

**ESTUDO COMPARATIVO ENTRE A MODELAGEM SUB MALHA DE
SMAGORINSKY E A MODELAGEM FUNÇÃO ESTRUTURA –
APLICAÇÃO A ESCOAMENTOS EM TRANSIÇÃO EM UM DEGRAU****Marcelo José Pirani**

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI
Departamento de Engenharia Mecânica
Av. BPS, 1303 - Bairro Pinheirinho
CEP 37500 000 - Itajubá - MG
Email: pirani@iem.efei.br

Nelson Manzanares Filho

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI
Departamento de Engenharia Mecânica
Av. BPS, 1303 - Bairro Pinheirinho
CEP 37500 000 - Itajubá - MG
Email: nelson@iem.efei.br

Rogério Brito

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI
Departamento de Engenharia Mecânica
Av. BPS, 1303 - Bairro Pinheirinho
CEP 37500 000 - Itajubá - MG
Email: rogbrito@iem.efei.br

Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Departamento de Engenharia Mecânica
Uberlândia - MG
Email: aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo. *Através do método dos volumes finitos é feita uma comparação entre o modelo sub-malha de Smagorinsky e o modelo Função Estrutura de Velocidade de ordem 2, com aplicação a escoamentos em transição à turbulência em um degrau. Os pontos de recolamento bem como os perfis de velocidade média obtidos com as duas modelagens são comparados com a literatura. Para a visualização do escoamento é apresentado o campo de vorticidade e, através deste, é possível observar a formação dos turbilhões e sua trajetória ao longo do canal. O programa computacional desenvolvido baseia-se no método SOLA onde o campo de velocidades é obtido explicitamente e o campo de pressões implicitamente através da resolução de um sistema de equações lineares. O esquema convectivo QUICK é utilizado na interpolação das grandezas envolvidas no transporte convectivo.*

Palavras chave: *Simulação de Grandes Escalas, Modelagem Sub-malha de Smagorinsky, Modelagem Sub-malha Função Estrutura de Velocidade, Volumes Finitos.*

1. Introdução

No presente trabalho a metodologia de Simulação de Grandes Escalas (SGE) é aplicada a escoamentos em transição à turbulência em um degrau com o objetivo de se comparar as modelagens submalha de Smagorinsky (Smagorinsky, 1963) e da Função Estrutura de Velocidade de Ordem 2 (Métais e Lesieur, 1991). O escoamento é admitido bidimensional, incompressível, com propriedades físicas constantes. O método dos volumes finitos é utilizado na discretização das equações que regem o escoamento, o acoplamento pressão velocidade é feito através do algoritmo SOLA (Hirt et al, 1975) e o sistema de equações resultante é resolvido pelo método de Choleski. O escoamento em degrau foi escolhido por ser vastamente documentado na literatura, além de ser um escoamento complexo, com separação e por ser um caso teste clássico na avaliação do desempenho de modelos de turbulência.

Na simulação de grandes escalas é realizada a decomposição das grandezas envolvidas no escoamento, porém, diferente dos modelos de turbulência tradicionais como o κ - ϵ e o κ - ω , que utilizam o conceito de média temporal, em Simulação de Grandes Escalas utiliza-se o conceito de filtragem, fazendo com que os resultados obtidos nesse tipo de simulação traduzam as instabilidades físicas com frequências menores que a estabelecida pelo filtro.

2. Desenvolvimento Teórico

2.1. Equações filtradas da turbulência

As equações que representam os escoamentos em estudo são as equações da continuidade e da quantidade de movimento, essas equações representam tanto escoamentos laminares quanto turbulentos. A modelagem de escoamentos turbulentos e em transição, utilizando-se diretamente essas equações (simulação direta), é ainda inviável para altos números de Reynolds, pois, o alto número de graus de liberdade envolvido neste tipo de escoamento exige malhas extremamente refinadas. A solução então é a utilização de modelos de turbulência.

Existem vários modelos de turbulência tais como κ - ϵ , κ - ω , modelos algébricos, modelo a seis equações, que de alguma maneira permitem contornar os problemas decorrentes da simulação direta. Na SGE com modelagem sub-malha as equações da continuidade e da quantidade de movimento são modificadas através de um processo de decomposição das variáveis associadas ao escoamento. As variáveis são decompostas na soma de uma parcela dita de grandes escalas f e outra dita submalha f' , ou seja:

$$F = f + f', \quad (1)$$

onde F - Variável do escoamento,
 f - Parcela de grandes escalas,
 f' - Parcela sub-malha.

