

Problema de Stefan aplicado em equipamentos eletrônicos: uma abordagem numérica

Christian Naaktgeboren Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná – CEFET/PR - Núcleo de Pesquisa em Engenharia Simultânea – NuPES naak@nupes.cefetpr.br

Silvio Luiz de Mello Junqueira Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná – CEFET/PR - Núcleo de Pesquisa em Engenharia Simultânea – NuPES; Laboratório de Ciências Térmicas – LACIT silvio@nupes.cefetpr.br

Resumo. *Este trabalho propõe um modelo matemático para o processo térmico envolvendo materiais de mudança de fase (MMF) no interior de equipamentos eletrônicos. Os ciclos de fusão/solidificação do MMF em períodos de 24 horas são investigados numericamente. O estudo deste fenômeno, no qual o calor sensível gerado pelos componentes eletrônicos é absorvido pelo MMF na forma de calor latente, permite o controle da temperatura interna do equipamento. A modelagem matemática deste processo considera o encapsulamento como uma parede plana unidimensional com propriedades constantes. O método entálpico, associado à técnica de volumes finitos, é empregado no estudo do problema do tipo de Stefan estabelecido. Grupos adimensionais são identificados na otimização dos parâmetros do problema. Resultados obtidos, em termos do histórico de temperatura, velocidade/posição da interface são apresentados tomando-se por base um caso real.*

Palavras chave: *problema de Stefan, mudança de fase, resfriamento de eletrônicos, volumes finitos, método entálpico.*

1. Introdução

O uso de materiais de mudança de fase para o armazenamento de energia térmica remonta à década de 1950. Desde então tem sido relatados diversos tipos de aplicações, abrangendo desde o arrefecimento de ambientes residenciais até o armazenamento de energia solar (Alexiades and Solomon, 1993).

A indústria de eletro-eletrônicos, em seu permanente desafio frente ao aumento do nível de compactação e densidade de energia dos sistemas, tem se mostrado como um grande campo para o emprego de materiais de mudança de fase. Aplicações de MMF no controle térmico passivo de sistemas eletrônicos são observadas em gabinetes de telecomunicações, módulos portáteis e componentes internos, como *chips* de silício, dissipadores, etc. (Pal and Joshi, 1996).

Trabalhos fundamentais relacionados à influência da geometria do encapsulamento do MMF são creditados a Sparrow and Broadbent, 1982 e Hale and Viskanta, 1980. Além do acompanhamento do histórico da interface sólido/líquido durante o processo, estes trabalhos mostraram que os efeitos da convecção natural são relevantes somente durante o ciclo de fusão.

Do ponto de vista do sistema, a modelagem do fenômeno de transferência de calor com mudança de fase no interior de equipamentos eletro-eletrônicos, é fundamental para o controle da sua temperatura. Nestes sistemas, a carga térmica resultante das influências interna (dissipação dos componentes) e externa (temperatura ambiente e radiação solar) pode ser armazenada no interior do material de mudança de fase durante o processo de fusão. Posteriormente, esta energia é rejeitada, num processo de solidificação.

Bransier, 1979 foi um dos primeiros a analisar processos cíclicos de fusão/solidificação de MMF. Considerando uma geometria plana unidimensional e difusiva dominante, Bransier concluiu que somente duas interfaces podem coexistir durante o fenômeno. Kalhori and Ramadhyani, 1985 realizaram experimentos com cilindros verticais aletados ou não submetidos à fusão/solidificação cíclicas. Jariwala et al., 1987 desenvolveram um modelo quasi-estacionário unidimensional considerando convecção durante o ciclo de fusão e condução durante o ciclo de solidificação. Um importante estudo realizado por Hasan et al., 1991 investigou a periodicidade do processo através da parametrização de um modelo difusivo unidimensional. Gong and Mujumdar, 1996 investigaram o efeito de múltiplos materiais de mudança de fase submetidos a diferentes condições de contorno sobre os sucessivos ciclos de carga e descarga de energia. Mais recentemente, Laouadi and Lacroix, 1999 desenvolveram um estudo teórico para investigar a utilização de MMF em aquecedores elétricos.

O objetivo deste trabalho é investigar o comportamento de um banco de MMF instalado internamente à um equipamento que dissipa potência e é submetido à variação periódica da temperatura ambiente. É considerada uma formulação concentrada para o domínio que compreende o equipamento e o ambiente, sendo que o fenômeno de transferência de calor com mudança de fase observado na interação entre o MMF e o equipamento é resolvido numericamente, utilizando o método entálpico associado à um esquema de volumes finitos.

2. Modelagem matemática

O modelo proposto do processo térmico sob análise pode ser ilustrado através da Fig. (1), que mostra a temperatura do ambiente e do equipamento variando no tempo e a distribuição espacial de temperaturas no material de mudança de fase que também evolui no tempo. Este processo térmico apresenta simetria espacial localizada no plano central do domínio preenchido com material de mudança de fase.

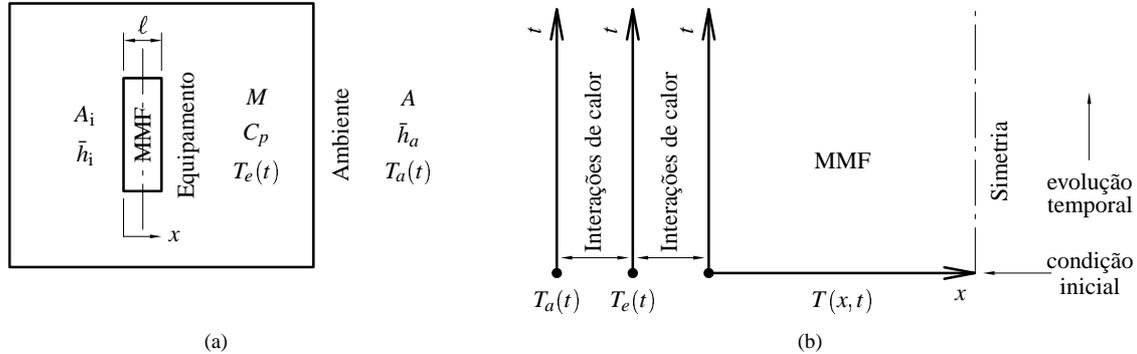


Figura 1: (a) Geometria do problema investigado (b) Representação do modelo matemático

No interior de um equipamento eletrônico hipotético de massa M e calor específico C_p são colocadas placas com espessura ℓ , preenchidas com material de mudança de fase apresentando calor latente constante L , o qual é liberado ou absorvido na temperatura de mudança de fase T_m . As mudanças de fase envolvem os estados sólido e líquido e o material possui propriedades constantes em cada fase. Tais propriedades não são necessariamente iguais para as duas fases, entretanto, a densidade ρ é constante. O material de mudança de fase é sujeito a interações de calor com o equipamento apenas nas faces de seu encapsulamento, por convecção, sendo \bar{h}_i o coeficiente médio de transferência de calor convectiva entre o equipamento e o material de mudança de fase e A_i a área de troca térmica entre o material de mudança de fase e o interior do equipamento. Considera-se a participação do encapsulamento no processo térmico desprezível e a temperatura do material de mudança de fase é expressa por $T(x, t)$. A propriedade T sem índice refere-se ao MMF, o índice e é relativo ao equipamento, e o índice a ao ambiente. O equipamento dissipa uma potência P e possui uma área de troca térmica A com o ambiente externo cujo coeficiente médio de transferência de calor é \bar{h}_a .

