

## Solução Aproximada em Forma Analítica do Processo de Ablação Unidimensional

**Braga, Walber F.**

Labsolar/NCTS – Departamento de Engenharia Mecânica – UFSC  
Caixa Postal 476, CEP 88010 – 970, Campus Universitário Trindade, Florianópolis – SC – Brasil.  
Fone: +55 (48) 331 9937; +55 (48) 331 9379. Fax: +55 (48) 234 1519  
[walber@labsolar.ufsc.br](mailto:walber@labsolar.ufsc.br)

**Mantelli, Marcia B. H.**

Labsolar/NCTS – Departamento de Matemática – UFSC  
Caixa Postal 476, CEP 88010 – 970, Campus Universitário Trindade, Florianópolis – SC – Brasil.  
Fone: +55 (48) 331 9937. Fax: +55 (48) 234 1519  
[marcia@emc.ufsc.br](mailto:marcia@emc.ufsc.br)

**Resumo.** A condução de calor transiente em um sólido durante o processo de ablação representa uma área de grande importância tecnológica. Problemas deste tipo são inerentemente não-lineares e envolvem fronteiras móveis não conhecidas a priori. Devido a estes fatores, soluções analíticas exatas para a transferência de calor transiente relativa ao fenômeno ablativo são difíceis de serem obtidas e praticamente inexistentes na literatura. Apenas soluções numéricas e aproximações analíticas são encontradas e necessitam de considerável processamento computacional, mesmo no caso de modelos simplificados. Este trabalho traz como contribuição a solução analítica aproximada da equação de condução de calor unidimensional transiente durante o processo de ablação de um material de propriedades termofísicas constantes submetido a um fluxo de calor constante. Para isto utiliza-se o Método Integral, com um perfil de temperatura parabólico, levando em consideração as duas frentes de penetração: do calor e de ablação. O resultado encontrado é comparado com os resultados numéricos apresentados por Blackwell.

**Palavras chave:** ablação, método integral, condução de calor transiente, solução analítica.

### 1. Introdução

A Condução de calor transiente em um sólido durante o processo de ablação representa uma área de grande interesse tecnológico. Problemas deste tipo são inerentemente não-lineares e envolvem uma fronteira móvel não conhecida a priori. De acordo com Chung et al. (1985) e Zien (1978), a solução analítica para a transferência de calor transiente em um sólido com ablação é muito difícil e praticamente inexistente. Apenas soluções numéricas e aproximações analíticas estão disponíveis e, necessariamente, requerem um alto custo computacional, mesmo quando são utilizados modelos unidimensionais simplificados.

Assim, será abordado um modelo matemático, baseado no mesmo modelo físico apresentado por Landau (1950), que soluciona de maneira aproximada a condução de calor unidimensional transiente em um material ablativo puro. O modelo apresenta uma solução algébrica fechada baseada no método integral.

### 2. Revisão da Literatura

Landau (1950) foi o primeiro a propor um problema idealizado de ablação que passou a ser conhecido como o Problema de Landau, onde as propriedades do material ablativo puro são consideradas constantes e uma das faces do material é aquecida por um fluxo constante. O material produzido pela ablação (gases ou líquidos) é considerado removido instantaneamente, no mesmo momento em que é criado, de forma a não interferir no fluxo de calor na superfície. Landau resolveu esse problema por integração numérica para um sólido semi-infinito.

Sunderland et al. (1961) apresentaram o mesmo problema e utilizaram o método de diferenças finitas para solucionar o caso onde o fluxo varia com o tempo. Biot et al. (1964) usaram o método variacional para solucionar o problema de Landau com propriedades variáveis. Goodman (1969) resolveu o problema usando o método de balanço integral do calor. Por sua vez, Zien (1978) apresentou soluções aproximadas para o problema de Landau com dois perfis de fluxo variável com o tempo. As soluções foram obtidas através de método integral.

Chung et al. (1985) fizeram o estudo de três métodos (método de balanço integral, método integral de  $q$ -momento e método de diferenças finitas implícitas) para a ablação de um material finito submetido a quatro tipos de fluxos variáveis em função do tempo. Neste estudo foram apresentadas as comparações entre os métodos, onde concluiu-se que os métodos de balanço integral e o da integral de  $q$ -momento são os mais adequados para a determinação da espessura do material ablativo e da taxa de ablação.

Hogge (1985) discutiu a aplicação da técnica de elementos finitos deformáveis a um problema de ablação bidimensional. Por sua vez, Hibbert et al. (1988) apresentaram uma solução baseada em uma formulação entálpica usando volumes finitos para problemas de mudança de fase, entre os quais pode ser enquadrada a ablação. Blackwell (1988) adaptou o esquema de diferenças exponenciais de Spalding para a solução do problema de Landau, usando uma malha presa à superfície ablativa. O esquema foi implementado usando volumes finitos para a solução de um problema “real” de ablação, cuja solução é usada como referência para este trabalho.

