

PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVA EM CORPOS BIDIMENSIONAIS DE GEOMETRIA ROMBUDA

Fábio Yukio Kurokawa

Universidade Estadual Paulista – Departamento de Engenharia Mecânica – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Av. Brasil Centro, 56 – Ilha Solteira, SP, Brasil – CEP 15 385 – 000, Caixa Postal 31.
kurokawa@dem.feis.unesp.br

Edson Luiz Zapparoli

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – Departamento de Energia – Divisão de Engenharia Mecânica-Aeronáutica
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 – São José dos Campos, SP, Brasil – CEP 12 228 – 900.

Antonio João Diniz

Universidade Estadual Paulista – Departamento de Engenharia Mecânica – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Av. Brasil Centro, 56 – Ilha Solteira, SP, Brasil – CEP 15 385 – 000, Caixa Postal 31.
diniz@dem.feis.unesp.br

Resumo. Os problemas relacionados à transmissão de calor no escoamento a alta velocidade tornaram-se importantes nos últimos anos devido ao aquecimento aerodinâmico causado tanto no lançamento quanto na reentrada e nas tuberias de sistemas de propulsão. Devido às velocidades sônicas e também hipersônicas houve a necessidade de proteger termicamente a estrutura e o seu conteúdo do aquecimento causado pelo escoamento aerodinâmico. Dentre os sistemas mais utilizados como proteção térmica estão os que utilizam os materiais ablativos. A análise da proteção térmica ablativa é complexa envolvendo transferência de calor, massa, reações químicas entre outros, podendo ocorrer perda parcial ou total de massa na fronteira da estrutura. Para o modelamento matemático do problema de proteção térmica ablativa que ocorre em um corpo de geometria rombuda é apresentado um sistema de equações diferenciais parciais com condições de contorno não lineares. Soluções de problemas ablativos são apresentados na literatura através de diversos métodos e técnicas. Dentro dos métodos a Técnica da Transformada Integral Generalizada (T.T.I.G.) vem sendo uma ferramenta valiosa para resolver esta classe de problemas onde a fronteira não é conhecida a priori. O sistema de equações diferenciais parciais será desenvolvido analiticamente através da aplicação da T.T.I.G., na qual será obtido um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem infinita. A superfície externa está sujeita a um fluxo de calor transiente prescrito. Neste trabalho busca-se o sistema solução de equações diferenciais ordinárias acopladas oriundo do desenvolvimento analítico. Este sistema apresenta explicitamente as variáveis de interesse: a espessura da camada ablativa e a taxa de perda de material ablativo para a atmosfera.

Palavras chave: escoamento aerodinâmico, ablação, geometria rombuda, transformada integral generalizada, proteção térmica.

1. Introdução

A transferência de calor associado ao fenômeno ablativo tem grande importância em muitas aplicações tecnológicas tanto no campo da Engenharia Aeronáutica quanto da Aeroespacial. Devido à interação de veículos espaciais com as camadas mais densa da atmosfera terrestre estes sofrem um aquecimento aerodinâmico que pode comprometer o sucesso da missão. Para se evitar isto se torna necessário prover estes veículos com um sistema de proteção térmica adequado (Hatori & Pessoa-Filho, 1998). Dentre os sistemas mais utilizados estão os que utilizam materiais ablativos (Sutton, 1982). Problemas deste tipo são inerentemente não lineares e envolvem o movimento da fronteira ablativa que a priori é desconhecido (Chung & Hsiao, 1985; Zien, 1978; Hsiao & Chung, 1984). O fenômeno de ablação é complexo envolvendo transferência de calor, massa e reações químicas (Lacaze, 1967).

No presente trabalho a Técnica da Transformada Integral Generalizada (T.T.I.G.) (Cotta, 1993; Kurokawa & Diniz, 2001; Diniz et al., 1993; Diniz & Aparecido, 1993; Kurokawa et al., 2001) é utilizada para se resolver analiticamente o problema de ablação considerando-se um corpo rombudo bidimensional (geometria de revolução) com um fluxo de calor transiente prescrito no contorno. A T.T.I.G. vem sendo utilizada na busca de soluções exatas e aplicada em problemas complexos (Cotta & Özisik, 1987). Pela aplicação desta técnica transformamos o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem acoplada a equação de restrição. Por esta análise analítica obtemos o sistema solução composto por equações diferenciais ordinárias onde os valores de interesse, profundidade e velocidade ablativas, aparecem explicitamente.