As hipóteses simplificadoras utilizadas para a formulação do modelo matemático estão descritas abaixo. Para o processo de transferência de calor no material de mudança de fase, consideram-se as mesmas hipóteses utilizadas no problema clássico de Stefan, (Alexiades and Solomon, 1993). As hipóteses adotadas para a modelagem matemática do processo são:

- ▶ A temperatura do ambiente possui variação periódica conhecida e apenas uma frequência.
- ▶ O coeficiente de transferência de calor \bar{h}_a é conhecido.
- ▶ Potência dissipada pelo equipamento é conhecida.
- ▶ Temperatura do equipamento é espacialmente uniforme.
- ▶ No material de mudança de fase, o calor é transmitido unidimensionalmente apenas por condução, e todos os demais efeitos de convecção e radiação são considerados desprezíveis.
- ▶ As mudanças de fase ocorrem exclusivamente entre sólido e líquido.
- ▶ O calor latente L é constante e é liberado ou absorvido na temperatura de mudança de fase.
- ▶ A temperatura de mudança de fase é um valor fixo, conhecido e representa uma propriedade do material.
- ▶ Consideram-se ausentes problemas de nucleação e efeitos de superesfriamento.
- ▶ A superfície que separa as duas fase é plana, lisa e encontra-se na temperatura de mudança de fase.
- ▶ São considerados ausentes os efeitos de tensão superficial e curvatura na interface.
- ▶ O calor específico do líquido c_L e do sólido c_S , e a condutividade térmica do líquido k_L e do sólido k_S são constantes em cada fase.
- ▶ A densidade do MMF é constante: $\rho = \rho_S = \rho_L$.

A Eq. (1) que rege o processo térmico no equipamento pode ser obtida através da lei da conservação da energia, tendo-se como sistema apenas o equipamento, e os fluxos de calor convectivos são representados através da lei de Newton do resfriamento.

$$MC_p \frac{\partial T_e}{\partial t} = P + A\bar{h}_a(T_a - T_e) + A_i\bar{h}_i(T_s - T_e) \quad (1)$$

$$T_a(t) = m + a \text{sen}(\omega t), \quad (2)$$

onde: m é a temperatura média do ambiente, a é a semi amplitude e ω é sua frequência de oscilação térmica expressa em Hz. O termo T_s é a temperatura na superfície do encapsulamento do material de mudança de fase, $T(0,t)$. O processo térmico está submetido à condição inicial escrita na Eq. (3):

$$T_e(0) = T_a(0) = m \quad (3)$$

A Eq. (1) está acoplada ao problema de transferência de calor com mudança de fase, o qual não possui solução analítica (Alexiades and Solomon, 1993). As expressões que regem o fenômeno de transferência de calor com mudança de fase estão mostradas nas Eqs. (4 a 12). Visto que o ambiente assume um comportamento periódico, provocando oscilações na temperatura do equipamento, espera-se que múltiplas interfaces se desenvolvam no material de mudança de fase (Hasan et al., 1991). Desta forma, as Eqs. (6 e 7) representam a condição de Stefan para a i -ésima interface, nas quais X_i é a posição da i -ésima interface.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_L \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \text{p/ fase líquida} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_S \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad \text{p/ fase sólida} \quad (5)$$

$$\rho L \frac{dX_i}{dt} = -k_L \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i^-} + k_S \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i^+} \quad \text{p/ líquido à esquerda da } i\text{-ésima interface} \quad (6)$$

$$\rho L \frac{dX_i}{dt} = -k_S \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i^-} + k_L \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i^+} \quad \text{p/ sólido à esquerda da } i\text{-ésima interface} \quad (7)$$

$$T(X_i(t), t) = T_m \quad (8)$$

$$T(x, 0) = T_i = m \quad (9)$$

$$-k_L \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \bar{h}_i [T_e(t) - T(0, t)] \quad \text{p/ líquido em } x = 0 \quad (10)$$

$$-k_S \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \bar{h}_i [T_e(t) - T(0, t)] \quad \text{p/ sólido em } x = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\ell/2} = 0 \quad \text{simetria no MMF} \quad (12)$$

As Eqs. (4 e 5) governam a transferência de calor nas fases líquida e sólida, sendo que as difusividades térmicas do líquido e do sólido são, respectivamente, $\alpha_L = k_L/\rho c_L$ e $\alpha_S = k_S/\rho c_S$. A Eq. (8) expressa a continuidade da temperatura através das interfaces e a Eq. (9) expressa a condição inicial no material de mudança de fase. As condições de contorno nas faces são apresentadas através das Eqs. (10 e 11) e a condição de simetria através da Eq. (12).

Procura-se analisar o problema de forma adimensionalizada, mas o acoplamento das equações oferece desafios para a definição dos parâmetros de Stefan para o sólido e o líquido no contexto do problema de mudança de fase, visto que a temperatura do equipamento, com o qual o material de mudança de fase troca calor, trata-se também de uma incógnita do problema. Porém, espera-se que o fenômeno atinja um regime periódico permanente (RPP), no qual as propriedades não mais variam de um período para o outro e são independentes das condições iniciais (Hasan et al., 1991), e a temperatura do equipamento passará a oscilar dentro do intervalo $[T_f, T_q]$.

Tendo-se em vista a determinação de T_f e T_q , considera-se o problema do equipamento sem material de mudança de fase. Desta forma, a Eq. (1) é simplificada na Eq. (13), a qual é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem não homogênea, cuja solução é a soma de uma *integral particular* e uma *função complementar* (Riley et al., 2000), Eq. (14 – 15).

$$MC_p \frac{\partial T_e}{\partial t} = P + A\bar{h}_a(T_a - T_e) \quad (13)$$

$$T_{ep}(t) = \frac{P}{A\bar{h}_a} + m + \frac{aA\bar{h}_a}{\sqrt{(MC_p \omega)^2 + (A\bar{h}_a)^2}} \text{sen} \left[\omega t - \text{asin} \left(\frac{MC_p \omega}{\sqrt{(MC_p \omega)^2 + (A\bar{h}_a)^2}} \right) \right] \quad (14)$$

$$T_{ec}(t) = a_0 \exp \left(\frac{-A\bar{h}_a}{MC_p} t \right), \quad \text{onde:} \quad a_0 = a \frac{(MC_p \omega)(A\bar{h}_a)}{(MC_p \omega)^2 + (A\bar{h}_a)^2} - \frac{P}{A\bar{h}_a} \quad (15)$$

A partir da solução analítica apresentada, conclui-se que o regime periódico permanente existe, o qual ocorrerá quando o valor da função complementar tender à zero. A Eq. (14) expressa o comportamento térmico do equipamento sem MMF em termos de uma média m_e e uma semi amplitude térmica de resposta a_e , conforme a Eq. (16).

$$m_e = \frac{P}{A\bar{h}_a} + m, \quad a_e = \frac{aA\bar{h}_a}{\sqrt{(MC_p \omega)^2 + (A\bar{h}_a)^2}} \quad (16)$$

Obtêm-se, desta maneira, expressões para T_q e T_f , Eq. (17):

$$T_f = m_e - a_e, \quad T_q = m_e + a_e \quad (17)$$

A Eq. (18), onde $\tau = a_e/a$ expressa a transmissibilidade térmica entre o equipamento e o ambiente, revela que qualquer acréscimo de massa ao equipamento reduzirá sua amplitude térmica de resposta, independentemente se a massa acrescentada seja ou não um MMF, não obstante, o acréscimo de uma massa qualquer de modo à produzir uma redução satisfatória, geralmente deve ser muito grande para os sistemas que operam em baixas frequências térmicas.

$$\tau = \frac{a_e}{a} = \frac{A\bar{h}_a}{\sqrt{(MC_p \omega)^2 + (A\bar{h}_a)^2}}, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad \therefore \quad a_e \leq a \quad (18)$$

Sendo h a entalpia do MMF, tal que $h = 0$ para o sólido à T_m , a Eq. (19) traz a definição da fração de líquido λ , e a Eq. (20) traz expressões para k , c e α em uma região finita de MMF, a qual pode compreender mais de uma fase, cuja obtenção é baseada na analogia de resistências térmicas para condução unidimensional (Bejan, 1993). Para uma região infinitesimal, λ pode assumir apenas os valores 0 ou 1, se na região, o MMF for sólido ou líquido, respectivamente, e os valores de k , c e α serão os correspondentes para cada fase.