Venkateshan et al. (1990) apresentaram um método de integração generalizada para a solução analítica do problema de ablação de um meio semi-infinito, submetido a fluxo variável com o tempo. Bons resultados para o caso de fluxos do tipo “Power Law” e para o caso de re-radiação foram obtidos. Storti (1995) considerou o problema de ablação de uma fase como sendo um problema de Stefan de duas fases: uma sendo a do material propriamente dito e a segunda de um material fictício, que ocupa a região onde o primeiro material foi removido. Ele usou o método de elementos finitos para a solução desse problema. Mohan et al. (1996) solucionou o problema de Landau com propriedades variáveis, utilizando a representação de volumes finitos com esquema temporal adaptativo para a perseguição correta da resposta transiente não linear. Hogan et al. (1996) apresentaram a solução para o problema de ablação axisimétrico bidimensional. Para isso foi utilizado o método de elementos de volumes finitos com malha móvel para a discretização da equação da energia.

Katte et al. (2000) apresentaram um modelo bidimensional em coordenadas cilíndricas com o fluxo térmico variando axialmente e temporalmente. A idéia de utilizar-se o número efetivo inverso de Stefan como um calor latente adimensional, foi apresentada neste trabalho, sendo que as equações diferenciais resultantes foram solucionadas através da técnica de diferenças finitas. No Brasil, mais recentemente, Júnior et al. (2000) propuseram uma abordagem do tipo “improved lumped differential” para o problema de Landau com fluxo constante, que é resolvida numericamente com o auxílio do software de manipulação algébrica Mathematica. Para o caso de materiais ablativos compostos, Shih et al. (1997) apresentou um modelo teórico que leva em consideração os efeitos de não equilíbrio térmico, as propriedades variáveis com a temperatura, a reação de pirólise e a expansão termoquímica. Esse modelo foi desenvolvido utilizando médias volumétricas e é implementado com o método de volumes finitos.

No presente trabalho é apresentada uma solução analítica aproximada do problema de Landau utilizando-se o método integral com um perfil parabólico. Com isso pretende-se suprir o hiato indicado por Chung et al. (1985) e Zien (1978) com uma solução analítica, ainda que aproximada, que independe de implementações e análises computacionais.

### 3. Modelo Físico

Um material ablativo simples semi-infinito é aquecido por uma fonte de calor uniforme na face aparente. No começo o material se encontra a uma temperatura constante uniforme,  $T_0$ . Com a incidência do calor proveniente da fonte, a temperatura de parte do material começa a aumentar. O comprimento desta parte do material aquecido é chamado de posição da frente de penetração do calor,  $d_p$ , que delimita a região onde o fluxo de calor incidente ainda não se fez sentir (derivada da temperatura em relação ao espaço é zero). O fluxo de calor, gerado pela fonte, faz com que a temperatura na superfície aumente até atingir a temperatura de ablação,  $T_A$ , dando início à mudança de fase. Durante o período de ablação, uma parte do calor incidente é utilizada nos fenômenos de ablação e a restante é conduzida para o interior do material não consumida da proteção térmica. Os fenômenos de ablação consomem uma parte do material que é instantaneamente removido, conforme modelo apresentado por Landau (1950). O comprimento desta parte do material é chamado de posição da frente de ablação,  $d_A$ , e a frente de ablação é definida como o local onde se encontra a fronteira física do material. Um esquema desse modelo pode ser observado na Fig. (1).

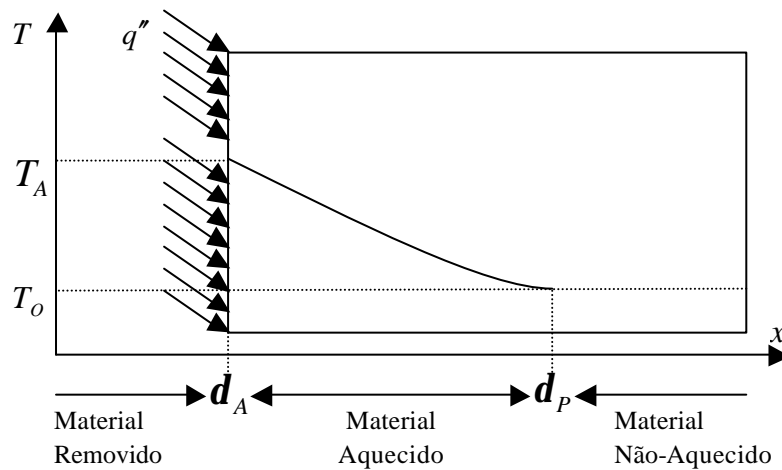


Figura 1. Modelo Físico Adotado

#### 4. Modelo Matemático

A grande maioria dos modelos matemáticos utilizados para a solução dos problemas de mudança de fase utilizam-se de uma das seguintes formulações: entálpica e de temperaturas. A formulação entálpica tem como principal característica o fato de que todo o domínio de cálculo é descrito da mesma maneira, tanto antes como após a posição de frente de mudança de fase. A mudança de fase aparece como um salto das propriedades do material analisado, em especial, a entalpia. Já na formulação de temperaturas, o domínio de cálculo é dividido em duas áreas, cada uma composta pelo material em uma determinada fase. Essas áreas são unidas pela frente de mudança de fase, que apresenta uma equação de acoplamento entre as áreas.