2. Modelamento do problema

Considera-se um corpo de revolução, Fig. 1, com proteção térmica sujeito a um fluxo de calor transiente prescrito

numa das faces e um fluxo de calor cedido em outra face e isolado termicamente nas demais faces. A temperatura inicial do corpo é T_0 . As propriedades físicas são consideradas constantes.

Primeiramente fez-se o modelamento do problema considerando um sistema curvilíneo no qual considera-se as variáveis definidas pela geometria de revolução, Fig. 1, que será transformado em um sistema ortogonal.

O corpo se aquece devido ao escoamento aerodinâmico até uma certa temperatura T_m a partir do qual se inicia o processo de fusão na fronteira sujeita ao fluxo de calor e o material fundido é arrastado para o meio ambiente. Então ocorrem duas situações: um período em que a camada protetora é aquecida até a temperatura de fusão sem perda de massa, chamado período pré ablativo, Fig. 2 e um período no qual a massa fundida é arrastada para o meio, denominado de período ablativo, Fig. 3.

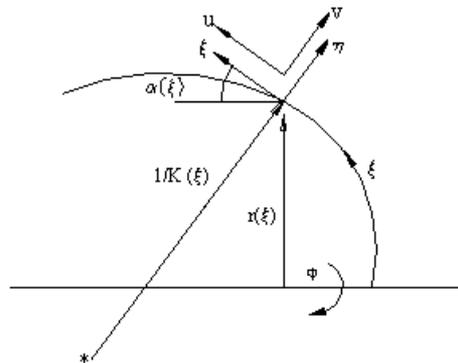


Figura 1. Representação da geometria de revolução.

Onde:

x, y, z - são os eixos coordenados do sistema cartesiano

η, ξ, ϕ - são os eixos coordenados para a geometria de revolução

$K(\xi)$ - curvatura da curva geratriz do corpo de revolução

$r(\xi)$ - raio cilíndrico

Considera-se um problema de proteção térmica ablativa bidimensional numa geometria axi-simétrica sujeito a um fluxo de calor de entrada $q_1(\tau)$, um fluxo de calor cedido $q_2(\tau)$ e isolado nas outras faces, Fig. 2.

Considera-se um elemento infinitesimal, Fig. 2, a partir do qual obtém-se o sistema ortogonal, Anderson et al. (1984), tal como nas Figs. 2 e 3.

Sendo:

$$Q_1(\tau) = q_1(\tau) / q_0$$

$$Q_2(\tau) = q_2(\tau) / q_0$$

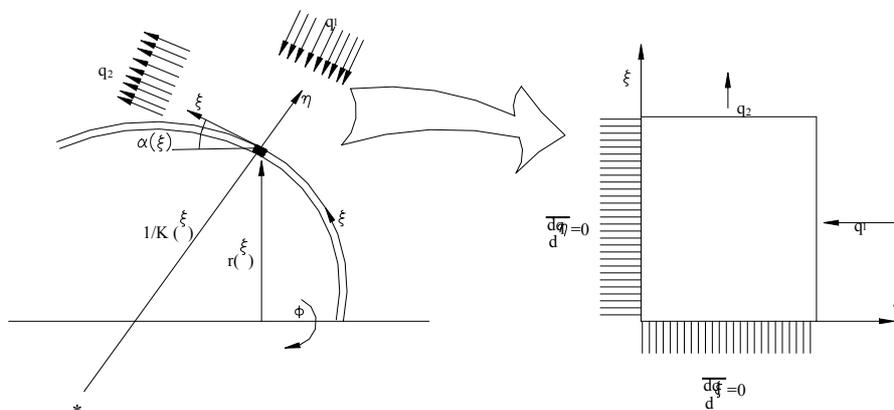


Figura 2. Representação da geometria axi-simétrica ortogonal e do período pré-ablativo

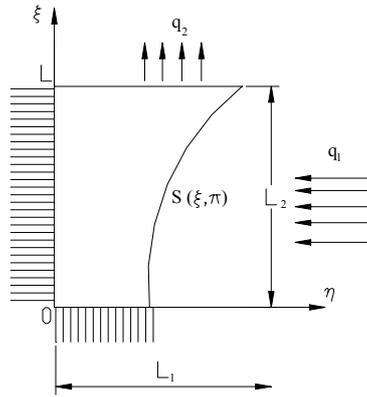


Figura 3. Descrição do período ablativo

Onde:

L_1, L_2 representam os comprimentos dimensionais do elemento infinitesimal

$S(\xi, \tau)$ posição da fronteira ablativa

τ - tempo adimensional

Q_1, Q_2 - fluxos de calor adimensionais recebido e cedido, respectivamente.

