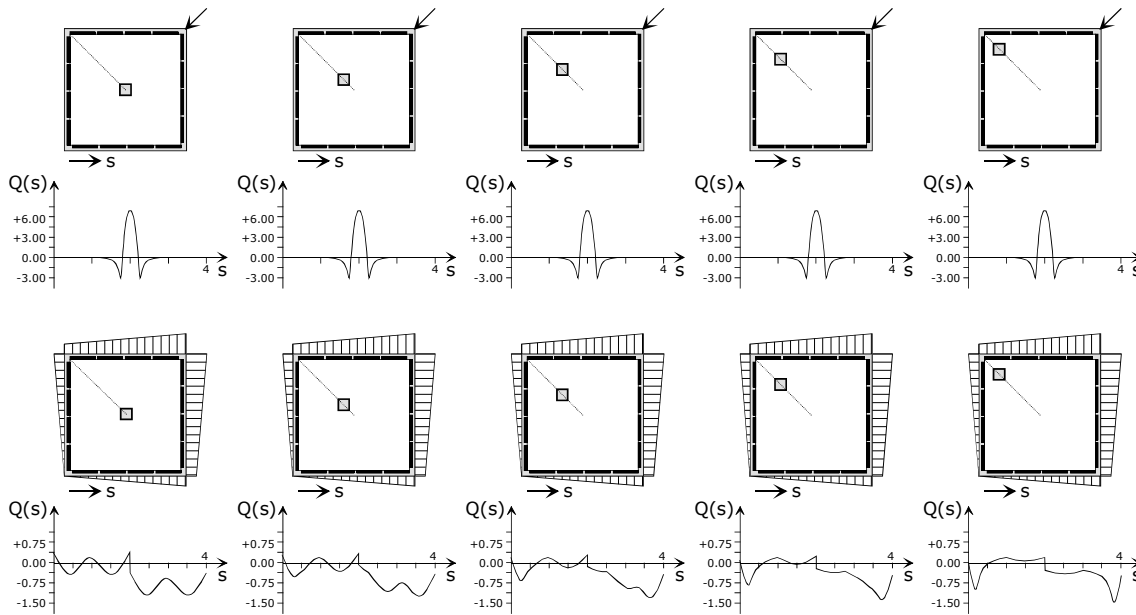


Figura 5. Evolução dos perfis de taxas de deslocamento ($Q_{res,est}$) obtidos como resposta à aplicação dos perfis de excitação para deslocamentos da inclusão prospectiva sobre a semi-diagonal superior esquerda – 5a: excitação clássica tipo Dirac, 5b – excitação através de perfis triangulares de pressão.

5. Conclusões

Este trabalho deriva de um projeto de pesquisa em curso no Núcleo de Engenharia Térmica e Fluidos, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, dedicado ao desenvolvimento de técnicas de monitoração de escoamentos bifásicos industriais através de imageamento direto e tomográfico obtido a partir de medidas de distribuições externas de impedância elétrica e acústica. Em específico foi apresentada uma formulação matemática para o problema de reconstrução inversa termo-acústica baseada na minimização de um funcional de erro construído a partir das respostas real, determinada experimentalmente diretamente do processo investigado, e numérica, determinada a partir de um modelo numérico das equações que governam o problema e de uma estimativa da distribuição de velocidade local de propagação acústica. Além disso, foi apresentado um estudo comparativo de sensibilidade associada a duas estratégias de excitação (clássica tipo Dirac e triangular), visando determinar condições em que a reconstrução inversa pode ser feita em condições factíveis experimentalmente. Os resultados mostram que, de fato, a sensibilidade está intimamente ligada à estratégia de excitação. Além disso, a técnica clássica tipo Dirac normalmente empregada é inadequada para aplicações em que não há possibilidade de se limitar os níveis de erro experimental e numérico abaixo de valores críticos. O perfil triangular proposto está associado a uma sensibilidade superior em cerca de três ordens de grandeza e, conseqüentemente, viabiliza a aplicação do método proposto em condições menos restritivas, como é normalmente o caso das aplicações industriais. Estudos futuros poderão incluir um estudo sistemático e exaustivo de perfis otimizados de excitação para diferentes geometrias e características acústicas da substância sensorizada, bem como estudos sobre patologias do funcional de erro que, a exemplo do caso elétrico, deve apresentar dificuldades topológicas bastante complexas.

6. Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com suporte financeiro da FAPESP (Projeto Regular Proc. No. 98/12921-1) e do CNPq (bolsas de mestrado e PQ).