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{se } h \leq 0, & \text{(sólido)} \\ h/L & \text{se } 0 < h < L, & \text{(mushy)} \\ 1 & \text{se } h \geq L, & \text{(líquido)} \end{cases} \quad (19)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{k_L} + \frac{1-\lambda}{k_S}, \quad c = \lambda c_L + (1-\lambda)c_S, \quad \alpha = \frac{k_L k_S}{(\lambda k_S + (1-\lambda)k_L) \rho [\lambda c_L + (1-\lambda)c_S]} \quad (20)$$

A Eq. (21) traz a definição da grandeza i que é uma função descontínua composta por: i^L , i^M e i^S , sendo i^L a entalpia do líquido, e i^S uma definição matemática de forma a preservar no sólido, a relação $\partial i^S / \partial T = \partial i^L / \partial T = c_L$, e i^M define i na temperatura de mudança de fase. À semelhança de λ , em termos infinitesimais, i pode ser definido apenas por i^L , i^S e a fase.

$$i_x = \begin{cases} i_x^L & = L + c_L(T_x - T_m), & T_x \geq T_m, & \text{(líquido)} \\ i_x^M & = h, & T_x = T_m, & \text{(mushy)} \\ i_x^S & = c_L(T_x - T_m), & T_x \leq T_m, & \text{(sólido)} \end{cases} \quad (21)$$

onde a notação i_x indica i , i_e ou i_a .

Definindo as variáveis adimensionais θ^L e θ^S para temperatura, I para entalpia, J para fluxo, ξ para posição e Fo para tempo, Eq. (22 a 24) e reescrevendo as Eq. (1 – 5 e 10 – 12) em termos das novas variáveis, obtêm-se as Eq. (25 – 30).

$$\theta_x^L = \frac{T_x - T_m}{T_q - T_m}, \quad \theta_x^S = \frac{T_x - T_m}{T_m - T_f} \quad (22)$$

$$I_x = \frac{i_x}{L} = \begin{cases} I_x^L & = 1 + Ste_L \theta_x^L, & \theta_x^{L,S} \geq 0, & \text{(líquido)} \\ I_x^M & = \lambda, & \theta_x^{L,S} = 0, & \text{(mushy)} \\ I_x^S & = Ste_L \theta_x^L, & \theta_x^{L,S} \leq 0, & \text{(sólido)} \end{cases} \quad (23)$$

$$J = -\frac{\zeta}{\lambda \zeta + (1-\lambda)} \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda \varepsilon + (1-\lambda)} \frac{\partial I^L}{\partial \xi}, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad Fo = \frac{\alpha_L t}{\ell^2} \quad (24)$$

As equações da continuidade da temperatura ao longo da interface, bem como a condição de Stefan não serão reproduzidas, tendo em vista o subseqüente uso da formulação numérica fraca, ou método entálpico, o qual não utiliza a condição de Stefan na solução do problema (Alexiades and Solomon, 1993).

$$\frac{\partial I_e^L}{\partial Fo} = \frac{\kappa}{Fo_c} + \frac{I_a^L(Fo) - I_e^L(Fo)}{Fo_c} + \frac{\phi[I^L(0, Fo) - I_e^L(Fo)]}{Fo_c}, \quad \text{p/ equipamento} \quad (25)$$

$$I_a^L(Fo) = 1 + \frac{\varepsilon Ste_S + Ste_L}{2} \cdot \frac{\sqrt{Fo_c^2 + Fo_p^2}}{Fo_p} \cdot \text{sen}\left(\frac{Fo}{Fo_p}\right) + \frac{Ste_L - \varepsilon Ste_S - 2\kappa}{2}, \quad \text{p/ ambiente} \quad (26)$$

$$I_a^L(0) = I_e^L(0) = I^L(\xi, 0) = 1 - \kappa + \frac{Ste_L - \varepsilon Ste_S}{2}, \quad \text{condição inicial} \quad (27)$$

$$\frac{\partial I}{\partial Fo} = -\frac{\partial J}{\partial \xi}, \quad \text{p/ ambas as fases} \quad (28)$$

$$J|_{\xi=0} = \frac{\varepsilon Bi[I_e^L(Fo) - I^L(0, Fo)]}{\lambda \varepsilon + (1 - \lambda)}, \quad \text{p/ ambas as fases em } \xi = 0 \quad (29)$$

$$J|_{\xi=1/2} = 0, \quad \text{p/ ambas as fases em } \xi = 1/2 \quad (30)$$

As Eqs. (25 a 30) representam o problema adimensionalizado onde Ste_L é o número de Stefan para o líquido e Ste_S é o número de Stefan para o sólido, conforme a Eq. (31). O parâmetro Bi é o número de Biot, que representa a razão entre a resistência térmica difusiva do líquido e a resistência convectiva do equipamento. Os parâmetros ζ e ε são razões entre propriedades do MMF em diferentes estados Eq. (32).

$$Ste_L = \frac{c_L(T_q - T_m)}{L}, \quad Ste_S = \frac{c_S(T_m - T_f)}{L} \quad (31)$$

$$\zeta = \frac{k_S}{k_L}, \quad \varepsilon = \frac{c_L}{c_S}, \quad Bi = \frac{\bar{h}_i \ell}{k_L} \quad (32)$$

A razão entre a escala de tempo t_c da solução complementar da Eq. (13) e a escala de tempo difusiva é definida como o número de *Fourier complementar*, Fo_c . O parâmetro ϕ é a razão entre a resistência térmica convectiva entre o equipamento e o ambiente e a resistência térmica convectiva entre o equipamento e o material de mudança de fase; κ é o termo fonte adimensionalizado, que é a razão entre o calor sensível devido à presença de dissipação no equipamento e o calor latente do MMF. As definições de Fo_c , ϕ e κ estão escritas na Eq. (33).

$$Fo_c = \frac{MC_p \alpha_L}{A \bar{h}_a \ell^2} = \frac{\alpha_L t_c}{\ell^2}, \quad \phi = \frac{A_i \bar{h}_i}{A \bar{h}_a}, \quad \kappa = \frac{P}{A \bar{h}_a} \cdot \frac{c_L}{L} = \frac{c_L \Delta T_d}{L} \quad (33)$$

Apesar do parâmetro κ possuir forma semelhante à um número de Stefan, optou-se por não defini-lo como tal, já que a variação de temperatura dissipativa ($\Delta T_d = P/A \bar{h}_a$) é relativa à temperatura inicial m , e não à temperatura de mudança de fase do material T_m .

O parâmetro Fo_p (*Fourier particular*), definido na Eq. (34), é a razão entre o período $t_p = 1/\omega$ de oscilação da integral particular, Eq. (14) e a escala de tempo difusiva.

$$Fo_p = \frac{\alpha_L}{\omega \ell^2} = \frac{\alpha_L t_p}{\ell^2} \quad (34)$$

Desta forma, o problema possui 9 parâmetros dimensionais: Ste_L , Ste_S , ζ , ε , Bi , ϕ , κ , Fo_c e Fo_p , as variáveis independentes ξ e Fo e as variáveis dependentes $I(\xi, Fo)$, $I_e^L(Fo)$ e $I_a^L(Fo)$.