3. Análise analítica

As equações que governam o problema ablativo na forma adimensional para os dois períodos são:

- Período pré-ablativo:

$$\frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi^2} + A(\eta, \xi) \frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} + \bar{B}(\eta, \xi) \frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} \quad \begin{array}{l} \tau > 0 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \xi \leq l \end{array} \quad (1)$$

sendo:

$$a(\eta, \xi) = 1 + K(\xi)\eta \quad \text{e} \quad b(\eta, \xi) = r(\xi) + \eta \cos \alpha(\xi)$$

$$A(\eta, \xi) = \left[\frac{K(\xi)}{a(\eta, \xi)} + \frac{\cos \alpha(\xi)}{b(\eta, \xi)} \right] \quad \text{e} \quad \bar{B}(\eta, \xi) = B(\eta, \xi) + C(\eta, \xi)$$

onde:

$$B(\eta, \xi) = \frac{1}{b(\eta, \xi)a^2(\eta, \xi)} \left[\frac{dr(\xi)}{d\xi} + \eta \frac{d \cos \alpha(\xi)}{d\xi} \right]$$

$$C(\eta, \xi) = \frac{1}{a^3(\eta, \xi)} \left[\eta \frac{dK(\xi)}{d\xi} \right]$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0 \quad 0 \leq \xi \leq l \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} = Q_1(\tau) \quad \eta = 1 \quad 0 \leq \xi \leq l \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = 0 \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = -Q_2(\tau) \quad \xi = l \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (5)$$

e com condição inicial:

$$\theta(\eta, \xi, \tau) = 0 \quad \tau = 0 \quad \begin{array}{l} 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \xi \leq l \end{array} \quad (6)$$

- Período ablativo

$$\frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi^2} + A(\eta, \xi) \frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} + \bar{B}(\eta, \xi) \frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} \quad \begin{array}{l} \tau > \tau_a \\ S(\xi, \tau) \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \xi \leq l \end{array} \quad (7)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0 \quad 0 \leq \xi \leq l \quad (8)$$

$$\theta(\eta, \xi, \tau) = 1 \quad \eta = \eta_b \quad 0 \leq \xi \leq l \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = 0 \quad S(\xi, \tau) \leq \eta \leq 1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = -Q_2 \quad \xi = l \quad S(\xi, \tau) \leq \eta \leq 1 \quad (11)$$

com a condição inicial:

$$\theta(\eta, \xi, \tau) = \theta_{in}(\eta, \xi, \tau) \quad \tau = \tau_a \quad \begin{array}{l} S(\xi, \tau) \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \xi \leq l \end{array} \quad (12)$$

onde $\theta_{in}(\eta, \xi, \tau)$ é a distribuição de temperatura obtida no período pré-ablativo para o tempo τ_a .

O problema envolve uma fronteira móvel, após o tempo τ_a , que é desconhecida a priori. O balanço de energia na fronteira nos conduz a equação de restrição ou de acoplamento:

$$-\left\{ 1 + \left[\frac{\partial s(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right]^2 \right\} \frac{\partial \theta(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} + v \frac{\partial s(\xi, \tau)}{\partial \tau} = Q_1(\tau) \quad (13)$$

Para a solução do problema adotamos a seguinte separação do potencial de temperatura:

$$\theta(\eta, \xi, \tau) = \theta_1(\eta, \xi, \tau) + \theta_2(\eta, \xi, \tau) \quad (14)$$

e para homogeneizar as condições de contorno definimos duas novas variáveis:

$$\theta_1(\eta, \xi, \tau) = \theta_1^*(\eta, \xi, \tau) + \frac{Q_1}{2} \eta^2 = \theta_1^*(\eta, \xi, \tau) + Q_1 \frac{\eta^2}{2} \quad (15)$$

$$\theta_2(\eta, \xi, \tau) = \theta_2^*(\eta, \xi, \tau) - \frac{Q_2}{2l} \xi^2 \quad (16)$$

Substituindo as Eqs. (14) e (15) na Eq. (1) temos:

$$\frac{\partial \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi^2} + A(\eta, \xi) \frac{\partial \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} + [B(\eta, \xi) + C(\eta, \xi)] \frac{\partial \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} + P_1(x, y, \tau) \quad (17)$$

onde:

$$P_1(x, y, \tau) = Q_1 - \dot{Q}_1 \frac{\eta^2}{2} + A(\eta, \xi) Q_1 \eta$$

com as condições de contorno:

$$\frac{\partial \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0; \quad \frac{\partial \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 1 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = 0; \quad \frac{\partial \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = l \quad (19)$$

com a condição inicial:

$$\theta_1^*(\eta, \xi, 0) = f_1(\eta, \xi) = -Q_1(0) \frac{\eta^2}{2} \quad (20)$$

