

## ANÁLISE BASEADA NA 2ª LEI DA TERMODINÂMICA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR E DO ESCOAMENTO TURBULENTO EM DUTOS ANULARES PINADOS

**Sergio Mourão Saboya**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA – Departamento de Energia

12228-900 São José dos Campos SP

Brasil

[saboya@mec.ita.cta.br](mailto:saboya@mec.ita.cta.br)

**Resumo.** A geração de entropia provocada pela transferência de calor e pelo escoamento turbulento é calculada em dutos anulares pinados. O efeito concorrente dessas duas irreversibilidades (isto é, o aumento de uma é acompanhado pela diminuição da outra) leva a possibilidade da determinação de um mínimo de geração de entropia total. Esse mínimo, que corresponde à menor perda de trabalho disponível (menor destruição de exergia), é calculado em termos dos parâmetros adimensionais que caracterizam o sistema.

**Palavras chave:** geração de entropia, escoamento em dutos, pinos, escoamento turbulento, dutos anulares.

### 1. Introdução

Superfícies estendidas em geral e, em particular, pinos são amplamente usados para incrementar a transferência de calor em trocadores. A utilização de tais dispositivos dá-se, entretanto, às custas de aumento das irreversibilidades, em relação às superfícies nas quais eles não estão presentes.

O chamado Método de Minimização de Geração de Entropia (Bejan, 1996a) é uma forma de otimizar os sistemas térmicos possibilitando projetos nos quais as inevitáveis irreversibilidades, provocadas pela transferência de calor e pelo escoamento viscoso, são minimizadas.

O aumento da turbulência tem efeitos concorrentes ou opostos sobre as irreversibilidades resultantes da transferência de calor e do escoamento. Esse aumento provoca uma maior homogeneização do fluido, diminuindo os gradientes de temperaturas, tendendo a diminuir, por consequência, a irreversibilidade proveniente da transferência de calor. Por outro lado uma turbulência maior tende a provocar uma maior irreversibilidade associada ao escoamento do fluido. Nas situações nas quais predomina a irreversibilidade da transferência de calor, por exemplo, um aumento da turbulência pode levar a uma diminuição da irreversibilidade total. A existência desses efeitos concorrentes indica a possibilidade da determinação de uma situação ótima, isto é, um mínimo de geração de entropia.

O interesse na determinação desse mínimo fica claro observando-se que geração de entropia implica em destruição de trabalho útil disponível, ou em outras palavras, de exergia. Um sistema térmico no qual os componentes forem dimensionados para operar numa situação de mínima geração de entropia "economizará" exergia, em comparação com sistemas não otimizados. Essa economia pode resultar num aproveitamento mais eficiente das fontes energéticas.

Uma ampla bibliografia e discussão a respeito do Método de Minimização da Geração de Entropia pode ser encontrada em Bejan (1996a) e em Bejan (1996b). Um exemplo relevante do método aplicado a escoamento turbulento em dutos é o artigo de Gerdov (1996).

O objetivo do presente artigo é a aplicação do Método de Minimização da Geração de Entropia ao escoamento turbulento num duto anular pinado, cuja geometria está esquematizada nas Fig.(1) e Fig.(2). Os pinos têm por objetivo incrementar a transferência de calor ao fluido, em relação ao anel liso, pelo aumento da área de troca e pela promoção de turbulência no escoamento. Os pinos, entretanto, são também "geradores de entropia" e o impacto de sua presença na irreversibilidade do sistema será investigado. A minimização será expressa pela determinação do número de Reynolds correspondente, em função dos parâmetros que caracterizam o sistema.