2.1. Discretização das equações

Na Fig. (2), que representa a malha empregada na solução numérica, o domínio unidimensional $0 \leq \xi \leq 1/2$ referente ao MMF foi dividido em n partes iguais, representando n volumes finitos $\mathcal{V} = \Delta \xi \Delta \bar{y} \Delta \bar{z}$, com $\Delta \xi = 1/(2n)$, $\Delta \bar{y} = \Delta \bar{z} = 1$ e a Eq. (28) foi integrada nos volumes \mathcal{V} e no intervalo adimensional de tempo constante ΔFo (Patankar, 1980).

Semelhantemente, a Eq. (25) foi integrada no mesmo intervalo adimensional de tempo ΔFo . Nas integrações temporais, adotou-se a formulação *explícita*. Na discretização, ao considerar um volume \mathcal{V} qualquer, o subscrito P refere-se às propriedades avaliadas no centro do volume considerado, enquanto que os subscritos w e e referem-se às propriedades avaliadas nas faces esquerda e direita do volume considerado, respectivamente; os subscritos W e E referem-se às propriedades avaliadas no centro dos volumes adjacentes à esquerda e à direita do volume considerado, respectivamente. Considera-se para efeito de implementação computacional e preservação do esquema de índices, que o equipamento é também representado por um “volume” e que possui como vizinhos, à sua esquerda, o “volume ambiente”, e à sua direita, o primeiro volume finito do material de mudança de fase.

As Eq. (35 a 37) são funções auxiliares, nas quais o índice x pode ser P , W , E , w ou e ; onde α_x^0 e β_x^0 são funções de conversão $I \rightarrow I^L$; λ_x^0 é a fração de líquido para um volume ou face; Z e E são, respectivamente a condutividade e o

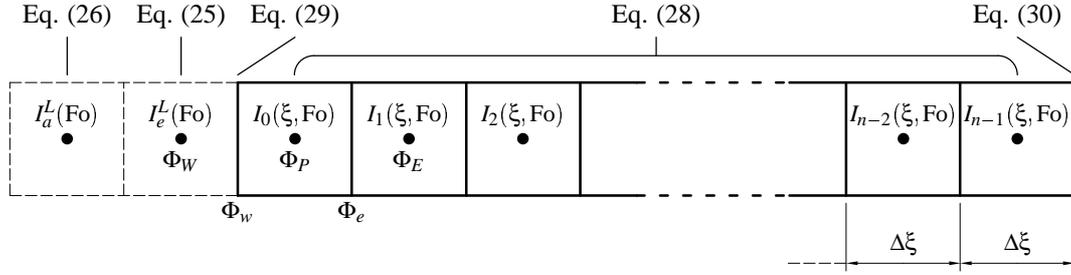


Figura 2: Representação da malha empregada na solução numérica

calor específico adimensionais para um volume ou face. Assim, é possível escrever as equações discretizadas na forma de um sistema de equações algébricas na forma da Eq. (38), cujos coeficientes estão definidos na Tab. (1), em função da posição do volume \mathcal{V} considerado. Quando a variável \mathcal{H} da Eq. (38) se referir ao equipamento ou ao ambiente, tal variável corresponderá à grandeza $I^L(\text{Fo})$; e, quando ela se referir à qualquer volume pertencente ao domínio do MMF (demais volumes), tal variável corresponderá à grandeza $I(\xi, \text{Fo})$.

$$\alpha_x^0 = \begin{cases} 1, & \text{se } I_x^0 \geq 1 \\ 0, & \text{se } 0 < I_x^0 < 1 \\ 1, & \text{se } I_x^0 \leq 0 \end{cases}, \quad \beta_x^0 = \begin{cases} 0, & \text{se } I_x^0 \geq 1 \\ 1, & \text{se } I_x^0 < 1 \end{cases}, \quad I_x^{L,0} = \alpha_x^0 I_x^0 + \beta_x^0 \quad (35)$$

$$\lambda_x^0 = \begin{cases} 1, & \text{se } I_x^0 \geq 1 \\ I_x^0, & \text{se } 0 < I_x^0 < 1 \\ 0, & \text{se } I_x^0 \leq 0 \end{cases}, \quad \lambda_w^0 = \frac{\lambda_w^0 + \lambda_p^0}{2}, \quad \lambda_e^0 = \frac{\lambda_e^0 + \lambda_p^0}{2} \quad (36)$$

$$Z_x^0 = \frac{\zeta}{\lambda_x^0 \zeta + (1 - \lambda_x^0)}, \quad E_x^0 = \frac{\varepsilon}{\lambda_x^0 \varepsilon + (1 - \lambda_x^0)} \quad (37)$$

$$a_P \mathcal{H}_P = a_P^0 \mathcal{H}_P^0 + a_W^0 \mathcal{H}_W^0 + a_E^0 \mathcal{H}_E^0 + S_L + S_c, \quad a_P = 1 \quad (38)$$

O superscrito 0 indicam o tempo anterior (Fo), e a ausência de superscrito indica o tempo atual (Fo + ΔFo) em coeficientes e variáveis. O termo S_L indica um termo fonte devido a calor latente; e o termo S_c indica um termo fonte constante.

Tabela 1: Coeficientes da equação discretizada

Coef.	Volume 0 (Equip.)	Volume 1 (face MMF)	Volumes internos	Volume adj. sim.
C_W	$\frac{\Delta \text{Fo}}{\text{Fo}_c}$	$\frac{\Delta \text{Fo}}{\Delta \xi} \cdot \frac{2Z_P^0 E_P^0 \text{Bi}}{2Z_P^0 + \text{Bi} \Delta \xi}$	$\frac{\Delta \text{Fo}}{(\Delta \xi)^2} \cdot Z_w^0 E_w^0$	$\frac{\Delta \text{Fo}}{(\Delta \xi)^2} \cdot Z_w^0 E_w^0$
C_E	$\frac{2Z_E^0 \Delta \text{Fo} \phi}{\text{Fo}_c (2Z_E^0 + \text{Bi} \Delta \xi)}$	$\frac{\Delta \text{Fo}}{(\Delta \xi)^2} \cdot Z_e^0 E_e^0$	$\frac{\Delta \text{Fo}}{(\Delta \xi)^2} \cdot Z_e^0 E_e^0$	0
a_W^0	C_W	C_W	$\alpha_W^0 C_W$	$\alpha_W^0 C_W$
a_E^0	$\alpha_E^0 C_E$	$\alpha_E^0 C_E$	$\alpha_E^0 C_E$	0
a_P^0	$1 - (C_W + C_E)$	$1 - \alpha_P^0 (C_W + C_E)$	$1 - \alpha_P^0 (C_W + C_E)$	$1 - \alpha_P^0 (C_W + C_E)$
S_L	$C_E \beta_E^0$	$C_W (-\beta_P^0) + C_E (\beta_E^0 - \beta_P^0)$	$C_W (\beta_W^0 - \beta_P^0) + C_E (\beta_E^0 - \beta_P^0)$	$C_W (\beta_W^0 - \beta_P^0) + C_E (-\beta_P^0)$
S_c	$\frac{\Delta \text{Fo} \kappa}{\text{Fo}_c}$	0	0	0

A estabilidade deste esquema numérico é assegurada quando impõe-se que os coeficientes de $\mathcal{H}_{P,W,E}$ na Eq. (38) sejam sempre positivos (Patankar, 1980), ou seja: a_P^0 , a_W^0 e a_E^0 devem ser sempre positivos. Através da Tab. (1) nota-se

que esta condição é sempre respeitada para os coeficientes a_W^0 e a_E^0 , mas nem sempre pelo coeficiente a_p^0 . Desta forma, é necessário limitar o passo de tempo adimensional ΔFo de modo a assegurar a condição de estabilidade.