Nesse trabalho será utilizada a formulação de temperaturas, que se mostrou conveniente, uma vez que a fase não-sólida, ou posterior a ablação, é considerada removida instantaneamente sem que seja necessária qualquer suposição a respeito de sua temperatura (modelo de Landau, 1950). O equacionamento apresentado a seguir surge destas hipóteses.

A equação de condução de calor unidimensional para o material sólido, onde a densidade e a capacidade calorífica do material a pressão constante são consideradas constantes, é dada por:

$$\mathbf{r} c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

onde  $\mathbf{r}$  é a densidade do material,  $c_p$  é a capacidade calorífica do material a pressão constante,  $k$  é a condutividade térmica do material,  $T(x,t)$  é a temperatura do material,  $x$  é a coordenada espacial na direção em que ocorre o fenômeno da ablação e  $t$  é a coordenada temporal.

As seguintes condições de contorno são válidas para o período pré-ablativo ( $t \leq t_A$ ), onde  $t_A$  é o tempo no qual a temperatura da superfície atinge  $T_A$ :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ em } x = \mathbf{d}_P \quad (2)$$

$$T = T_0, \text{ em } x \geq \mathbf{d}_P \quad (3)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q'', \text{ em } x = \mathbf{d}_A \quad (4)$$

onde  $q''$  é o fluxo de calor incidente na face do material que vai sofrer a ablação. Nesse período  $\mathbf{d}_A$  é constante  $\frac{d\mathbf{d}_A}{dt} = 0$ . Já para o período ablativo ( $t \geq t_A$ ), tem-se:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ em } x = \mathbf{d}_p \quad (5)$$

$$T = T_o, \text{ em } x = \mathbf{d}_p \quad (6)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q'' - r \mathbf{l} \frac{d \mathbf{d}_A}{d t}, \text{ em } x = \mathbf{d}_A \quad (7)$$

$$T = T_A, \text{ em } x = \mathbf{d}_A \quad (8)$$

onde  $\mathbf{l}$  é o calor latente de ablação, que é proveniente de um balanço dos calores latentes de todos os fenômenos envolvidos no processo, e  $\frac{d \mathbf{d}_A}{d t}$  é a taxa instantânea de ablação ou a velocidade na qual o material é consumido.

Integrando-se a Eq. (1) em  $x$  entre  $\mathbf{d}_A$  e  $\mathbf{d}_p$ , e utilizando-se a regra de Leibniz, uma vez que os limites de integração variam com o tempo, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{d}{d t} \int_{\mathbf{d}_A}^{\mathbf{d}_p} T d x - T \Big|_{x=\mathbf{d}_p} \frac{d \mathbf{d}_p}{d t} + T \Big|_{x=\mathbf{d}_A} \frac{d \mathbf{d}_A}{d t} = \mathbf{a} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\mathbf{d}_A}^{x=\mathbf{d}_p} \quad (9)$$

onde  $\mathbf{a}$  é a difusividade térmica, definida como  $\mathbf{a} \equiv \frac{k}{r c_p}$ .

#### 4.1. Método Integral

O método integral, conforme descrito por Goodman (1969), é ideal para problemas não lineares, tais como a transferência de calor com mudança de fase, por ser maleável o suficiente para absorver as não linearidades sem que seja necessário linearizar o problema. Conforme universalmente estabelecido, no método integral propõe-se uma função resposta para a variável do problema que dependa de alguns parâmetros a serem ajustados através das condições de contorno do problema. Para o presente trabalho, optou-se por uma função resposta para a temperatura  $T$  na forma de um polinômio de segundo grau na coordenada espacial  $x$ , cujos parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  são dependentes de  $t$ . Portanto a distribuição de temperatura e a sua derivada, são dadas por:

$$T = A x^2 + B x + C, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 2 A x + B \quad (10)$$

##### 4.1.1. Período Pré-Ablativo

Substituindo a Eq. 10 nas condições de contorno estabelecidas para o período pré-ablativo, Eqs. (2), (3) e (4), os parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$  podem ser determinados, resultando no seguinte perfil de temperatura:

$$T = -\frac{q''(x - \mathbf{d}_p)^2}{2k(\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_p)} + T_o, \text{ em } \mathbf{d}_A \leq x \leq \mathbf{d}_p \quad (11)$$