### 2. Cálculo da Geração de Entropia

A taxa de geração de entropia, na situação de regime permanente, para um volume de controle correspondente ao comprimento  $L$  do duto anular pinado é (Bejan 1996a):

$$\dot{S}_{ger} = \dot{m}(s_2 - s_1) - \frac{\dot{Q}}{T_p} \geq 0 \quad (1)$$

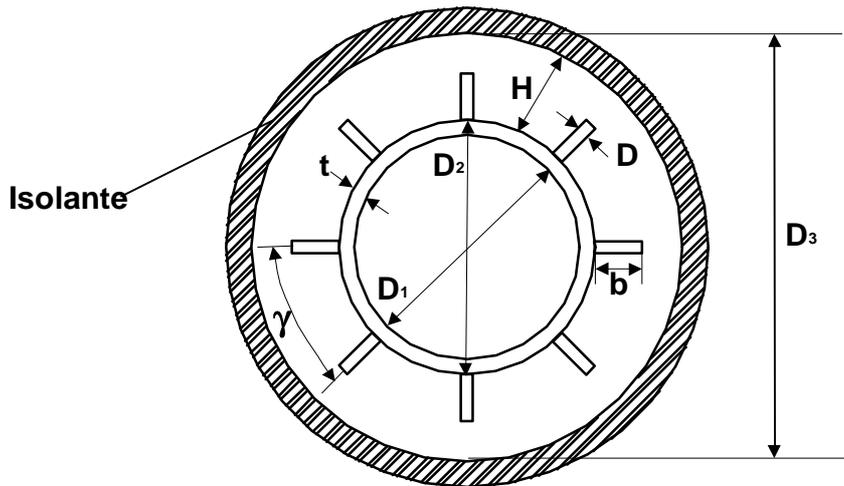


Figura 1. Geometria do duto anular pinado.

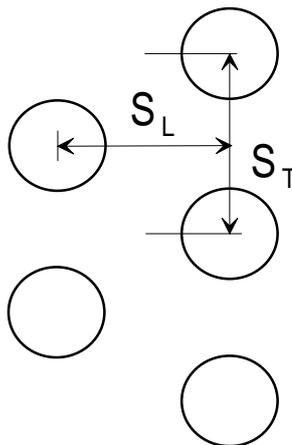


Figura 2. Arranjo triangular dos pinos.

onde:  $\dot{m}$  é a vazão do fluido,  $s_2 - s_1$  são as entropias por unidade de massa na saída e entrada do duto,  $\dot{Q}$  é a taxa de transferência de calor ao fluido e  $T_p$  é a temperatura da superfície do duto, incluindo os pinos.

Para a utilização da Eq.(1) é necessário o conhecimento da variação de entropia entre a saída e a entrada do volume de controle e do calor transferido ao fluido. Admitindo-se que o fluido seja o ar, considerado como gás ideal com calores específicos constantes tem-se:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (2)$$

onde:  $c_p$  é o calor específico a pressão constante do ar,  $T_2$  e  $T_1$  são as temperaturas médias globais do ar ("bulk temperatures") na saída e na entrada do duto, R é a constante de gás ideal do ar e  $P_2$  e  $P_1$  são as pressões na saída e na entrada do duto.

A taxa de transferência de calor ao ar pode ser expressa por:

$$\dot{Q} = \eta h A_t (\Delta T)_{\log} \quad (3)$$

onde:  $\eta$  é a eficiência do pino,  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção entre o ar e as superfícies do duto,  $A_t$  é a área total de transferência de calor e que inclui a superfície dos pinos e  $(\Delta T)_{\log}$  é média logarítmica de temperaturas definida por:

$$(\Delta T)_{\log} = \frac{(T_p - T_1) - (T_p - T_2)}{\ln \left[ \frac{T_p - T_1}{T_p - T_2} \right]} \quad (4)$$

sendo  $T_p$  a temperatura do pino. No presente artigo será considerado  $\eta = 1$ . Isto corresponde a um pino isotérmico cuja temperatura  $T_p$  é a mesma de sua base, e constante ao longo do duto.

O balanço de energia no fluido fornece:

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_2 - T_1) \quad (5)$$

O coeficiente de atrito é definido por:

$$f = \frac{(P_2 - P_1) 2\rho D_h}{L \dot{m}^2 A^2} \quad (6)$$

onde:  $L$  é o comprimento do duto,  $\rho$  é a densidade do ar,  $D_h = D_3 - D_2 = 2H$  é o diâmetro hidráulico [v. Fig.(1)] e  $A = (\pi/4)(D_3^2 - D_2^2)$  é a área frontal do duto anular pinado.