Sejam $Z = \text{MAX}[Z_x^0(\lambda)] = \text{MAX}[1, \zeta]$ e $E = \text{MAX}[E_x^0(\lambda)] = \text{MAX}[1, \varepsilon]$, a condição de estabilidade para o equipamento é expressa pela Eq. (39). Com relação ao material de mudança de fase, a condição de estabilidade é expressa pela Eq. (40), sendo que o índice f refere-se ao primeiro volume no domínio do MMF, situado na face do mesmo. Os índices i e s referem-se aos volumes internos, e ao volume no domínio do MMF adjacente à simetria, respectivamente.

$$\Delta Fo_{\text{máx}} < \frac{Fo_c}{1 + \phi} \quad (39)$$

$$\Delta Fo_{f,\text{máx}} < \frac{(\Delta \xi)^2}{3ZE}, \quad \Delta Fo_{i,\text{máx}} < \frac{(\Delta \xi)^2}{2ZE}, \quad \Delta Fo_{s,\text{máx}} < \frac{(\Delta \xi)^2}{ZE} \quad (40)$$

Sendo o passo de tempo adimensional o mesmo para todo o problema, define-se apenas uma condição de estabilidade, que, quando obedecida, assegura a estabilidade para todos os coeficientes a_p^0 . Esta condição de estabilidade geral está escrita na Eq. (41).

$$\Delta Fo_{\text{máx}} < \text{MIN} \left[\frac{Fo_c}{1 + \phi}, \frac{(\Delta \xi)^2}{3ZE} \right] \quad (41)$$

O sistema de equações algébricas pode ser resolvido explicitamente, visto que todos os termos do lado direito da Eq. (38) são conhecidos, não havendo a necessidade de resolver um sistema de equações simultâneas. É importante ressaltar que os coeficientes da Eq. (38) não são constantes, uma vez que Z_x^0 e E_x^0 são funções de λ_x^0 , que por sua vez é função de I_x^0 , revelando, desta forma, a não-linearidade do fenômeno de mudança de fase. É possível verificar que os coeficientes deste sistema são lineares apenas nos volumes preenchidos com uma única fase, expressando, assim, a linearidade do fenômeno de difusão de calor em cada fase.

3. Resultados e discussão

Foi escrito um código numérico em linguagem C++ em dupla precisão para receber os parâmetros de entrada e resolver a Eq. (38) iterativamente. Em todos os casos foi utilizado um passo de tempo adimensional $\Delta Fo = 2 \times 10^{-4}$. Ensaios numéricos mostraram que, com 20 volumes, obtêm-se uma solução independente da malha. A validação do algoritmo foi realizada através de dois testes: no primeiro, a solução obtida foi comparada com a solução analítica de Neumann para o problema clássico de Stefan de uma fase (Alexiades and Solomon, 1993). No segundo teste os resultados foram comparados com a solução analítica da Eq. (25) com o termo $\phi = 0$, que representa o problema sem material de mudança de fase.

Com o objetivo de estipular uma faixa de variação para os parâmetros adimensionais, tomou-se por base uma central de telecomunicações com placas do material de mudança de fase orgânico Tricosano ($C_{23}H_{48}$). Os parâmetros dimensionais deste problema são mostrados na Tab. (2). As grandezas térmicas relativas ao equipamento foram obtidas através de dados experimentais, enquanto que as propriedades do MMF foram obtidas de Weast, 1976 e Ismail, 1998.

Tabela 2: Parâmetros dimensionais para o caso da central de telecomunicações

M [kg]	142,3	C_p [J/kgK]	1312	A [m ²]	4,62
m [K]	315,65	a [K]	12,5	ω [Hz]	$1,1574 \times 10^{-5}$
\bar{h}_a [W/m ² K]	4,04	P [W]	112,06	ℓ [m]	0,022
L [J/kg]	255000	T_m [K]	320,75	ρ [kg/m ³]	787
c_S [J/kgK]	1635	c_L [J/kgK]	2380	k_S [W/mK]	0,24
k_L [W/mK]	0,24	A_i [m ²]	0,6732	\bar{h}_i [W/m ² K]	21,4656

Assim, os parâmetros adimensionais para este caso são: $Ste_L = 0,124$, $Ste_S = 0,0738$, $Fo_c = 2,65$, $Fo_p = 22,9$, $\phi = 0,774$, $Bi = 1,97$, $\zeta = 1$, $\varepsilon = 1,46$ e $\kappa = 0,056$.

Uma análise da sensibilidade do comportamento térmico do equipamento foi realizada variando-se os parâmetros ϕ e Bi . Os demais parâmetros foram fixados em: $Ste_L = 0,1$; $Ste_S = 0,1$; $Fo_c = 1$; $Fo_p = 10$; $\zeta = 1$; $\varepsilon = 1$ e $\kappa = 0,01$; os valores de ϕ e Bi assumidos foram: 0,1, 0,3, 1, 3 e 10.

A Fig. (3) mostra a entalpia adimensional do líquido do equipamento (a) e do volume de controle situado na face do encapsulamento com MMF (b): $I_e^L(Fo)$ e $I_0^L(Fo)$, respectivamente, para $\phi = 1$ e diferentes números de Biot. Este gráfico revela que quanto menor o valor de Biot, maior é o controle térmico do equipamento. Visto que os parâmetros de Stefan são definidos com base na solução analítica do problema sem MMF, uma simples análise da Eq. (23) mostra que sem o

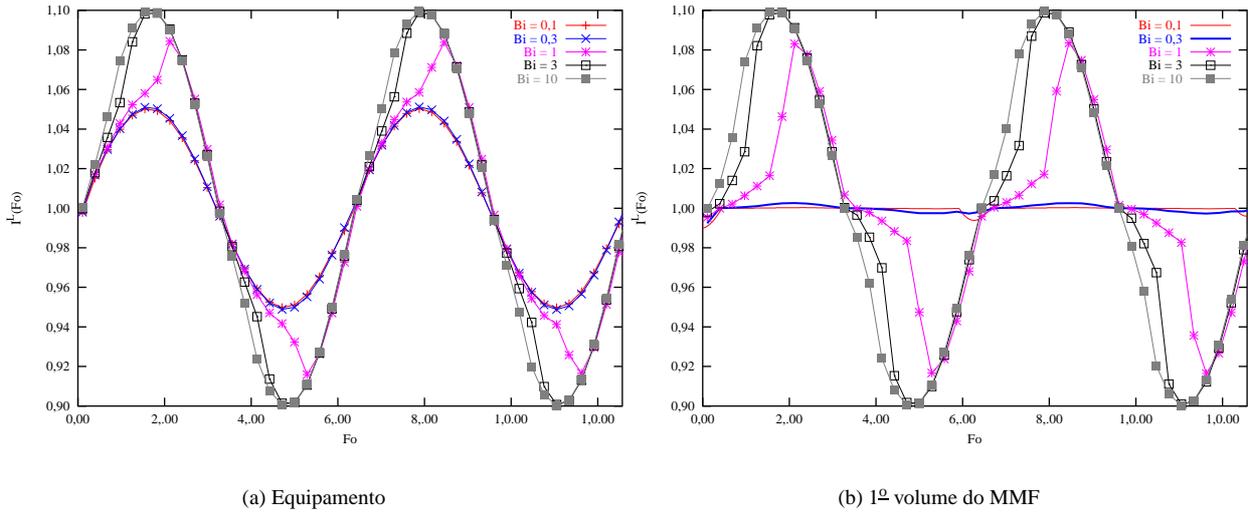


Figura 3: Sensibilidade da entalpia adimensional do líquido em relação à variação de Bi com $\phi = 1$

uso de MMF, $\Gamma_e^L(Fo)$ ficará oscilando no intervalo $[1 - \varepsilon Ste_S, 1 + Ste_L]$, no caso, $[0,9; 1,1]$ em RPP. Observando-se a mesma figura, nota-se que praticamente não há controle do comportamento térmico do equipamento quando os valores de Biot assumem os valores 3 e 10, ao passo que com $Bi = 0,1$ e $Bi = 0,3$, o comportamento térmico passa a ser controlado. Com $Bi = 1$ verifica-se um comportamento intermediário. Tal fato pode ser explicado tendo em vista o comportamento térmico do primeiro volume de controle, com o qual o equipamento troca calor, para valores pequenos de Biot, indicando não ser possível melhorar o comportamento térmico do equipamento variando somente o número de Biot. Ainda, é possível verificar que o fenômeno atingiu rapidamente o RPP, e que a temperatura média do equipamento permaneceu inalterada.

