

USO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO PARA SIMULAÇÃO DE TEMPERATURA TRANSIENTE JUNTO À PAREDE DE RESERVATÓRIOS ESFÉRICOS

Rubem Mário Figueiró Vargas

Faculdade de Engenharia PUCRS - Departamento de Engenharia Química
Av. Ipiranga 6681, Prédio 30, CEP 90619.900, Porto Alegre (RS), Brasil
rvargas@eq.pucrs.br

Resumo. Com o uso da teoria do cálculo fracionário e Transformada de Laplace, uma solução analítica geral é obtida para a temperatura interna junto à parede de um reservatório esférico, que armazena um determinado fluido, quando submetido a uma brusca mudança na temperatura do ambiente externo.

Palavras chave: Cálculo Fracionário, Temperatura transiente junto à parede, Transformada de Laplace

1. Introdução

No projeto e análise de reservatórios esféricos, utilizados para a armazenagem de fluidos, o conhecimento da transferência de calor transiente para o fluido no interior do tanque em função do tempo torna-se necessário. Este processo de transferência de calor é modelado supondo-se uma súbita variação na temperatura do ambiente externo ao reservatório e deseja-se conhecer as conseqüências desta sobre as propriedades do fluido interno. Esta variação como ocorre no ambiente externo, ou seja, na atmosfera, não é controlada, daí a relevância do estudo proposto. A representação matemática de tal situação pode considerar a presença ou não da parede do tanque. A aproximação mais simples do problema transiente é a análise pseudo-estacionária, vinculada à rapidez do processo de transferência não estacionária. Li (1986) gera soluções para esta aproximação em geometria cilíndrica. Um dos fatores que controla esta rapidez é a razão entre as capacidades térmicas do fluido e da parede, uma análise sobre a dependência da solução e possíveis aproximações com relação a esta razão é feita por Sucec (1988) para o escoamento no interior de um tubo. Krishnan (1982) analisa o caso de transferência transiente de calor em geometria cilíndrica, fazendo uso da transformada de Laplace para a obtenção de uma solução analítica para o problema. Vargas (1990) também trabalhando em geometria cilíndrica, estabeleceu soluções analíticas aproximadas para diferentes situações em relação às capacidades térmicas da parede e do fluido interno, utilizando o cálculo fracionários.

A representatividade da influência da parede no processo de transferência de calor é avaliada fisicamente a partir de um parâmetro comparativo entre as capacidades térmicas do fluido e da parede.

Encontra-se na literatura soluções para problemas semelhantes ao que se deseja tratar, onde normalmente despreza-se a influência da parede do reservatório com a intenção de simplificar-se a representação matemática e viabilizar-se assim a obtenção de uma solução analítica. Neste trabalho apresenta-se uma técnica alternativa de solução onde contempla-se as duas situações, quais sejam o modelo com e sem a presença da parede. A partir destas soluções pode-se ter então uma idéia do comprometimento do problema real com as hipóteses simplificadoras. A técnica utilizada consiste no uso simultâneo de Transformada de Laplace e cálculo fracionário para a construção de uma solução analítica em forma fechada. O resultado obtido é válido para valores pequenos do tempo adimensionalizado, e este intervalo de validade é explicitado, esta restrição quanto à aplicação da solução não compromete o modelo visto que este representa o estado transiente, que ocorre apenas no início do processo. Resultados serão apresentados tanto para a temperatura da parede como para o fluxo de calor transferido, considerando-se valores pré estabelecidos de coeficientes de transferência de calor, tanto de forma gráfica como numérica. Perfis de temperatura adimensionalizada também serão confrontados a fim de verificar a coincidência das descrições com e sem parede no modelo matemático.

2. Análise

Na situação física, um gás, inicialmente com temperatura uniforme T_i em toda sua extensão, está no interior de um tanque esférico de raio interno R . Uma variação súbita na temperatura do ambiente externo para T_L , inicia o processo de transferência de calor dependente do tempo. Considera-se apenas a direção radial da transferência de calor, assim como assume-se que a temperatura é constante ao longo da parede do reservatório de espessura, b .

Para as condições estabelecidas, um balanço de energia para o fluido e então para a parede de espessura b , além do uso da condição de conjugação dos fluxos e continuidade da temperatura na interface parede-fluido, determina um conjunto de equações diferenciais e condições que são apresentadas a seguir.