Eliminando  $T_2$  e  $P_2$  entre as Eq.(5), Eq.(6) e Eq.(2), vem:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left( 1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m} c_p T_1} \right) - R \ln \left( 1 - \frac{f L \dot{m}^2}{2 \rho D_h A^2 P_1} \right) \quad (7)$$

Substituindo na Eq.(1):

$$\dot{S}_{ger} = \dot{m} c_p \ln \left( 1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m} c_p T_1} \right) - \frac{\dot{Q}}{T_p} - \dot{m} R \ln \left( 1 - \frac{f L \dot{m}^2}{2 \rho D_h A^2 P_1} \right) \geq 0 \quad (8)$$

Definindo o número de geração de entropia (adimensional),  $N_s$ :

$$N_s = \frac{\dot{S}_{ger}}{\dot{m} c_p} \quad (9)$$

e, tendo em vista que  $R = c_p - c_v$  ( $c_v$  é o calor específico a volume constante do ar), tem-se:

$$N_s = \ln \left( 1 + \frac{\dot{Q}}{\dot{m} c_p T_1} \right) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m} c_p T_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \left( 1 - \frac{f L \dot{m}^2}{2 \rho D_h A^2 P_1} \right) \geq 0 \quad (10)$$

onde:  $\gamma = c_p / c_v = 1,40$  para o ar.

O número de Nusselt é definido por:

$$Nu = \frac{hD_h}{k} \quad (11)$$

onde:  $k$  é a condutividade térmica do ar.

Expressando a Eq.(3) (com  $\eta = 1$ ) em termos do número de Nusselt e substituindo na Eq.(10) obtém-se:

$$N_s = \ln(1 + Nu\theta_1) - Nu\theta - \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln(1 - fK_a) \geq 0 \quad (12)$$

onde:

$$\theta = \frac{kA_t (\Delta T)_{\log}}{D_h T_p \dot{m} c_p} \quad (13)$$

$$\theta_1 = \frac{kA_t (\Delta T)_{\log}}{D_h T_1 \dot{m} c_p} \quad (14)$$

$$K_a = \frac{L\dot{m}^2}{2\rho D_h A^2 P_1} \quad (15)$$

A Equação(12) apresenta o número de geração de entropia em termos desses três parâmetros adimensionais, do número de Nusselt e do coeficiente de atrito. O número de Nusselt e o coeficiente de atrito são funções do número de Reynolds, definido como:

$$Re = \frac{\dot{m}D_h}{A\mu} \quad (16)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do ar.

Fixados  $\theta$ ,  $\theta_1$  e  $K_a$  tem-se, portanto, na Eq.(12), um grau de liberdade, representado pelo número de Reynolds, que, em princípio, poderá levar a um  $N_s$  mínimo.

### 3. Minimização da geração de entropia

Nieckele e Saboya (2000) apresentam correlações para  $Nu$  e  $f$  como funções do número de Reynolds nas condições admitidas no presente artigo, ou seja:  $\eta = 1$  e  $T_p =$  constante:

$$Nu = 0,1051Re^{0,7171} \quad 10^4 \leq Re \leq 10^5 \quad (17)$$

$$f = 1,1241Re^{-0,1196} \quad 10^4 \leq Re \leq 10^5 \quad (18)$$

Essas correlações foram obtidas a partir de resultados experimentais num duto anular pinado, caracterizado pelos seguintes parâmetros geométricos [(v. Fig.(1) e Fig.(2)]:  $D_2/b = 3,43$ ;  $D/b = 0,50$ ;  $D_3/b = 6,857$ ;  $\gamma = \pi/4$  e  $S_L/S_T = 0,97$ .