Para transformarmos a Eq. (17) na direção ξ definimos um problema auxiliar de autovalor como:

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi^2} + \mu^2 \psi(\xi) = 0 \quad (21)$$

com condições de contorno:

$$\frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = 0; \quad \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = l \quad (22)$$

Obtemos que os autovalores e as autofunções são respectivamente:

$$\mu_i = (i-1) \frac{\pi}{l} \quad (23)$$

$$\psi_i(\xi) = J_i \cos(\mu_i \xi); \quad J_i = \sqrt{\frac{2}{l(1+\delta_{i1})}} \quad (24)$$

Após algumas operações matemáticas com as Eqs. (17) e (21) definimos o par Transformada Integral e Inversa como:

$$\tilde{\theta}_i^*(\eta, \tau) = \int_0^l \psi_i(\xi) \theta_1^*(\eta, \xi, \tau) d\xi \quad (25)$$

$$\theta_1^*(\eta, \xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\xi) \tilde{\theta}_i^*(\eta, \tau) \quad (26)$$

Obtemos que a equação transformada:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(\eta, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \tilde{\theta}_i^*(\eta, \tau) = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_i^*(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} + \tilde{P}_i(\eta, \tau) + \tilde{M}_i(\eta, \tau) + \tilde{N}(\eta, \tau) \quad (27)$$

com condição inicial:

$$\tilde{\theta}_i^*(\eta, 0) = \tilde{f}_i(\eta) \quad (28)$$

e com condição de contorno:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(\eta, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0; \quad \frac{\partial \tilde{\theta}_i^*(\eta, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 1 \quad (29)$$

Para transformarmos a Eq. (27) segundo a direção η definimos um novo problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{\partial^2 \phi(\eta)}{\partial \eta^2} + \lambda^2 \phi(\eta) = 0 \quad (30)$$

com as condições de contorno:

$$\frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0; \quad \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 1 \quad (31)$$

Pela solução da Eq. (30) obtemos que os autovalores e as autofunções são respectivamente:

$$\lambda_m = (m-1)\pi \quad (32)$$

$$\phi_m(\eta) = I_m \cos(\lambda_m \eta); \quad I_m = \sqrt{\frac{2}{(1 + \delta_{m1})}} \quad (33)$$

Realizando o mesmo procedimento anterior, definimos o par Transformada Integral e Inversa:

$$\hat{\theta}_{im}^*(\tau) = \int_0^1 \tilde{\theta}_i^*(\eta, \tau) \phi_m(\eta) d\eta \quad (34)$$

$$\tilde{\theta}_i^*(\eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\eta) \hat{\theta}_{im}^*(\tau) \quad (35)$$

Resultando numa equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{im}^*(\tau)}{\partial \tau} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \hat{\theta}_{im}^*(\tau) = \hat{P}_{im}(\tau) + \hat{M}_{im}(\tau) + \hat{N}_{im}(\tau) \quad (36)$$

com condição inicial:

$$\hat{\theta}_{im}^*(0) = \hat{f}_{im} \quad (37)$$

onde:

$$\hat{P}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{P}_i(\eta, \tau) \phi_m(\eta) d\eta = \int_0^l \int_0^l \psi_i(\xi) \phi_m(\eta) P_1(\eta, \xi, \tau) d\xi d\eta$$

$$\hat{f}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{f}_i(\eta, \tau) \phi_m(\eta) d\eta = \int_0^l \int_0^l \psi_i(\xi) \phi_m(\eta) f_1(\eta, \xi) d\xi d\eta$$

$$\hat{M}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{M}_i(\eta, \tau) \phi_m(\eta) d\eta = \int_0^l \int_0^l \psi_i(\xi) \phi_m(\eta) A(\eta, \xi) \frac{\partial \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} d\xi d\eta$$

$$\hat{N}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{N}_i(\eta, \tau) \phi_m(\eta) d\eta = \int_0^l \int_0^l \psi_i(\xi) \phi_m(\eta) \bar{B}(\eta, \xi) \frac{\partial \theta_1^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} d\xi d\eta$$