Seja, então a equação de energia em coordenada esférica somente na direção radial, Ozisik (1980):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < r < R, \quad (1.a)$$

sujeito à seguinte condição de contorno em $r=R$:

$$kA \frac{\partial T}{\partial r} = UA(T_L - T) - V_w \rho_w c_{p_w} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.b)$$

Além da imposição de que em todo o domínio do problema a temperatura deva ser limitada e com a condição inicial sendo.

$$T = T_i \text{ em } t = 0 \quad (1.c)$$

onde $T = T(r,t)$ é a temperatura; r é a coordenada radial; α , a difusividade térmica do fluido interno; U é o coeficiente global de transferência de calor entre o fluido externo ao reservatório e a parede interna baseado na área superficial interna; A é a área da esfera de raio R ; V , o volume da parede; k , é a condutividade térmica do fluido interno; ρ , a massa específica, c_p , o calor específico; sendo o sub-índice w indicador de que as propriedades referem-se à parede.

A condição de contorno para $r = R$ pode ser dividida por kA sendo então reescrita levando-se em conta a geometria do problema como:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{U}{k} (T_L - T) - \left[1 + \frac{b}{R} + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{R} \right)^2 \right] \frac{\rho_w c_{p_w} b}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

introduzindo-se os seguintes adimensionais:

$$\phi(Z, F) = \frac{T(r,t) - T_i}{T_L - T_i}; \quad F = \frac{\alpha}{R^2}; \quad Z = \frac{r}{R}; \quad S = \frac{UR}{k}, \quad (3)$$

sendo $\phi(z, F)$ a temperatura adimensionalizada, F o tempo adimensionalizado, z a coordenada radial adimensionalizada e S é um coeficiente que relaciona a resistência à transferência de calor do fluido interno com a resistência associada à parede e ao fluido externo, o problema (1) pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial F} \quad (4.a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = S(1 - \phi) - \left[1 + \frac{b}{R} + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{R} \right)^2 \right] \frac{1}{\hat{a}} \frac{\partial \phi}{\partial F} \quad (4.b)$$

em $z = 1$;

$$\phi = 0 \text{ em } F=0. \quad (4.c)$$

Sendo $\hat{a} = \frac{\rho c_p R}{\rho_w c_{p_w} b}$, o parâmetro comparativo entre as capacidades térmicas do fluido interno e do material da parede. Para simplificar-se a notação define-se:

$$G = \left[1 + \frac{b}{R} + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{R} \right)^2 \right] \frac{1}{\hat{a}} \quad (5)$$

Note que G é praticamente governado pelo termo $1/\hat{a}$, visto que o termo entre colchetes tende a um, devido a espessura, b, ser usualmente muito menor que o raio do reservatório, sendo assim G representa a comparação entre a capacidade térmica do material da parede e a capacidade térmica do fluido interno.

Com o objetivo de solucionar-se o problema (4) aplica-se a transformada de Laplace no tempo adimensional F, resultando:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} - p \bar{\phi} = 0 \quad (6.a)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = \frac{S}{p} - S \bar{\phi} - G p \bar{\phi} \text{ em } z = 1. \quad (6.b)$$

A solução do problema acima colocado, levando-se em conta que a mesma deve ser finita, é expressa em termos das funções esféricas modificadas de Bessel como:

$$\bar{\phi}(z, p) = c \sqrt{\frac{\pi}{2z\sqrt{p}}} I_{1/2}(z\sqrt{p}) \quad (7)$$

Derivando a Eq.(7) em relação a z obtém-se.

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi}(z, p) = c \sqrt{p} \sqrt{\frac{\pi}{2z\sqrt{p}}} I_{3/2}(z\sqrt{p}) \quad (8)$$

Então eliminando a constante c da Eq.(8) pela utilização da Eq.(7), escreve-se para a posição z=1, que representa a posição junto à parede do reservatório

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi}(1, p) = \sqrt{p} \frac{I_{3/2}(\sqrt{p})}{I_{1/2}(\sqrt{p})} \bar{\phi}(1, p) \quad (9)$$

Se a razão entre as funções esféricas modificadas de Bessel for igual a 1, então a Eq.(9) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi}(1, p) = \sqrt{p} \bar{\phi}(1, p), \quad (10)$$

Tal condição ocorre quando o argumento de ditas funções for maior que 10, de acordo com Abramowitz e Stegun 1965.