Resolvendo-se a Eq. 9 para esta temperatura e resolvendo as derivadas e integrais espaciais, a seguinte expressão é obtida, após alguma manipulação algébrica:

$$\frac{d}{d t} \left( \frac{q''(\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_p)^2}{6k} \right) - \frac{q''(\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_p)}{2k} \frac{d \mathbf{d}_A}{d t} = \mathbf{a} \frac{q''}{k} \quad (12)$$

O segundo termo desta equação é nulo, uma vez que na região pré-ablativa,  $\mathbf{d}_A$  é constante. Definindo-se  $u \equiv (\mathbf{d}_A - \mathbf{d}_p)^2$  e substituindo na expressão anterior, tem-se:

$$\frac{d}{dt}(q'' u) = 6a q'' \quad (13)$$

Que pode ser escrita como:

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{q''} \frac{d}{dt}(q'') = 6a \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} + u \frac{d}{dt}[\ln(q'')] = 6a \quad (14)$$

Cuja solução é dada por:

$$u = \frac{\int_{t_0}^t (6a q'') dt}{q''} + u_0 \quad (15)$$

onde  $t_0$  é o tempo no qual iniciou-se o processo de pré-ablação e  $u_0$  é o quadrado da distância entre  $d_A$  e  $d_p$ , no instante de início do processo. Usualmente  $t_0$  e  $u_0$  são iguais a zero. Substituindo  $u$  na equação anterior, tem-se:

$$(d_A - d_p)^2 = \frac{\int_{t_0}^t (6a q'') dt}{q''} + (d_A - d_p)_0^2 \quad (16)$$

Para o caso em que  $u_0$  é igual a zero esta equação se reduz a:

$$d_p = d_A + \sqrt{\frac{\int_{t_0}^t (6a q'') dt}{q''}} \quad (17)$$

Assim, o perfil de temperatura é dado por:

$$T = \frac{q'' \left( x - d_A - \sqrt{\frac{\int_{t_0}^t (6a q'') dt}{q''}} \right)^2}{2k \sqrt{\frac{\int_{t_0}^t (6a q'') dt}{q''}}} + T_0, \text{ em } d_A \leq x \leq d_p \quad (18)$$

Falta apenas determinar o instante  $t_A$ , em que a temperatura na superfície ( $x = d_A$ ) é  $T_A$ . Substituindo estes valores na equação anterior e considerando  $a$  e  $q''$  constantes, obtém-se:

$$t_A = \frac{[2k(T_A - T_0)]^2}{6a q''^2} + t_0 \quad (19)$$

Em suma, pode-se afirmar que as Eqs. 3, 11 e 17 representam a solução do problema para o período pré-ablativo.

#### 4.1.2. Período Ablativo

As condições de contorno válidas para o período ablativo são apresentadas pelas Eqs. (5) a (8). Assumindo-se o mesmo perfil de temperatura parabólico, dado pela Eq. 10 e seguindo o mesmo procedimento adotado na secção anterior, obtém-se a seguinte distribuição de temperatura, a partir das condições de contorno dadas pelas Eqs. (5), (6) e (8):

$$T = (T_A - T_O) \frac{(x - d_p)^2}{(d_A - d_p)^2} + T_O \quad (20)$$

Passa-se ao cálculo de  $d_p$  e  $d_A$ . Substituindo a Eq. 20 na Eq. 9 e a partir de uma manipulação algébrica simples, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{(T_A - T_O)}{(d_A - d_p)^2} \int_{d_A}^{d_p} (x - d_p)^2 dx \right] + (T_A - T_O) \frac{d d_A}{dt} \\ = a \frac{(T_A - T_O)}{(d_A - d_p)^2} \frac{\partial}{\partial x} (x - d_p)^2 \Big|_{x=d_A}^{x=d_p} \end{aligned} \quad (21)$$

Resolvendo a derivada e a integral espaciais, a seguinte expressão é encontrada:

$$\frac{d d_p}{dt} = -2 \frac{d d_A}{dt} - \frac{6a}{(d_A - d_p)} \quad (22)$$

As Eq. (20) é então substituída na Eq. 7, que representa a única condição de contorno ainda não utilizada, resultando em:

$$-k \frac{\partial}{\partial x} \left[ (T_A - T_O) \frac{(x - d_p)^2}{(d_A - d_p)^2} + T_O \right]_{x=d_A} = q'' - r l \frac{d d_A}{dt} \quad (23)$$

Isolando-se  $d_A$ , após manipulação da expressão, obtém-se:

$$\frac{d d_A}{dt} = \frac{2k (T_A - T_O)}{r l (d_A - d_p)} + \frac{q''}{r l} \quad (24)$$