Substituindo a Eqs. (14) e (16) na Eq. (1) temos:

$$\frac{\partial \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi^2} + A(\eta, \xi) \frac{\partial \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} + [B(\eta, \tau) + C(\eta, \tau)] \frac{\partial \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} + P_2(\eta, \xi, \tau) \quad (38)$$

onde:

$$P_2(\eta, \xi, \tau) = -\frac{Q_2}{l} + \frac{\dot{Q}_2}{2l} \xi^2 - [B(\eta, \xi) + C(\eta, \xi)] \frac{Q_2}{l} \xi$$

com condição inicial:

$$\theta_2^*(\eta, \xi, 0) = f_2(\eta, \xi) = Q_2(0) \frac{\xi^2}{2l} \quad (39)$$

e com condições de contorno:

$$\frac{\partial \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0; \quad \frac{\partial \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = l \quad (40)$$

$$\frac{\partial \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = 0; \quad \frac{\partial \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = l \quad (41)$$

Para transformarmos a Eq. (38) definimos um problema auxiliar do tipo da Eq. (21) e realizando o mesmo procedimento analítico anterior, definimos o par Transformada Integral e Inversa:

$$\tilde{Z}_i^*(\eta, \tau) = \int_0^l \psi_i(\xi) \theta_2^*(\eta, \xi, \tau) d\xi \quad (42)$$

$$\theta_2^*(\eta, \xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\xi) \tilde{Z}_i^*(\eta, \tau) \quad (43)$$

Obtemos a seguinte equação transformada:

$$\frac{\partial \tilde{Z}_i^*(\eta, \tau)}{\partial \tau} + \mu_i^2 \tilde{Z}_i^*(\eta, \tau) = \frac{\partial^2 \tilde{Z}_i^*(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} + \tilde{S}_i(\eta, \tau) + \tilde{T}_i(\eta, \tau) + \tilde{U}_i(\eta, \tau) \quad (44)$$

com condição inicial:

$$\tilde{Z}_i^*(\eta, 0) = \tilde{h}_i(\eta, \tau) \quad (45)$$

e condições de contorno:

$$\frac{\partial \tilde{Z}_i^*(\eta, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0; \quad \frac{\partial \tilde{Z}_i^*(\eta, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = l \quad (46)$$

Para a transformada segundo a direção η definimos um problema do tipo da Eq. (30) e definindo-se o par Transformada Integral e Inversa:

$$\hat{\tilde{Z}}_{im}^*(\tau) = \int_0^l \phi_m(\eta) \tilde{Z}_i^*(\eta, \tau) d\eta \quad (47)$$

$$\tilde{Z}_i^*(\eta, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\eta) \hat{\tilde{Z}}_{im}^*(\tau) \quad (48)$$

Portanto obtemos uma equação diferencial ordinária:

$$\frac{\partial \hat{Z}_{im}(\tau)}{\partial \tau} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \hat{Z}_{im}(\tau) = \hat{S}_{im}(\tau) + \hat{T}_{im}(\tau) + \hat{U}_{im}(\tau) \quad (49)$$

com condição inicial:

$$\hat{Z}_{im}(0) = \hat{h}_{im}(\tau) \quad (50)$$

onde:

$$\hat{S}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{S}_i(\eta, \tau) \phi_m(\eta) dx = \int_0^1 \int_0^l P_2(\eta, \xi, \tau) \psi_i(\xi) \phi_m(\eta) d\xi d\eta$$

$$\hat{h}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{h}_i(\eta, \tau) \phi_m(\eta) dx = \int_0^1 \int_0^l f_2(\eta, \xi) \psi_i(\xi) \phi_m(\eta) d\xi d\eta$$

$$\hat{T}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{T}_i(\eta, \tau) \phi_m(\eta) d\eta = \int_0^1 \int_0^l A(\eta, \xi) \psi_i(\xi) \phi_m(\eta) \frac{\partial \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} d\xi d\eta$$

$$\hat{U}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{U}_i(\eta, \tau) \phi_m(\eta) d\eta = \int_0^1 \int_0^l \bar{B}(\eta, \xi) \psi_i(\xi) \phi_m(\eta) \frac{\partial \theta_2^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} d\xi d\eta$$

Resolvendo-se as equações diferenciais ordinárias obtemos o potencial de temperatura desejado:

$$\theta(x, y, \tau) = J_1 I_1 \hat{\theta}_{11}(\tau) + J_1 \sum_{m=2}^{\infty} I_m \cos(\lambda_m x) \hat{\theta}_{1m}(\tau) + J_1 I_1 \hat{Z}_{11}(\tau) + I_1 \sum_{i=2}^{\infty} J_i \cos(\mu_i y) \hat{Z}_{i1}(\tau) + Q_1 \frac{\eta^2}{2} - \frac{Q_2}{2l} \xi^2 \quad (51)$$