Analogamente, o comportamento térmico da face do MMF varia de um comportamento estático à um oscilatório de mesma amplitude em relação ao equipamento, dependendo do valor de Biot. Isto torna possível associar o controle do comportamento térmico do equipamento com a estabilidade térmica da face do MMF, visto que o equipamento troca calor com o MMF por meio da face. De acordo com a Eq. (25), o parâmetro ϕ , que estabelece a razão entre a ordem de grandeza da troca térmica entre o equipamento e o MMF e a troca térmica entre o equipamento e o ambiente, é esperado tratar-se de um parâmetro limitante do controle térmico exercido por Biot. Tal expectativa é justificada com os resultados das análises com $\phi = 0,1$ e $\phi = 10$, mostradas na Fig. (4) e na Fig. (5).

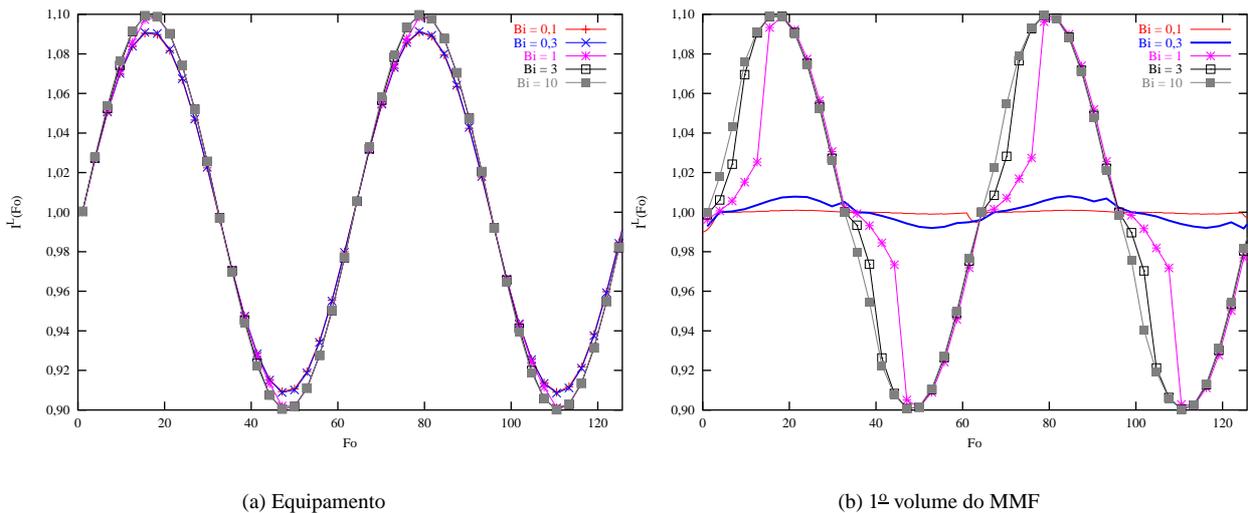


Figura 4: Sensibilidade da entalpia adimensional do líquido em relação à variação de Bi com $\phi = 0,1$

Quando ϕ é igual a 0,1, o controle térmico através da variação de Biot torna-se extremamente limitado, ao passo que com o aumento de ϕ , Biot passa a controlar cada vez mais o comportamento térmico do equipamento. As análises com $\phi = 0,3$ e $\phi = 3$ indicam comportamentos intermediários aos mostrados até agora.

A Fig. (6) mostra as posições (a) e velocidades (b) das frentes de mudança de fase, para $\phi = 10$, para diferentes números de Biot. Observa-se que com o aumento do número de Biot, ocorre o aumento na velocidade das frentes de

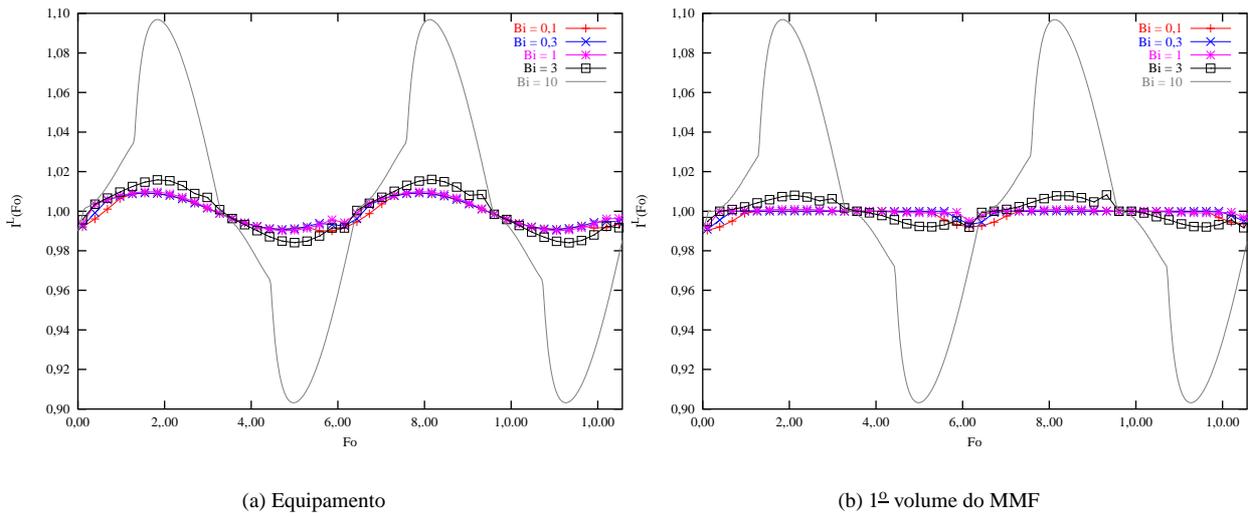


Figura 5: Sensibilidade da entalpia adimensional do líquido em relação à variação de Bi com $\phi = 10$

mudança de fase.