Definindo-se  $u \equiv (d_A - d_p)$  e utilizando-se as Eqs. (22) e (24), obtém-se, após simplificações:

$$\frac{d u}{dt} = \frac{\left[ 6a + \frac{6k(T_A - T_O)}{r l} \right]}{u} + \frac{3q''}{r l} \quad (25)$$

Definindo-se  $D \equiv 6a + \frac{6k(T_A - T_O)}{r l}$  e  $E = \frac{3q''}{r l}$  obtemos

$$\frac{d u}{dt} = \frac{D}{u} + E \quad (26)$$

A equação acima é uma equação de Abel de segundo tipo e apresenta soluções analíticas para poucos casos. Um dos casos cuja solução é conhecida corresponde aos parâmetros  $D$  e  $E$  constantes. Fisicamente, parâmetro  $D$

constante corresponde ao caso em que as propriedades físicas do material permanecem constantes, e o parâmetro  $E$  constante corresponde a um fluxo de calor constante. Nesse caso, a solução da Eq. (26) é

$$u = -\frac{D}{E} \left( LambertW \left\{ \left( -\frac{E u_A}{D} - 1 \right) \exp \left( \frac{E^2}{D} (t_A - t) - \frac{E u_A}{D} - 1 \right) \right\} + 1 \right) \quad (27)$$

onde  $u_A$  é a diferença entre  $\mathbf{d}_A$  e  $\mathbf{d}_P$  no instante  $t_A$  e a função  $LambertW$  é a solução analítica para a equação transcendental:  $y e^y = x$ .

Substituindo a Eqs. (24) na Eq. (22) e utilizando-se os parâmetros  $u$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F \equiv D - \frac{2k(T_A - T_O)}{r l}$  obtém-se a seguinte expressão já integrada no tempo de  $t_A$  até o instante  $t$ :

$$\int_{t_A}^t \frac{d\mathbf{d}_P}{dt} dt = - \int_{t_A}^t \frac{2E}{3} dt - \int_{t_A}^t F \frac{1}{u} dt \quad (28)$$

Adotando-se  $D$  e  $E$  como parâmetros constantes no tempo, conseqüentemente  $F$  também é constante no tempo. Assim a integral anterior resulta em:

$$\mathbf{d}_P - \mathbf{d}_P|_{t=t_A} = -\frac{2E(t-t_A)}{3} - F \int_{t_A}^t \frac{1}{u} dt \quad (29)$$

Substituindo a expressão para  $u$ , Eq. (27) na equação anterior e resolvendo a integral obtém-se:

$$\mathbf{d}_P = \mathbf{d}_P|_{t=t_A} - \frac{2E(t-t_A)}{3} + \frac{F}{E} \ln \left( \frac{\left( -\frac{E u_A}{D} - 1 \right)}{LambertW \left\{ \left( -\frac{E u_A}{D} - 1 \right) \exp \left( \frac{E^2}{D} (t_A - t) - \frac{E u_A}{D} - 1 \right) \right\}} \right) \quad (30)$$

Partindo da definição de  $u$  podemos escrever  $\mathbf{d}_A = u + \mathbf{d}_P$  e, portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_A = \mathbf{d}_P|_{t=t_A} - \frac{D}{E} \left( LambertW \left\{ \left( -\frac{E u_A}{D} - 1 \right) \exp \left( \frac{E^2}{D} (t_A - t) - \frac{E u_A}{D} - 1 \right) \right\} + 1 \right) + \\ - \frac{2E(t-t_A)}{3} + \frac{F}{E} \ln \left( \frac{\left( -\frac{E u_A}{D} - 1 \right)}{LambertW \left\{ \left( -\frac{E u_A}{D} - 1 \right) \exp \left( \frac{E^2}{D} (t_A - t) - \frac{E u_A}{D} - 1 \right) \right\}} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

O perfil de temperatura, dado pela Eq. (20) pode então ser determinado, substituindo as expressões obtidas para  $\mathbf{d}_A$  assim as definições de  $D$ ,  $E$  e  $F$ .

Um detalhe importante a ser observado é que, nas equações anteriores, as variáveis  $u_A$ ,  $t_A$  e  $\mathbf{d}_P|_{t=t_A}$  são calculadas a partir das equações obtidas para o período pré-ablato mostradas abaixo, para o caso em que o fluxo de calor é constante no tempo, como mostrado a seguir:

$$t_A = \frac{[2k(T_A - T_O)]^2}{6a q''^2} + t_O \quad (32)$$

$$\mathbf{d}_P|_{t=t_A} = \mathbf{d}_A|_{t=t_O} + \sqrt{6a(t_A - t_O)} \quad (33)$$

$$u_A = \mathbf{d}_A|_{t=t_O} - \mathbf{d}_P|_{t=t_A} \quad (34)$$

### 5. Comparação do Método Integral com a Solução de Blackwell

Para validar os resultados obtidos utilizar-se-á as formulações desenvolvidas nos períodos pré-ablativo e ablativo em um caso padrão normalmente utilizado como referência na literatura. Trata-se do problema de ablação de Teflon que foi resolvido por Blackwell (1988) de forma numérica.