Concluído o período pré-ablativo, passa-se a resolver o período ablativo onde a condição inicial é obtida utilizando o potencial de temperatura obtido no período pré-ablativo para $\tau = \tau_a$. Definindo-se um novo potencial como:

$$Z^*(\eta, \xi, \tau) = \theta(\eta, \xi, \tau) - 1 \quad (52)$$

e substituindo na Eq. (7) temos:

$$\frac{\partial Z^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 Z^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 Z^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi^2} + A(\eta, \xi) \frac{\partial Z^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} + \bar{B}(\eta, \tau) \frac{\partial Z^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} \quad (53)$$

com as condições de contorno:

$$\frac{\partial Z^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0 \quad 0 \leq \xi \leq l \quad (54)$$

$$Z^*(\eta, \xi, \tau) = 0 \quad \eta = 1 \quad 0 \leq \xi \leq l \quad (55)$$

$$\frac{\partial Z^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = 0 \quad 0 \leq \eta \leq \eta_b \quad (56)$$

$$\frac{\partial Z^*(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} = -Q_2(\tau) \quad \xi = 0 \quad 0 \leq \eta \leq \eta_b \quad (57)$$

onde $\eta_b = 1 - S(\xi, \tau)$ e com condição inicial:

$$Z^*(\eta, \xi, \tau) = \theta_{inicial}(\eta, \xi, \tau) - 1 \quad \tau = \tau_a \quad (58)$$

Para transformarmos a Eq. (53) segundo a direção η definimos um problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{\partial^2 \phi(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta^2} + \lambda^2 \phi(\eta, \xi, \tau) = 0 \quad (59)$$

com condições de contorno:

$$\frac{\partial \phi(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0; \quad \phi(\eta, \xi, \tau) = 0 \quad \eta = \eta_b \quad (60)$$

Pela solução da Eq. (59) temos que os autovalores e autofunções são respectivamente:

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b} \quad (61)$$

$$\phi_i(\eta, \xi, \tau) = B_i \cos(\lambda_i \eta) \quad (62)$$

Definindo-se uma autofunção normalizada como:

$$K_i(\eta, \xi, \tau) = \frac{\phi_i(\eta, \xi, \tau)}{N_i^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}} \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b} \eta\right] \quad (63)$$

Após algumas operações matemáticas utilizando as Eqs. (53) e (59), definimos o par Transformada Integral e Inversa:

$$\tilde{Z}_i^*(\xi, \tau) = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, \xi, \tau) Z^*(\eta, \xi, \tau) d\eta \quad (64)$$

$$Z^*(\eta, \xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(\eta, \xi, \tau) \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau) \quad (65)$$

aplicando-se esta definição obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau)}{\partial \tau} + \lambda^2 \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau) - \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \frac{\partial \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = 0 \quad (66)$$

onde:

$$A_{ij} = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, \xi, \tau) \frac{\partial K_j(\eta, \xi, \tau)}{\partial \tau} d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, \xi, \tau) \frac{\partial^2 K_j(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi^2} d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, \xi, \tau) M(\eta, \xi) \frac{\partial K_j(\eta, \xi, \tau)}{\partial \eta} d\eta +$$

$$- \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, \xi, \tau) N(\eta, \xi) \frac{\partial K_j(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} d\eta$$

$$B_{ij} = 2 \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, \xi, \tau) \frac{\partial K_j(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} d\eta + \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, \xi, \tau) N(\eta, \xi) K_j(\eta, \xi, \tau) d\eta$$

com as condições de contorno transformadas:

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau) + \frac{\partial \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = 0 \quad (67)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau) C_{ij} + \frac{\partial \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau)}{\partial \xi} = f_i(\xi, \tau) Q_2(\tau) \quad \xi = l \quad (68)$$

onde:

$$C_{ij} = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta, \xi, \tau) \frac{\partial K_j(\eta, \xi, \tau)}{\partial \xi} d\eta$$

$$f_i(y, \tau) = \frac{2\sqrt{2\eta_b}}{(2i-1)\pi} (-1)^{i+2}$$

Para a transformada na direção ξ adota-se um novo problema auxiliar de autovalor:

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi^2} + \mu^2 \psi(\xi) = 0 \quad (69)$$

com as condições de contorno:

$$\frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = 0; \quad \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = l \quad (70)$$