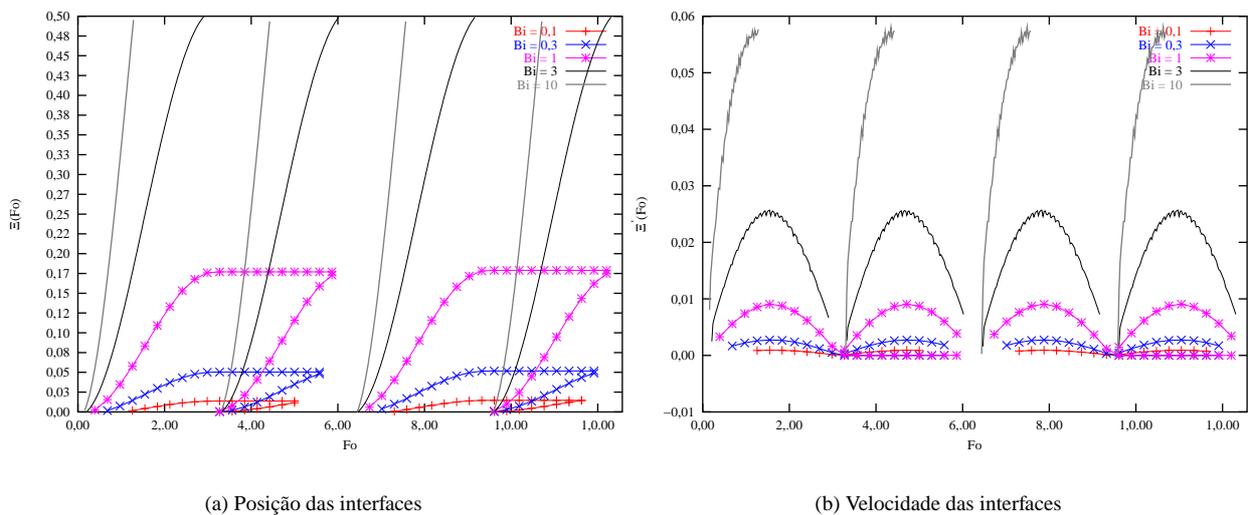


Figura 6: Sensibilidade da posição (a) e velocidade (b) das interfaces em relação à variação de Bi com $\phi = 10$

Nos ensaios realizados variando os parâmetros ϕ e Bi, o MMF encontra-se sempre no estado sólido no início da análise, conforme a Eq. (27), assim, a primeira frente de mudança de fase que se desenvolve é de sólido para líquido.

Observa-se que para grandes valores de Biot, as frentes percorrem rapidamente o domínio; o que implica na pequena duração das trocas térmicas envolvendo calor latente. Nesta situação o calor sensível domina o processo na maior parte do período, deixando de controlar o comportamento térmico do equipamento. Para valores pequenos de Biot, ocorre o inverso: as frentes de mudança de fase não percorrem todo o domínio e as interações de calor envolvendo calor latente passam a estar presentes na maior parte do processo.

Quando as frentes percorrem todo o domínio, existem intervalos de tempo nos quais o material se encontra totalmente sólido ou líquido, alternadamente. Situações nas quais as frentes não atravessam inteiramente o domínio, a frente parte da face e prossegue enquanto as condições se apresentam favoráveis, mas como o processo é periódico, tais condições não se mantêm e a frente começa a desacelerar até parar completamente. Neste instante uma frente de mudança de fase oposta surge na face e caminha até encontrar-se com a primeira, fazendo desaparecer uma das fases. Como a primeira frente é de sólido para líquido, a frente de fusão percorre até uma certa profundidade e, em seguida, surge uma frente de solidificação que sai da face e caminha até encontrar o interior da placa que nunca fundiu, fazendo desaparecer a fase líquida.

É possível verificar, com o auxílio da Fig. (6(b)), que a velocidade apresenta um comportamento senoidal. As oscilações irregulares visíveis nos gráficos de velocidade das frente de mudança de fase são uma característica do método entálpico, visto que ele não impõe a condição de Stefan na interface.

A Fig. (7(a)) mostra a entalpia adimensional do líquido do equipamento e do ambiente: $I_e^L(Fo)$ e $I_a^L(Fo)$ respectivamente. A entalpia adimensional do volume situado na face do encapsulamento é apresentada na Fig. (7(b)) para valores de κ iguais a 0,01, 0,03, 0,1 e 0,3. Os demais parâmetros são: $Ste_L = 0,1$; $Ste_S = 0,1$; $Fo_c = 1$; $Fo_p = 10$; $\zeta = 1$; $\varepsilon = 1$, $\phi = 1$ e $Bi = 1$. Tal figura mostra que a variação do parâmetro κ não proporciona alterações no regime permanente periódico nas variáveis dependentes, mas apenas no regime transitório, como esperado, visto que o parâmetro κ diz respeito à condição inicial: Eq. (27) e o RPP é independente das condições iniciais (Hasan et al., 1991). É possível perceber que quanto maior o valor de κ , maior é a diferença de entalpias (ou temperaturas) entre o equipamento e o ambiente.

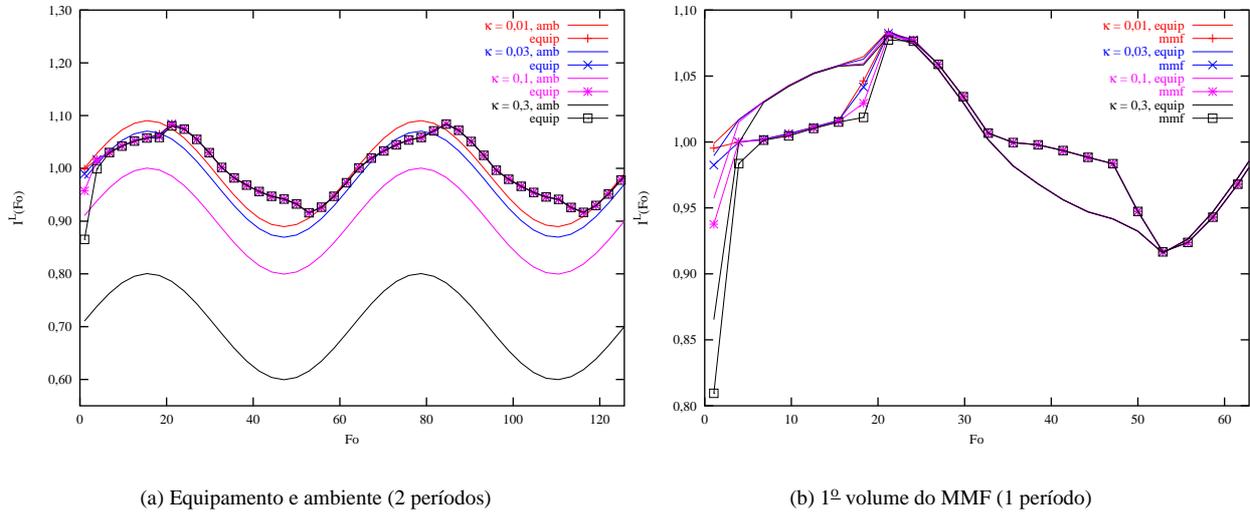


Figura 7: Sensibilidade em relação à κ

A Fig. (8(a)) mostra as entalpias adimensionais do líquido no ambiente, equipamento e primeiro volume no MMF para o caso do equipamento de telecomunicações, em cujos parâmetros se basearam as análises de sensibilidade para ϕ , Bi e κ . A Fig. (8(b)) mostra a evolução das frentes de mudança de fase no tempo.