Blackwell utilizou-se de esquema de diferenças exponenciais no método de volumes finitos para resolver o problema. É apresentado nesse trabalho um gráfico do perfil de temperaturas que outros autores utilizam como padrão de referência para os seus trabalhos. Assim, utilizar-se-ão dos mesmos dados que Blackwell, que podem ser observados na Tab. 1, para um caso de estudo:

Tabela 1 – Dados utilizados por Blackwell

Condutividade Térmica ( $k$ )	0.22 W/(m K)
Densidade ( $\rho$ )	1922 kg/m <sup>3</sup>
Capacidade calorífica a pressão constante ( $c_p$ )	1256 J/(kg K)
Calor Latente de ablação ( $L$ )	2326000 J/kg
Temperatura de ablação ( $T_A$ )	833 K
Temperatura inicial ( $T_O$ )	298 K
Fluxo de calor incidente ( $q''$ )	2837250 W/m <sup>2</sup>

Além desses dados são necessárias as seguintes informações escolhidas por conveniência:  $d_A|_{t=0} = 0$ ,  $d_P|_{t=0} = 0$  e  $t_O = 0$ . Assim, foram calculados os seguintes valores para o tempo em que começa a ocorrer a ablação e para o comprimento da frente de penetração quando começa a ocorrer a ablação:  $t_A = 0.1234953892$  s e  $d_P|_{t=t_A} = 0.0008296766233$  m.

A Figura (2) apresenta as curvas da frente de penetração do calor e a frente de ablação por um período de tempo até 4.0 s, onde  $x$  é a distância medida em metros e  $t$  o tempo medido em segundos.

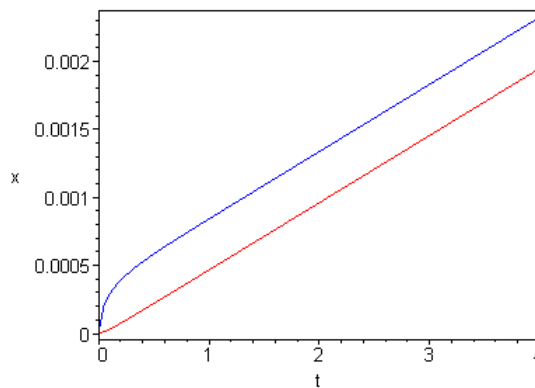


Figura 2. Curvas da frente de penetração do calor e da frente de ablação

A Figura (3) apresenta o detalhe das curvas da frente de penetração do calor por um período de tempo de 0s até 4 vezes  $t_A$ .



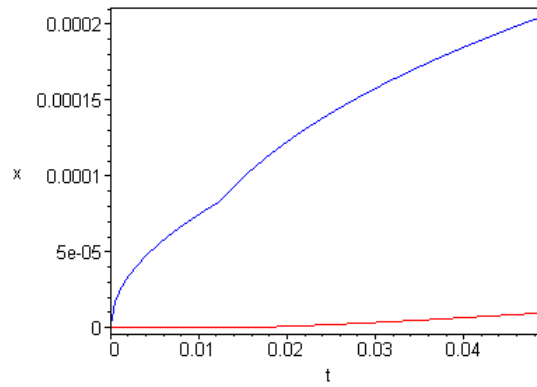


Figura 3. Detalhe das curvas da frente de penetração do calor e da frente de ablação

O perfil de temperatura no mesmo período pode ser observado nas Figs. (4) e (5) abaixo, onde a Fig. (4) apresenta a superfície da temperatura em Kelvin em 3D, onde os outros eixos ( $x$  e  $t$ ) são a posição (em metros) e o tempo (em segundos) respectivamente, e a Fig. (5) apresenta o detalhe da Fig. (4) para o intervalo de tempo de 0s a 4 vezes  $t_A$ .