A substituição das Eq.(17) e Eq.(18) na Eq.(12) dá a função  $N_s = N_s(Re)$  cujo valor extremo será pesquisado:

$$N_s = \ln\left(1 + 0,1051\theta_1 Re^{0,7171}\right) - 0,1051\theta Re^{0,7171} + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \ln\left(1,0 - \frac{1,1241}{Re^{0,1196}}\right) \quad (19)$$

Para obter esse extremo calcula-se

$$\frac{dN_s}{dRe} = 0 \tag{20}$$

A equação algébrica resultante foi resolvida numericamente e os resultados são apresentados a seguir.

#### 4. Resultados e discussão

A Figura(3) e a Tab.(1) exemplificam as soluções numéricas obtidas.

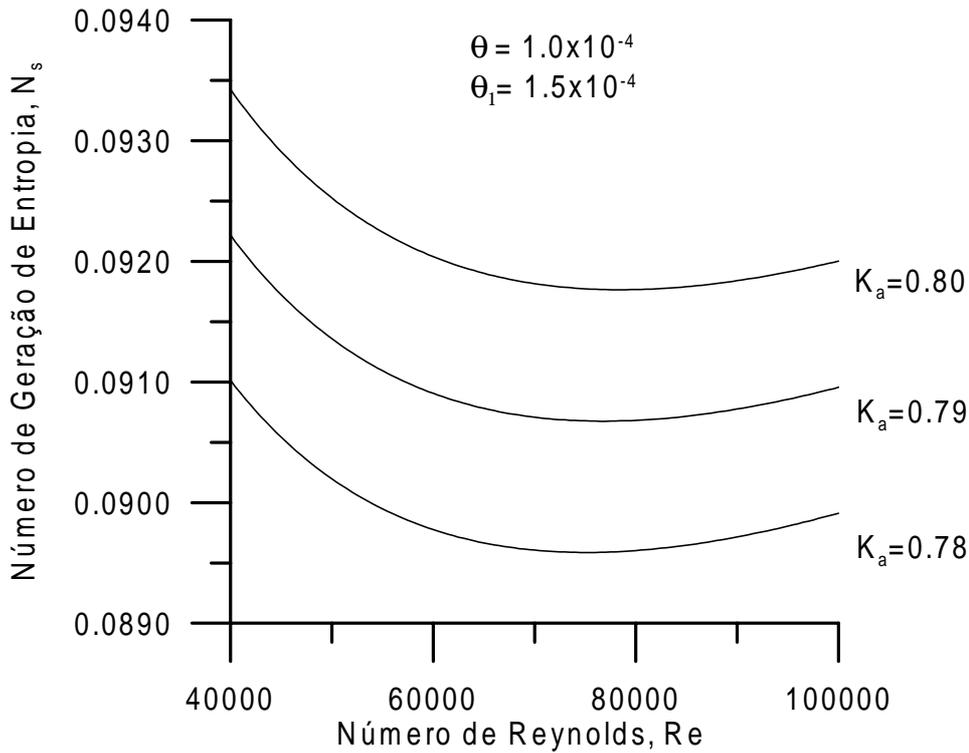


Figura 3. Geração de entropia mínima.

Tabela 1. Número de Reynolds ótimo e geração de entropia mínima para as curvas da Fig.(3).

$K_a$	$(Re)_{ot}$	$(N_s)_{min}$
0,78	75110	0,08960
0,79	76770	0,09068
0,80	78450	0,09177

A Figura (3) mostra claramente o comportamento esperado para  $N_s$ , característico dos efeitos concorrentes das gerações de entropia ocasionados pela transferência de calor e pelo escoamento do fluido. Os valores  $N_s$  para  $Re$  menores que  $Re_{ot}$  indicam uma predominância da irreversibilidade da transferência de calor. A medida  $Re$  aumenta  $N_s$  diminui até o valor mínimo. A partir daí os efeitos da irreversibilidade do escoamento passam a prevalecer e  $N_s$  cresce.