Cuja solução nos conduz aos autovalores e as autofunções:

$$\mu_k = \frac{(k-1)\pi}{l} \quad (71)$$

$$\psi_k(\xi) = \cos\left[\frac{(k-1)\pi}{l} \xi\right] \quad (72)$$

Define-se uma autofunção normalizada:

$$E_k(\xi) = \frac{\psi_k(\xi)}{N_k^{1/2}} \quad (73)$$

Realizando o mesmo procedimento anterior, Eq. (53), transformarmos a Eq. (66) e definimos o par Transformada Integral e Inversa:

$$\hat{\tilde{Z}}_{ik}^*(\tau) = \int_0^l \tilde{Z}_i^*(\xi, \tau) E_k(\xi) d\xi \quad (74)$$

$$\tilde{Z}_i^*(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k(\xi) \hat{\tilde{Z}}_{ik}^*(\tau) \quad (75)$$

obtemos a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$\frac{\partial \hat{\tilde{Z}}_{ik}^*(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{ijkm} \hat{\tilde{Z}}_{ik}^*(\tau) = \hat{h}_{ik} \quad (76)$$

onde:

$$P_{ijkm} = \delta_{ij} \delta_{km} \mu_k^2 + \int_0^l \left[A_{ij} E_k(\xi) E_m(\xi) - B_{ij} E_k(\xi) \frac{\partial E_m(\xi)}{\partial \xi} \right] d\xi + \delta_{ij} \int_0^l \lambda_i^2(\xi, \tau) E_k(\xi) E_m(\xi) d\xi + \\ + C_{ij}(l, \tau) E_k(l) E_m(l) - C_{ij}(0, \tau) E_k(0) E_m(0)$$

$$\hat{h}_{ik} = E_k(l)f_i(l,\tau)Q_2(\tau)$$

A equação de acoplamento transformada é:

$$v\left(l - \frac{Q_2 l}{Q_1}\right)\frac{d\zeta}{d\tau} - v\zeta\left(\frac{Q_1\dot{Q}_2 - Q_2\dot{Q}_1}{Q_1^2}\right)\frac{l}{2} = Q_1l + \left[1 + \left(\frac{\zeta Q_2}{l Q_1}\right)^2\right]\frac{1}{\sqrt{l}}\pi\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(2i-1)(-1)^{i+2}\hat{Z}_{ik}^*(\tau)M\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{\left[1 - \zeta\left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)\frac{\xi}{l}\right]^{5/2}} - 1\right\} \quad (77)$$

onde:

$$M = \frac{6\zeta Q_1 Q_2 l}{15\zeta^2 Q_2^2 + 4Q_1^2 (k-1)^2 \pi^2}$$

ζ e $\frac{d\zeta}{d\tau}$ são respectivamente a espessura e a velocidade ablativas. v representa o inverso do número de Stefan e

$$S(\xi, \tau) = \zeta\left[1 - \frac{Q_2 \xi}{Q_1 l}\right].$$

4. Resultados

O resultado do problema foi à obtenção do sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas como apresentado pelas Eqs. (76) e (77). A proposta deste trabalho é a solução analítica do problema de proteção térmica ablativa. Estudos para a implementação de um algoritmo que resolva este sistema está em desenvolvimento.

5. Conclusões

As equações governantes do problema representam uma geometria rombuda, Anderson et al. (1984), na qual se tendermos o raio de curvatura para o infinito recaímos num problema de ablação bidimensional aplicado em um prisma retangular com as mesmas condições de contorno.

Para o desenvolvimento analítico foi utilizado a Técnica da Transformada Integral Generalizada. Inicialmente definimos um problema auxiliar de autovalor apropriado e transformamos o sistema original de equações diferenciais parciais juntamente com a equação de restrição acoplada em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias através da definição do par Transformada Integral e Inversa. Tal procedimento foi realizado tanto na fase pré-ablativa quanto na fase ablativa. Este sistema de equações obtido analiticamente é o resultado de interesse do presente trabalho.

Os fluxos de calor absorvido e rejeitado foram deixados implícitos pois podem ser do tipo exponencial, polinomial, constante ou potencial.

No período pré-ablativo obtivemos o potencial de temperatura que é a condição inicial para o período ablativo em $\tau = \tau_a$ e o sistema infinito obtido deve ser resolvido por métodos numéricos, onde truncamos o sistema infinito em um número suficientemente grande para obtermos resultados numéricos. A obtenção dos resultados numéricos encontra-se em desenvolvimento.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem o financiamento da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) para a realização deste projeto de pesquisa.

7. Referências

- Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H., 1984, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Corporation, New York, U.S.A..
- Chung, B. T. F. and Hsiao, J. S., 1985, "Heat Transfer with Ablation in a Finite Slab Subjected to Time Variant Heat Fluxes", AIAA Journal, vol. 23, pp. 145-150.
- Cotta, R. M., 1993, "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow", C.R.C. Press, Boca Raton, Flórida, U.S.A..