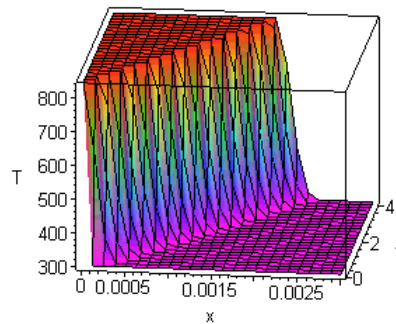


Figura 4. Gráfico da Temperatura em função da posição e do tempo

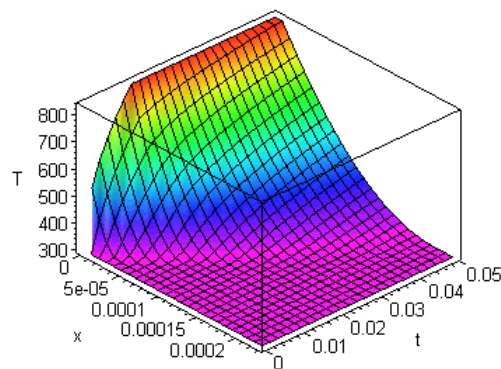


Figura 5. Detalhe do gráfico da Temperatura em função da posição e do tempo

Para que possa ser comparado com o gráfico apresentado por Blackwell, Fig. (6), as coordenadas espaciais foram transformadas para polegadas e a temperatura para Rankine através de método de substituição de variáveis. E foram extraídos pontos do gráfico original utilizando o software SACRID.

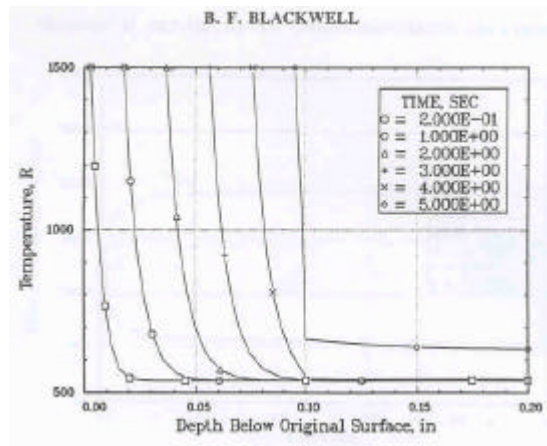


Figura 6. Gráfico retirado de Blackwell (1988)

O resultado pode observado nas Figs. (7) e (8) que apresentam os gráficos dos perfis de temperatura e do erro percentual entre o modelo utilizado e os valores retirados de Blackwell respectivamente.

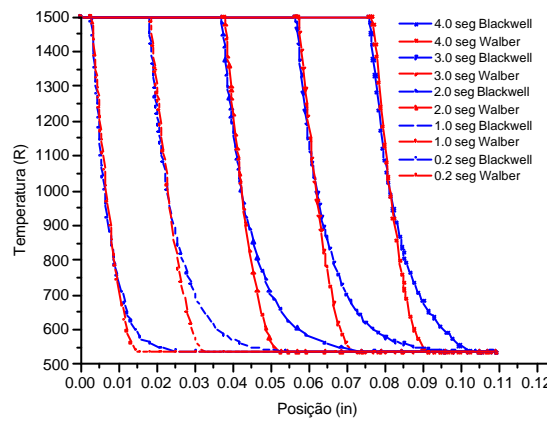


Figura 7. Perfis de temperatura para diversos instantes de tempo para comparação entre o modelo e os resultados obtidos por Blackwell

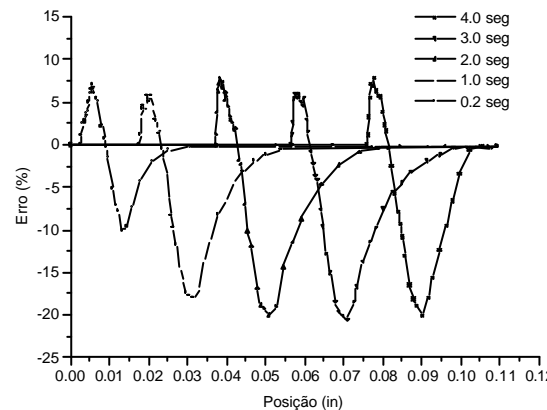


Figura 8. Erro percentual entre o modelo e os valores retirados de Blackwell

É importante observarmos que, embora o perfil de temperaturas não tenha apresentado boa concordância na parte próxima a  $d_p$ , provavelmente devido ao perfil de temperatura assumido, foi encontrada uma ótima concordância na posição de  $d_A$  o que é um excelente resultado uma vez que esse é um processo não linear e desconhecido a priori.

## 6. Conclusão

Este trabalho propôs uma solução aproximada em forma analítica da equação de condução de calor unidimensional transiente durante o processo de ablação de um material de propriedades termofísicas constantes submetido a um fluxo de calor constante. Para isto utilizou-se do Método Integral, com um perfil de temperatura parabólico, levando em consideração as duas frentes de penetração: do calor e de ablação. O resultado comparado com os resultados numéricos apresentados por Blackwell apresenta uma excelente concordância no que se refere ao posicionamento da frente de ablação do material e uma má concordância quanto ao perfil de temperaturas próximo a frente de penetração do calor. Essa má concordância deve ser atenuada ou eliminada no caso de se utilizar uma função exponencial como perfil de temperatura para o método, possibilidade esta que já se encontra em estudo pelos autores.