Outro resultado de interesse é a avaliação do impacto na geração de entropia pela utilização dos pinos, em relação aos dutos anulares lisos, isto é, sem pinos. A Figura (4) apresenta um exemplo dessa avaliação. Nela a razão  $N_s/N_{so}$ , onde  $N_{so}$  é o número de geração de entropia para o duto liso, é apresentada em função do número de Reynolds. Os valores de  $N_{so}$  foram calculados usando-se o procedimento descrito anteriormente para  $N_s$  utilizando-se as correlações fornecidas por Braga (1987). Nesse trabalho é feita a análise experimental da transferência de calor no escoamento turbulento em dutos anulares lisos com as mesmas dimensões das do presente artigo. Essas correlações são:

$$Nu_0 = 0,00314Re^{0,9474} \tag{21}$$

$$f_o = 0,5134Re^{-0,2911} \tag{22}$$

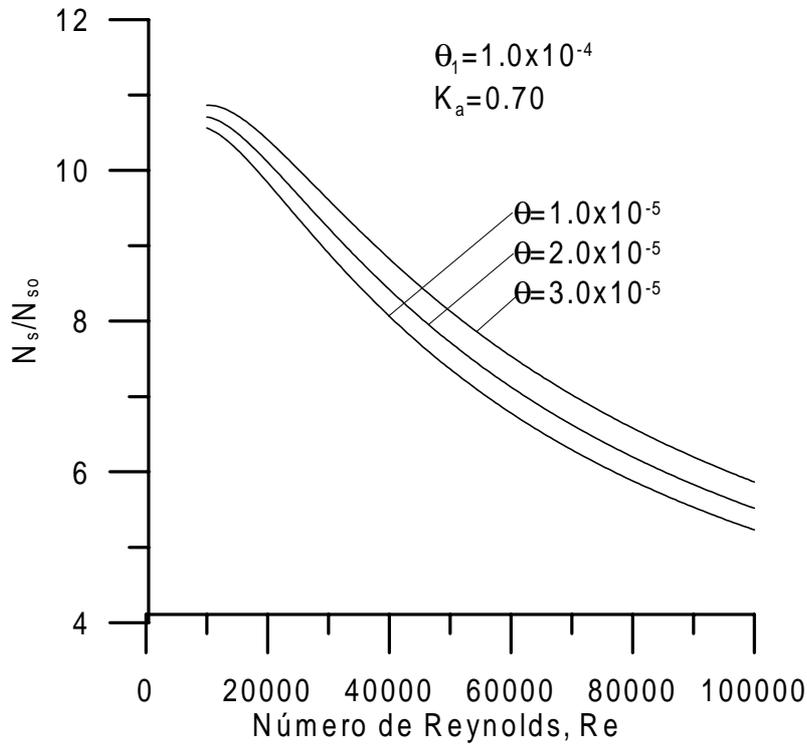


Figura 4. Efeito da presença dos pinos na geração de entropia no duto anular.