Neste momento busca-se na teoria do cálculo fracionário a relação, que representa a transformada de Laplace da derivada de ordem 1/2 de uma função, de forma que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^{1/2}}{\partial F^{1/2}} \phi(z, F) \right\} = \sqrt{p} \mathcal{L} \{ \phi(z, F) \} - \frac{\partial^{-1/2}}{\partial F^{-1/2}} \phi(z, 0), \quad (11)$$

onde o símbolo \mathcal{L} denota a transformada de Laplace aplicada no tempo adimensionalizado F. Tendo em vista que a semi-integral de uma constante é, Oldham e Spanier (1974),

$$\frac{d^{1/2}}{dF^{1/2}} c = 2c \frac{F^{1/2}}{\pi^{1/2}}, \quad (12)$$

e como a constante no problema tratado é a condição inicial e esta por sua vez é nula então a Eq.(11) é escrita como

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^{1/2}}{\partial F^{1/2}} \phi(z, F) \right\} = \sqrt{p} \mathcal{L} \{ \phi(z, F) \}, \quad (13)$$

que para z=1 e comparando-se com a Eq. (10) reduz-se à

$$L\left\{\frac{\partial^{1/2}}{\partial F^{1/2}}\phi(1, F)\right\}=L\left\{\frac{\partial}{\partial z}\phi(1, F)\right\}, \quad (14)$$

aplicando a Transformada inversa na Eq. (14) tem-se

$$\left\{\frac{\partial^{1/2}}{\partial F^{1/2}}\phi(1, F)\right\}=\left\{\frac{\partial}{\partial z}\phi(1, F)\right\}, \quad (15)$$

repassando-se a derivada em relação a z na equação anterior pela expressão representativa da condição de contorno em $z=1$, Eq. (6.b)

$$\frac{\partial^{1/2}}{\partial F^{1/2}}\phi=S(1-\phi)-G\frac{\partial\phi}{\partial F}. \quad (16)$$

Aplicando transformada de Laplace na Eq. (16)

$$\sqrt{p}\bar{\phi}_w-\frac{\partial^{-1/2}}{\partial F^{-1/2}}\phi_w(F=0)=\frac{S}{p}-S\bar{\phi}_w-pG\bar{\phi}_w. \quad (17)$$

Avaliando a semi-integral da condição inicial e isolando $\bar{\phi}_p$, a transformada de Laplace de $\phi(z=1, F)$, na Eq.(17) tem-se

$$\bar{\phi}_w(p)=\frac{S}{p(\sqrt{p}+S+Gp)}. \quad (18)$$

Para se retornar ao domínio tempo utilizou-se a tabela apresentada em Roberts e Kaufmann(1960) e a expressão final tem a seguinte forma:

$$\phi_w(F)=S\int_0^{F/G}e^{-Su}\operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{F-Gu}}\right)du. \quad (19)$$

Onde e é a função exponencial, erfc é a função erro complementar e u é uma variável de integração.

Esta expressão permite calcular ϕ na parede do reservatório em função da variável F em um modelo onde a capacidade térmica da parede foi considerada na construção do modelo matemático. Frequentemente, com o objetivo de facilitar a obtenção de uma solução analítica para o problema de transferência de calor transiente negligencia-se o efeito da parede na transferência de calor, isto no modelo traduz-se em $\hat{a}\rightarrow\infty$ ou na notação utilizada, conforme a Eq.5, em $G\rightarrow 0$. Ao considerar-se tal hipótese, toma-se o limite da Eq.(19) com tal consideração, então tem-se como resultado final:

$$\phi_p(F)=1-e^{S^2F}\operatorname{erfc}(s\sqrt{F}). \quad (20)$$

Os resultados expressos pelas Eqs.(19) e (20) a medida em que foram obtidos sob a condição de que os argumentos das funções de Bessel fossem maiores que 10, restringe o seu intervalo de validade no domínio do tempo adimensional, F. Decorre daí que

$$\sqrt{p}>10, \quad p>100, \quad p^2>100p, \quad L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)<L^{-1}\left(\frac{1}{100p}\right), \quad F<0,01. \quad (21)$$

Ou seja, as soluções acima referidas valem para o domínio de tempo adimensional compreendido entre 0 e 0,01.

3. Resultados

Com o uso das Eqs.(19) e (20) contruiu-se a evolução da temperatura junto à parede do reservatório, expressa em termos de $\theta=1-\phi$, uma temperatura adimensionalizada, em função do tempo adimensional, F, para diferentes valores de G, parâmetro definido de forma a considerar a relação entre as capacidades térmicas do fluido e da parede, a seguir apresenta-se na Tabela 1 valores para esta quantidade considerando-se alguns pares de materiais, referentes à

substância que constitui o fluido interno e a parede do reservatório. Note que \hat{a} tende ao infinito, o que equivale a G tender a zero, quando a capacidade térmica do material da parede é pequena quando comparada a do fluido, esta condição pode ocorrer se um líquido estiver no interior do tanque.