7. Referências

- Ascher, R.C., 1997, “Ultrasonic Sensors”, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, ISBN 0-7503-0361-1, 473p.
- Beyer, R.T. e Letcher, S.V., 1969, “Physical ultrasonics”, New York, Academic Press, New York, ISBN 0-1209-5050-2, 378p.
- Bhatia, A.B., 1967, “Ultrasonic Absorption: An Introduction to the Theory of Sound Absorption and Dispersion in Gases, Liquids and Solids”, Dover Publication Inc., New York, ISBN 0-486-64917-2, 427p.
- Elicer-Cort, J.C. e Baudet, C., 1999, “Ultrasound scattering from a turbulent round thermal pure plume”, Experimental Thermal and Fluid Science, Vol.18, pp. 271-281

- Figuroa T. P. and Seleglim Jr. P., 2001, Sensitivity Analysis of Different Sensing Strategies for Electrical Impedance Imaging of Two-Phase Flows, *Journal of Electronic Imaging*, Vol. 10, No. 3, pp. 641-645
- Fujii, M. e Zhang, X., 2001, "Noncontact measurement of internal temperature distribution in a solid material using ultrasonic computed tomography", *Experimental Thermal Fluid Science*, Vol.24, pp. 107-116.
- Greenspan, M. e Tschiegg, C.E., 1959, "Tables of speed of sound in water", *Journal of the Acoustic Society of America*, Vol.31, No.1, pp.75-76.
- Gzyl, H., "Inverse problem for the acoustic wave equation: a probabilistic approach to approximations and uniqueness", *Applied Mathematics and Computation*, Vol.122, pp.179-194.
- Rolnik, V. P. e Seleglim Jr., P., 2001, "Contribution to the development of a new image reconstruction", 2nd International Conference on Computational Heat & Mass Transfer – ICCHMT, 22nd - 26th October, 2001, Rio de Janeiro. CD-ROM.
- Seleglim Jr., P. & Milioli F.E., 2001. Improving the determination of bubble size histograms by employing wavelet denoising techniques. *Powder Technology*, Vol. 115, pp.114-123.
- Ying, J. e Sun, W., 1996, "Direct optimization approach to the two-dimensional acoustic inverse problem in the time domain", *Wave Motion*, Vol.24, pp.13-20.

THERMAL TOMOGRAPHY VIA ACOUSTIC SENSING: SENSITIVITY STUDIES

E. R. Filletti

NETeF – SEM - EESC
 Universidade de São Paulo
 Av. Trabalhador São-carlense, 400
 13560-970 São Carlos - SP
filletti@ig.com.br

P. Seleglim Jr.

NETeF – SEM - EESC
 Universidade de São Paulo
 Av. Trabalhador São-carlense, 400
 13560-970 São Carlos - SP
seleglim@sc.usp.br

Abstract. *Thermal tomography of materials and flow processes is of fundamental importance to the optimization of industrial applications, particularly in the present context of continuum demand for increasing performances, minimization of energy consumption, pollutant emission reduction and so on. In fact, the number of scientific and technical dedicated is undoubtedly growing, although many phenomenological questions are still open. One of them concerns the possibility of interrogating the studied medium with the help of an acoustic field produced on its boundaries and of reconstructing the internal temperature field from the corresponding boundary responses, i.e. time-of-flight and/or intensities distributions. The method is based on the fact that, for a medium with known physical properties, the local velocity of sound depends on the internal temperature distribution in a way that, mathematically, it is possibly possible to reconstruct a one-to-one relation between both distributions. Even though possible, the relation between boundary measurements and the internal propagation velocity distribution (which maps the temperature distribution) is inverse and, consequently, the problem of reconstruction the last from the former is intrinsically ill conditioned. Concretely, this may so that the reconstructed procedure is extremely sensitive to experimental errors in the boundary measurements and, to obtain an acceptable reconstruction, it would be necessary to measure with an unrealistic degree of accuracy. The precise determination of the excitation and measurement conditions in which one incurs in such sensitivity problems constitutes the main objective of this work. This is done from numerical simulations of the modified Helmholtz equation, representing a two-dimensional domain within which different sensing conditions are reproduced. The sensitivity was assessed by varying the position of a test inclusion (a region in which the sound propagation velocity is different) and by computing the corresponding variation in sound intensities at the boundary.*

Keywords. *thermal tomography, thermography, acoustic sensing, inverse problem, sensitivity*