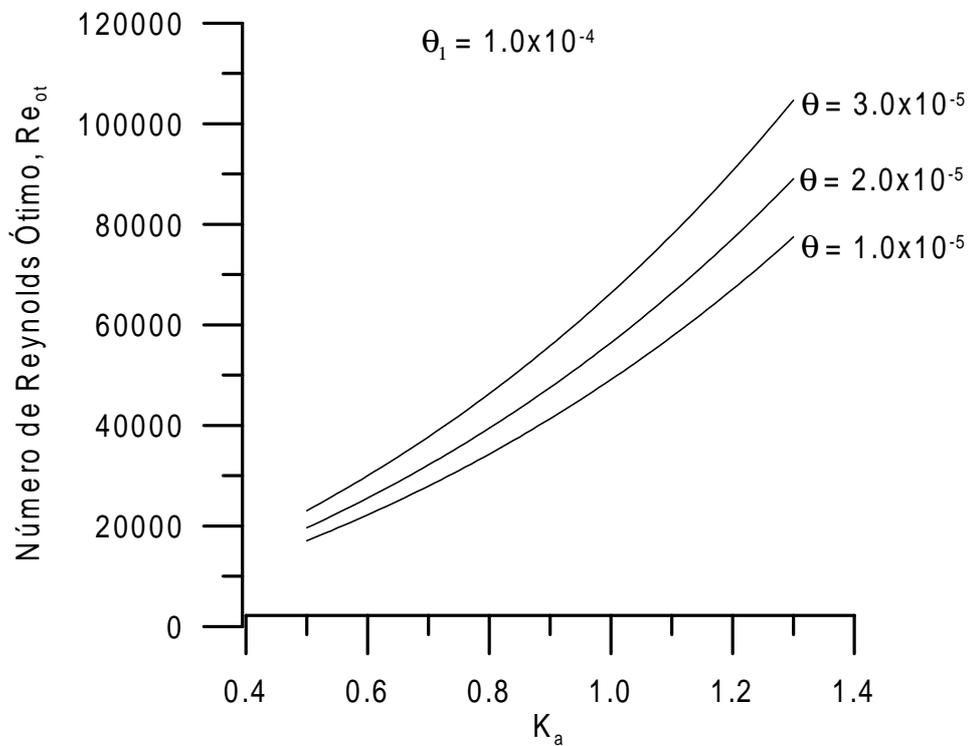


Figura 5. Número de Reynolds ótimo em função de  $K_a$

Nas Equações (21) e (20) o número de Nusselt,  $Nu_o$ , e o coeficiente de atrito,  $f_o$ , têm as mesmas definições dadas anteriormente para o duto anular pinado.

Do ponto de vista do projetista, entretanto, os resultados de maior interesse são aqueles que permitem o dimensionamento do sistema na condição de mínima geração de entropia. As Figuras (5) e (6) fornecem, em termos adimensionais, as informações necessárias para este fim. Notar que os parâmetros dessas figuras não são iguais aos do exemplo da Fig.(3).