Tabela 1: Valores da quantidade G definido pela Eq. 5 em função da razão entre a espessura da parede e o raio do reservatório assim como de diferentes materiais envolvidos no sistema.

b/R	G
0	0
0,001	3,15 aço/ar
	5,18 aço/hélio
	$8,6 \times 10^{-4}$ aço/água
	$1,2 \times 10^{-3}$ aço/glicerina
0,01	31,8 aço/ar
	52,3 aço/hélio
	$8,6 \times 10^{-3}$ aço/água
	$1,2 \times 10^{-2}$ aço/glicerina
0,1	315 aço/ar
	572 aço/hélio
	$8,6 \times 10^{-2}$ aço/água
	$1,3 \times 10^{-1}$ aço/glicerina

A partir de alguns valores de G da Tabela 1, coeficientes de transferência de calor convectivo usuais e da condutividade térmica do fluido interno plotou-se o comportamento da temperatura na interface parede-fluido interno, que são apresentados nas Figuras 1 e 2.

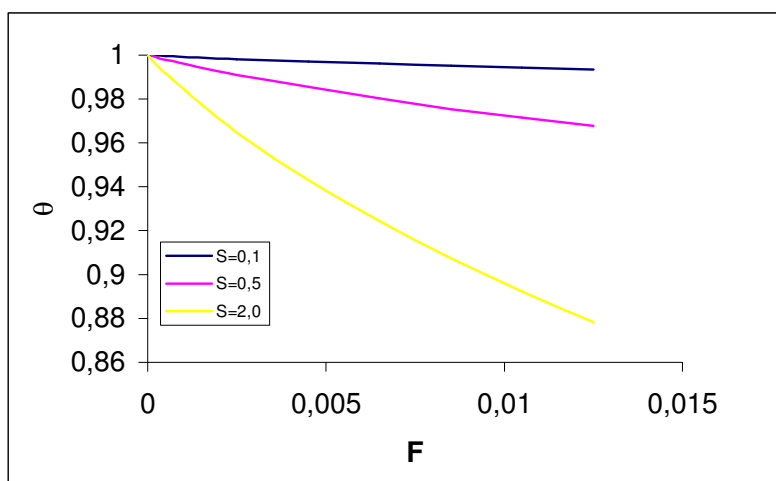


Figura 1: Gráfico da temperatura adimensionalizada, $(1-\phi_w)$, junto à parede do reservatório, em função do tempo, F , para $G=0,1$ com o parâmetro S assumindo os valores 0,1-0,5-2,0.

A fim de investigar a influência das simplificações no modelo matemático sobre o comportamento do sistema físico examinou-se o comportamento da temperatura para diferentes valores de G , conforme apresenta-se na Figura 2.

As curvas são bastante coincidentes quando G refere-se aos valores zero e 0,001, mas para $G=0,1$ o modelo simplificado comprometeria a descrição. Observa-se também que o nível de coincidência entre elas para um mesmo valor de S não é o mesmo em todas as situações, assim como dependem do tempo considerado. Na simbologia S representa a razão entre a resistência térmica do fluido interno e a resistência associada à parede, ou seja se S é grande a influência da parede no modelo é menos representativa, o que leva a pensar que os resultados sofrem menor influência do parâmetro G , indicador das relações entre as capacidades térmicas do fluido interno e da parede. A magnitude de G é decisiva no comportamento físico do sistema, ou seja, ela é um indicador se a parede é espessa o bastante para atrasar a evolução da temperatura no lado interno da mesma em direção ao valor da temperatura a que o meio externo submeteu-se, ou não. Em outras palavras a magnitude G indica se o modelo simplificado pode ser utilizado para retratar o comportamento físico real do processo de transferência de calor ou não, quando então apenas o modelo completo tornar-se-ia representativo do sistema.

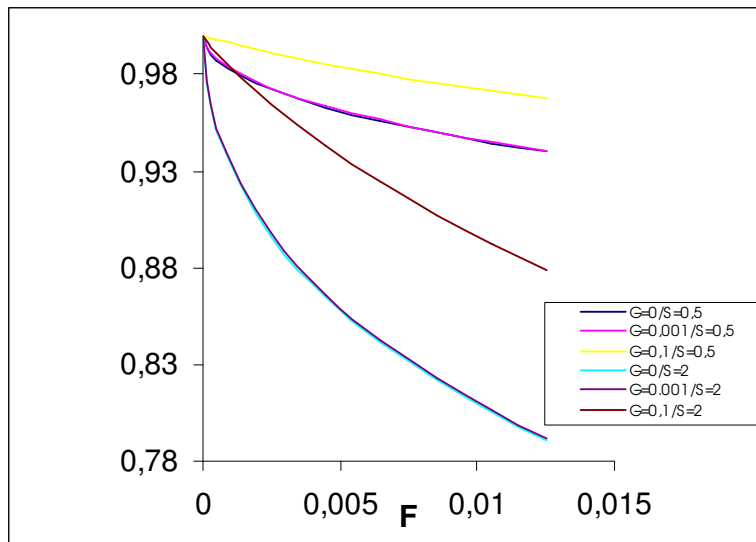


Figura 2: Gráfico comparativo da temperatura adimensionalizada junto à parede do reservatório, $(1-\phi_w)$, em função do tempo, F , para $G=0,1; G=0,001$ e $G=0$, com o parâmetro $S = 0,5$ e $S=2,0$.