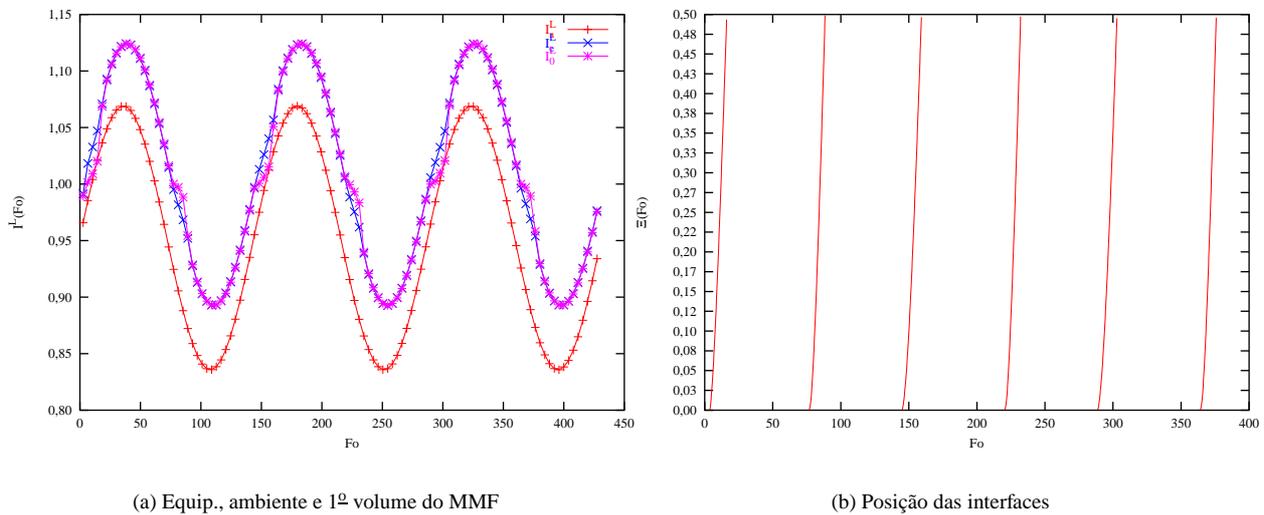


Figura 8: Variação temporal de I^L em estudo de caso

O estudo de caso analisado revela que o comportamento térmico do equipamento não está sendo controlado de forma eficiente pelo material de mudança de fase, devido à grande amplitude térmica apresentada pelo equipamento. Este resultado poderia ser previsto, devido ao pequeno valor de $\phi = 0,774$, indicando que o ambiente rege mais o comportamento térmico do equipamento do que as placas com material de mudança de fase. É possível também associar este resultado com a rápida locomoção das frentes de mudança de fase ao longo de todo o domínio, implicando na predominância das interações de calor sensível.

4. Conclusões

Um modelo matemático adimensionalizado foi proposto para o problema de transferência de calor de um equipamento com material de mudança de fase, sendo resfriado por um ambiente de comportamento térmico periódico. O problema foi adimensionalizado, as equações governantes foram discretizadas e o método numérico foi implementado. Análises de sensibilidade em relação à parâmetros característicos do problema e um estudo de caso levaram às seguintes conclusões:

1. O problema adimensionalizado possui 9 parâmetros, a saber: Ste_L , Ste_S , ζ , ϵ , Bi , ϕ , κ , Fo_c e Fo_p .
2. A amplitude térmica do equipamento, mesmo sem material de mudança de fase é menor ou igual que a imposta pelo ambiente.
3. Em certos casos, a introdução de material de mudança de fase pode não ser eficaz no controle da temperatura do equipamento.
4. Tanto o equipamento quanto o material de mudança de fase entram em regime periódico permanente, o qual é independente da condição inicial.
5. A introdução de material de mudança de fase no interior de um equipamento não altera o valor da temperatura média do equipamento em RPP, em relação ao mesmo sem material de mudança de fase.
6. O parâmetro κ não tem influência nas grandezas adimensionais em RPP.
7. O parâmetro ϕ tem grande influência no controle do comportamento térmico do equipamento, o qual é efetivo apenas para uma faixa de valores de Biot próximos à zero.
8. O controle da temperatura do equipamento está associado à existência de interações de calor latente, ou seja: o controle acontece quando o MMF está mudando de fase.

5. Agradecimentos

O primeiro autor agradece primeiramente ao Deus de toda a graça, o qual lhe concedeu vida e sabedoria, bem como à sua esposa Fátima, pelo suporte, apoio e amor, e finalmente, ao Núcleo de Pesquisa em Engenharia Simultânea pelo suporte financeiro.

6. Referências

- Alexiades, V. and Solomon, A. D., 1993, "Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes", Hemisphere Publ. Co., Washington, United States.
- Bejan, A., 1993, "Heat Transfer", John Wiley & Sons, Inc., New York, United States.
- Bransier, J., 1979, Periodic Storage by Latent Heat on the Fundamental-aspects of the Kinetics of Transfers, "International Journal of Heat and Mass Transfer", Vol. 22, pp. 875–883.
- Gong, Z. X. and Mujumdar, A. S., 1996, Finite Element Analysis of a Multistage Latent Heat Thermal Storage System, "Numerical Heat Transfer Part A-Applications", Vol. 30, pp. 669–684.
- Hale, N. W. and Viskanta, R., 1980, Solid-liquid Phase-change Heat-transfer and Interface Motion in Materials Cooled or Heated from Above or Below, "International Journal of Heat and Mass Transfer", Vol. 23, pp. 283–292.
- Hasan, M., Mujumdar, A. S., and Weber, M. E., 1991, Cyclic Melting and Freezing, "Chemical Engineering Science", Vol. 46, pp. 1573–1587.
- Ismail, K. A. R., 1998, "Bancos de Gelo - Fundamentos e modelagem", Campinas, Brazil.
- Jariwala, V. G., Mujumdar, A. S., and Weber, M. E., 1987, The Periodic Steady-state for Cyclic Energy-storage in Paraffin Wax, "Canadian Journal of Chemical Engineering", Vol. 65, pp. 899–906.
- Kalhari, B. and Ramadhani, S., 1985, Studies on Heat-transfer from a Vertical Cylinder, with or without Fins, Embedded in a Solid-phase Change Medium, "Journal of Heat Transfer-Transactions of the ASME", Vol. 107, pp. 44–51.
- Laouadi, A. and Lacroix, M., 1999, Thermal Performance of a Latent Heat Energy Storage Ventilated Panel for Electric Load Management, "International Journal of Heat and Mass Transfer", Vol. 42, pp. 275–286.
- Pal, D. and Joshi, Y. K., 1996, Application of Phase Change Materials for Passive Thermal Control of Plastic Quad Flat Packages: A Computational Study, "Numerical Heat Transfer, Part A - Applications", Vol. 30, pp. 19–34.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publ. Co., Washington, United States.
- Riley, K. F., Hobson, M. P., and Bence, S. J., 2000, "Mathematical Methods for Physics and Engineering", Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.
- Sparrow, E. M. and Broadbent, J. A., 1982, Inward Melting in a Vertical Tube which Allows Free Expansion of the Phase-change Medium, "Journal of Heat Transfer-Transactions of the ASME", Vol. 104, pp. 309–315.
- Weast, R. C., 1976, "Handbook of Chemistry and Physics, 56th ed.", CRC Press, Inc., Cleveland, United States.

Stefan Problem Applied to Electronic Equipments: a Numerical Approach

Christian Naaktgeboren Federal Center for Technology Education of Paraná – CEFET/PR - Concurrent Engineering R&D Group – NuPES naak@nupes.cefetpr.br

Silvio Luiz de Mello Junqueira Federal Center for Technology Education of Paraná – CEFET/PR - Concurrent Engineering R&D Group – NuPES; Thermal Sciences Laboratory – LACIT silvio@nupes.cefetpr.br

Abstract. *This paper presents a mathematical model to the thermal process of phase change materials (PCM) inside electronic equipments. The melting/freezing cycles of the PCM in a sequence of 24-hour periods are numerically investigated. The study of this phenomena, in which the sensible heat released by the electronic components is absorbed by the PCM in the form of latent heat, allow the control of the equipment's temperature. The mathematical modeling of this process consider the container as a one-dimensional plane wall with constant properties. The enthalpy method, associated to the finite-volume technique, is employed to solve the stablished Stefan-like problem. Dimensionless groups are identified in the optimization of the problem's parameters. Temperature profiles, velocity/position of the phase-change interfaces are presented based on a real case..*

Keywords. *Stefan Problem, Change of Phase, Telecommunications, Finite Volumes, Enthalpy Method*