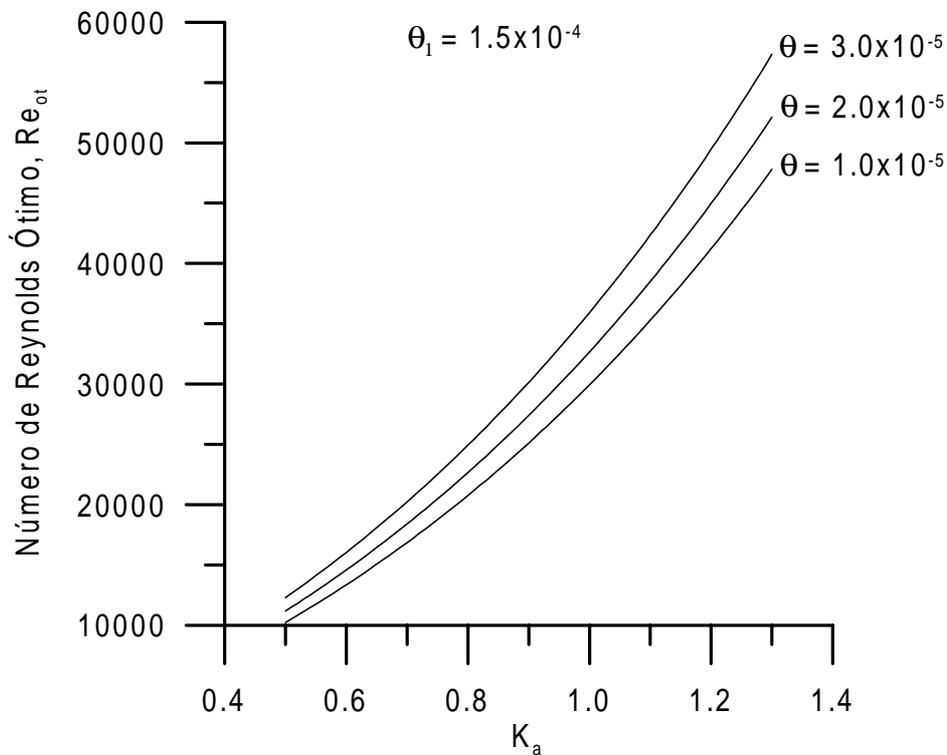


Figura 6. Número de Reynolds ótimo em função de  $K_a$

Existem dois problemas básicos no projeto de trocadores de calor (Incropera e DeWitt,1990): o "sizing problem" que consiste na determinação de dimensões necessárias para a obtenção de uma especificada taxa de transferência de calor, ou o "rating problem" que leva à obtenção das características de transferência num dispositivo cujas dimensões são conhecidas. Para o dimensionamento de dutos anulares pinados que operem em condição de mínima geração de entropia o primeiro problema requer a determinação do  $Re_{ot}$ , o qual permitiria o cálculo de, por exemplo  $D_3$  [ v. Fig.(1)]. Para isso seriam usados os resultados das Fig.(5) e Fig.(6). Eles dependem de informação a respeito de  $\theta$ ,  $\theta_1$  e  $K_a$ , que é obtida por intermédio do conhecimento da vazão e propriedades físicas do ar e das outras grandezas que compõem esses parâmetros. No caso do "rating problem" tem-se o inverso. A incógnita, neste caso, poderia ser a vazão do ar. Em ambos os casos a utilização das Fig.(5) e Fig.(6) levaria a um projeto otimizado. Deve-se ressaltar que os valores de  $\theta$ ,  $\theta_1$  e  $K_a$  apresentados correspondem a valores típicos das grandezas que compõem estes parâmetros adimensionais encontradas em aplicações de dutos anulares.

## 5. Conclusões

O Método de Minimização da Geração de Entropia foi aplicado à transferência de calor com escoamento turbulento em dutos anulares pinados. O número de Reynolds ótimo, correspondente a essa minimização, foi calculado numericamente em função dos parâmetros adimensionais que regem a geração de entropia nesses dutos. Esses resultados permitem um projeto otimizado que, por sua vez, permite a especificação de sistemas com um mínimo de destruição de exergia. Os mecanismos que determinam a geração de entropia também foram discutidos, visando-se a explicação física do comportamento dos sistemas estudados.

## 6. Dedicatória

Este artigo é dedicado à memória do professor Francisco Eduardo Mourão Saboya.

## 7. Referências

- Bejan, A., 1996a, "Entropy Generation Minimization", CRC Press, Boca Raton, USA.
- Bejan, A., 1996b, "Entropy Generation Minimization: The new thermodynamics of finite-size devices and finite-time processes", J. Appl. Phys., 76(3), pp. 1191-1218
- Braga, C. V. M., 1987, "Análise Teórica e Experimental do Desempenho Térmico e Hidráulico de Dutos Anulares Lisos e Aletados", Tese de Doutorado, Dep. de Eng. Mecânica, PUC-RJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Gerdev, G., 1996, "Second Law Analysis of Convective Heat Transfer in Flow Through a Duct with Heat Flux as a Function of Duct Length", HVAC&R Research, vol 2 N<sup>o</sup> 2, pp. 149-157.
- Incropera, F. P. and DeWitt, D. P., 1990, "Fundamentals of Heat and Mass Transfer", Wiley, New York, USA
- Nieckele, A. O. and Saboya, F. E. M., 2000, "Turbulent Heat Transfer and Pressure Drop in Pinned Annular Regions", J. of the Braz. Soc. Mechanical Sciences, Vol. XXII, N<sup>o</sup> 1, pp. 119-132.

### Second Law Analysis of Heat Transfer and Turbulent Flow in Pinned Annular Ducts

#### Sergio Mourão Saboya

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA Dep. de Energia  
CTA - ITA - IEME  
12228-900 São José dos Campos SP Brasil  
[saboya@mec.ita.cta.br](mailto:saboya@mec.ita.cta.br)

**Abstract.** *Entropy generation due heat transfer and turbulent flow is computed in pinned annular ducts. The opposite effect of these two irreversibilities leads to a minimum of entropy generation. This minimum, which corresponds to the lesser exergy destruction, is also computed in terms of system's dimensionless parameters.*

**Keywords:** *entropy generation, duct flow, pins, turbulent flow, annular ducts.*