- Cotta, R. M. and Özisik, M. N., 1987, "Diffusion Problems with General Time Dependent Coefficients", Mech. Sciences RBCM, vol. 9, n° 4, pp. 269.
- Diniz, A. J., Aparecido, J. B. and Zaparoli, E. L., 1993, "Solução de Problemas Térmicos com Acoplamentos Não Lineares", XII COBEM, Brasília, BR.
- Diniz, A. J., 1993, "Heat Conduction with Ablation in a Finite Slab", Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow, editor Cotta, R. M., C.R.C. Press, c. 24, pp. 131-139, Flórida, U.S.A..
- Hatori, M. E. and Pessoa-Filho, J. B., 1998, "Soluções Similares em Escoamentos Supersônicos", VII Encontro Nacional de Ciências Térmicas, ENCIT-98, pp. 257-262.
- Hsiao, J. S. and Chung, B. T. F., 1984, "A Heat Balance Integral Approach for Two Dimensional Heat Transfer in Solids with Ablation", AIAA 84-0394, Aerospace Sciences Meeting, 22nd, Reno, Nevada.
- IMSL Library, Edition 7, GNB Building Blvd, Houston, Texas, 77036, 1979.
- Kurokawa, F. Y. and Diniz, A. J., 2001, "Estudo Analítico da Proteção Térmica Ablativa em Corpos Bidimensionais", Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 22nd, Brazilian Congress on Computational Mechanics, 2nd, Campinas, SP.
- Kurokawa, F. Y., Diniz, A. J. and Campos-Silva, J. B., 2001, "Transferencia de Calor con Proceso Ablativo en Cuerpos de Reentrada", V Congreso Ibero Americano de Ingeniería Mecánica y IV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Mérida, Venezuela.
- Lacaze, H., 1967, "La Protection Thermique Par Ablation", Doc Air Espace, n° 105.
- Sutton, G. W., 1982, "The Initial Development of Ablation Heat Protection, an Historical Perspective", AIAA 82-4038, Journal Spacecraft, vol. 19, n. 1, pp. 3-11.
- Zien, T. F., 1978, "Integral Solution of Ablation Problems with Time Dependent Heat Flux", AIAA Journal, vol. 16.

ABLATIVE THERMAL PROTECTION IN TWO DIMENSIONAL BODIES OF BLUNT GEOMETRY

Fábio Yukio Kurokawa

Universidade Estadual Paulista – Departamento de Engenharia Mecânica – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
 Av. Brasil, 56 Centro – Ilha Solteira, SP, Brasil – CEP 15 385 – 000, Caixa Postal 31.
kurokawa@dem.feis.unesp.br

Edson Luiz Zaparoli

Instituto Tecnológico de Aeronáutica – Departamento de Energia – Divisão de Engenharia Mecânica-Aeronáutica
 Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 – São José dos Campos, SP, Brasil – CEP 12 228 – 900.

Antonio João Diniz

Universidade Estadual Paulista – Departamento de Engenharia Mecânica – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
 Av. Brasil, 56 Centro – Ilha Solteira, SP, Brasil – CEP 15 385 – 000, Caixa Postal 31.
diniz@dem.feis.unesp.br

***Abstract.** The problems related to the transmission of heat in high-speed flows had become important in the last years due aerodynamic heating caused in the launched as well as in the re-entry and in the propulsion system nozzles. Due the sonic as well as hypersonic speeds have been needed to thermally protect the structure and its content of the heating caused by the aerodynamic flow. Among the more used thermal protection systems are those employing the ablative materials. The ablative thermal protection analysis is complex because involves heat and mass transfer, chemical reactions and so on, and could, moreover, occur partial or total loss of mass in the structure boundary. In order to mathematically model the ablative thermal protection problem in a body of blunt geometry, a partial differential equations system with non-linear boundary conditions is presented. Solutions of ablative problems are presented in the literature through several methods and techniques. One of this methods, the Generalized Integral Transformed of Technique (G.I.T.T.), have been proving to be a valuable tool to solve this class of problems where the boundary is not known a priori. The partial differential equations system will be evaluated analytically through the application of G.I.T.T., resulting in an ordinary differential equations system of infinite order. The external surface is subject to a prescribed unsteady heat flow. In this work the coupled ordinary differentiate equations solution system is seek originated from the analytic development. This system presents explicitly the interested variables: the thickness of the ablative layer and the ablative material loss rate for the atmosphere.*

***Keywords:** aerodynamic flow, ablation, geometry blunt, generalized integral transformed, thermal protection.*