Observe que no momento em que se conhece ϕ_w , a temperatura adimensional na parede, na situação em que o efeito da parede é desprezível, pode-se determinar o fluxo de calor através da parede do reservatório como, Sucec (1988):

$$Q_w = 2S(1 - \phi_w). \tag{22}$$

A seguir, representar-se-á o fluxo adimensional de calor, Q_w , em função do tempo adimensional F para alguns valores de S .

Tabela 2: Resultados para o fluxo de calor adimensionalizado em função do tempo adimensionalizado para diferentes valores do parâmetro S .

F	S=0,1	S=0,5	S=2,0
0,0000	0,2	1	4
0,0005	0,199498	0,987508	3,805888
0,0025	0,198877	0,972404	3,585828
0,0045	0,198495	0,963250	3,859780
0,0065	0,198193	0,956091	3,364836
0,0085	0,197936	0,950098	3,286964
0,0105	0,197708	0,944715	3,220240

5 Conclusão

Com o uso do cálculo fracionário chegou-se a uma solução analítica para o problema de transferência de calor em um reservatório esférico, onde não foi negligenciado o efeito da capacidade térmica da parede frente à capacidade térmica do fluido, em função do tempo adimensional, F . Contudo a solução apresentada tem um intervalo limitado quanto a validade. A partir de tal solução chega-se ao caso limite onde a parede é negligenciada no modelo matemático e comparações podem ser verificadas no sentido de clarificar, que muitas vezes o modelo simplificado pode não corresponder a situação que tenta-se modelar. Tais simplificações dependem do coeficiente global adimensionalizado, S e do tempo adimensional, F , conforme estudo realizado.

As soluções reproduzem adequadamente o comportamento físico esperado do sistema além de apresentarem caráter analítico, o que implica em baixo esforço computacional para implementá-las. Acresça-se a isso, a facilidade demonstrada quando da solução do problema com parede espessa, sem a necessidade de técnicas baseadas em diferenças finitas, faz com que este método alternativo de solução pareça bastante atraente.

5. Referências

Abramowitz, M. e Stegun, I (1965), *Handbook of Mathematical Functions*, 1ª edição, Dover Publications Inc., NY.

- Krishnan, B. (1982), "On Conjugated Heat Transfer in Fully Developed Flow", *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, vol.25, 288-291.
- Li, Chung-Hsiung (1986), "Exact Transient Solutions of Paralel-Current Transfer Processes", *ASME - Journal of Heat Transfer*, vol.108, 365-369.
- Oldham, K.B., Spanier,J.(1974), *The Fractional Calculus*, 1ª edição, Academic Press, NY.
- Ozisik, N.M. (1980), *Heat Conduction*, 1ª edição John Wiley & Sons Inc., NY.
- Roberts, G.E., Kaufman, H. (1966), *Table of Laplace Transform*, 1ª edição, W.B. Saunders Company, NY.
- Sucec, J. (1988), "Analytical Solutions for Unsteady Heat Transfer in a Pipe", *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol.110, 850-854, NY.
- Vargas, R.M.F. (1990), "*Estudo de Temperatura Não Estacionária num Tubo pelo Método do Cálculo Fracionário*", dissertação de mestrado, UFRGS, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre.

SIMULATION OF THE TRANSIENT INNER WALL SPHERIC RESERVOIR TEMPERATURE BY THE FRACTIONAL CALCULUS.

Rubem Mário Figueiró Vargas

Faculdade de Engenharia PUCRS - Departamento de Engenharia Química
Av. Ipiranga 6681, Prédio 30, CEP 90619.900, Porto Alegre (RS), Brasil
rvargas@eq.pucrs.br

Abstract. *By means of the fractional calculus theory and the Laplace transform, a general analytical solution is obtained for the inner wall reservoir temperature, for the case of a fluid within a reservoir submitted to a sudden change in the outside temperature.*

Keywords. *Fractional Calculus, Transient Inner Wall Temperature, Laplace Transform.*