## 7. Bibliografia

- Biot, M.A., Agrawal, H.C., 1964, "Variational Analysis of Ablation for Variable Properties", Transactions of ASME - Journal of Heat Transfer, August, pp. 437-442.
- Blackwell B.F., 1988, "Numerical Prediction of One-Dimensional Ablation Using a Finite Control Volume Procedure with Exponential Differencing", Numerical Heat Transfer, Vol. 14, pp. 17-34.
- Chung, B.T.F., Hsiao, J.S., 1985, "Heat Transfer with Ablation in a Finite Slab Subjected to Time-Variant Heat Fluxes", AIAA Journal, Vol. 23, No. 1, pp. 145-150.
- Goodman, T.R., 1964, "Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer", Advances in Heat Transfer, Vol. 1, pp.51-122.
- Hibbert, S.E., Markatos, N.C., Voller, V.R., 1988, "Computer Simulation of Moving-Interface, Convective, Phase-Change Processes", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 31, No. 9, pp. 1785-1795.
- Hogan, R.E., Blackwell, B.F., Cochran, R.J., 1996, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 10, No. 2, pp. 312-319.
- Hogge, M., Gerrekens, P., 1985, "Two-Dimensional Deforming Finite Element Methods for Surface Ablation", AIAA Journal, Vol. 23, No.3, pp. 465-472.
- Júnior, N.J.R., Cotta, R.M., 2000, "An Improved Lumped Differential Approach for the Solution of Thermal Ablation Problems", Anais do Encontro Nacional de Ciências Térmicas – ENCIT, Porto Alegre, Brazil, CD-Rom.
- Katte, S.S., Das, S.K., Venkateshan, S.P., 2000, "Two-Dimensional Ablation in Cylindrical Geometry", Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 14, No. 4, pp. 548-556.
- Landau, H.G., 1950, "Heat Conduction in a Melting Solid", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 8, No. 1, pp. 81-94.
- Mohan, R.V., Tamma, K.K., Avila, A.F., 1996, "Flux-Based Finite-Volume Formulations and Adaptive Time-Stepping Strategies for Modeling of Reentry Thermal Protection Systems", Numerical Heat Transfer – Part B, Vol. 30, pp. 117-136.
- Shih, Y.C., Cheung, F.B., 1997, "Numerical Study of the Thermal Response of High-Temperature Ablative Materials", Numerical Heat Transfer – Part A, Vol. 32, pp. 555-574.
- Storti, M., 1995, "Numerical Modeling of Ablation Phenomena as Two-phase Stefan Problem", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 38, No. 15, pp. 2843-2854.
- Suderland, J.E., Grosh, R.J., 1961, "Transient Temperature in a Melting Solid", Transactions of ASME – Journal of Heat Transfer, November, pp. 409-414.
- Venkateshan, S.P., Solaiappan, O., 1990, "A General Integral Method for One Dimensional Ablation", Wärme-und Stoffübertragung, Vol. 25, pp. 141-144.
- Zien, T.F., 1978, "Integral Solutions of Ablation Problems with Time-Dependent Heat Flux", AIAA Journal, Vol. 16, No. 12, pp. 1287-1295.

### Analytical Approached Solution for One-Dimensional Ablation Problem

#### Braga, Walber F.

Labsolar/NCTS – Mechanical Engineering Department – Federal University of Santa Catarina  
P.O.Box: 476, CEP: 88040-900 – Campus Universitário Trindade, Florianópolis, SC, Brazil  
[walber@labsolar.ufsc.br](mailto:walber@labsolar.ufsc.br)

#### Mantelli, Marcia B. H.

Labsolar/NCTS – Mechanical Engineering Department – Federal University of Santa Catarina  
P.O.Box: 476, CEP: 88040-900 – Campus Universitário Trindade, Florianópolis, SC, Brazil  
[marcia@emc.ufsc.br](mailto:marcia@emc.ufsc.br)

**Abstract.** *Transient heat conduction in a solid undergoing ablation represents an area of great technological importance. Problems of this type are inherently nonlinear and involve a moving boundary that is not known a priori. Due to these factors, the exact analytical solution for transient heat transfer in a solid accompanied by ablation is very difficult and practically nonexistent. Only numerical and approximate analytical solutions have been made available and necessarily require considerable numerical*

*computation, even if a simplified model of the problem is used in the study. This work brings, as contribution, the analytical approached solution for the one-dimensional transient heat conduction equation during the ablation process of a constant thermophysics properties material submitted a constant heat flux. For this, the Integral Method is used, with a parabolic temperature profile, considering the two penetration fronts: the heat and ablation ones. The result is compared with the numerical results presented by Blackwell.*

**Keywords.** *ablation, integral method, transient heat conduction, analytical solution*