Uma vez realizado o processo de decomposição de variáveis, estas são substituídas nas equações de transporte que passam por um processo de filtragem. Considerando a hipótese de Boussinesq na representação das tensões de Reynolds e manipulando-se algebricamente as equações (Silveira-Neto, 1998), resulta:

Equação da continuidade filtrada:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

Equações da quantidade de movimento filtradas para as componentes de velocidade u e v nas direções x e y respectivamente, desprezando-se a parte transposta dos termos difusivos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u u - v_{ef} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u v - v_{ef} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u v - v_{ef} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v v - v_{ef} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (4)$$

onde v_{ef} \rightarrow viscosidade efetiva dada por $v_{ef} = \nu + \nu_t$,
 ν \rightarrow viscosidade cinemática,
 ν_t \rightarrow viscosidade turbulenta.

As equações (2), (3) e (4), que se apresentam na forma conservativa, são então discretizadas através do método dos volumes finitos e do algoritmo SOLA. O esquema convectivo QUICK (Leonard, 1979) e o princípio da malha deslocada (Patankar, 1980) também são utilizados. Os procedimentos de discretização podem ser vistos em Pirani (1996).

Observa-se nas equações (3) e (4) o aparecimento da viscosidade efetiva v_{ef} que é definida como a soma das viscosidades cinemática ν e turbulenta ν_t . A viscosidade turbulenta surge devido a aplicação da hipótese de Boussinesq. Duas modelagens sub-malha são empregadas na determinação desta viscosidade, a modelagem de Smagorinsky e a Função Estrutura de Velocidade, descritas a seguir.

2.2. Modelo de Smagorinsky

Na modelagem através da SGE propõe-se a simulação das grandes escalas (baixas frequências) do escoamento e a aplicação de uma modelagem sub-malha para as pequenas escalas (altas frequências). O modelo sub-malha de Smagorinsky (1963) é baseado na hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas onde a produção das tensões turbulentas sub-malha se iguala a dissipação. A viscosidade turbulenta ν_t , segundo a modelagem de Smagorinsky, é determinada da seguinte forma:

$$v_t = (C \Delta_S)^2 \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad (5)$$

onde $C = 0,1$ (valor ajustado),

$$\Delta_S = \sqrt{\Delta x \Delta y} \quad ,$$

Δx e Δy são respectivamente a largura e a altura da malha, que é retangular (figura (1)) e

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] .$$

A viscosidade turbulenta assim calculada é somada a viscosidade molecular resultando na viscosidade efetiva v_{ef} que aparece nas equações de quantidade de movimento (3) e (4).

2.3. Modelo Função Estrutura de Velocidade de Ordem 2

No modelo Função Estrutura proposto por Metals e Lesieur (1991) apud Silveira-Neto (1998), a viscosidade turbulenta é dada por:

$$v_t = 0,104 C_k^{-3/2} \Delta \sqrt{F_2} \quad (6)$$

onde $C_k = 1,4$ é a constante de Kolmogorov,

$\Delta = \sqrt[4]{d_1 d_2 d_3 d_4}$ é a média geométrica das distâncias entre o centro do volume de controle avaliado e os centros dos volumes de controle vizinhos (no presente trabalho por se tratar de malha estruturada são considerados os quatro vizinhos adjacentes conforme mostrado na figura (1)).

F_2 é a função estrutura que no presente trabalho é determinada como:

$$F_2 = \left[(u_{sul} - u_o)^2 + (v_{sul} - v_o)^2 \right] \left(\frac{\Delta}{d_1} \right)^{2/3} + \left[(u_{norte} - u_o)^2 + (v_{norte} - v_o)^2 \right] \left(\frac{\Delta}{d_2} \right)^{2/3} +$$

$$\left[(u_{leste} - u_o)^2 + (v_{leste} - v_o)^2 \right] \left(\frac{\Delta}{d_3} \right)^{2/3} + \left[(u_{oeste} - u_o)^2 + (v_{oeste} - v_o)^2 \right] \left(\frac{\Delta}{d_4} \right)^{2/3} .$$

As velocidades que aparecem no cálculo de F_2 são médias aritméticas simples das velocidades localizadas nas faces dos volumes de controle principais, pois no presente trabalho é utilizada a malha deslocada onde as velocidades são posicionadas nas faces e não no centro desses volumes.

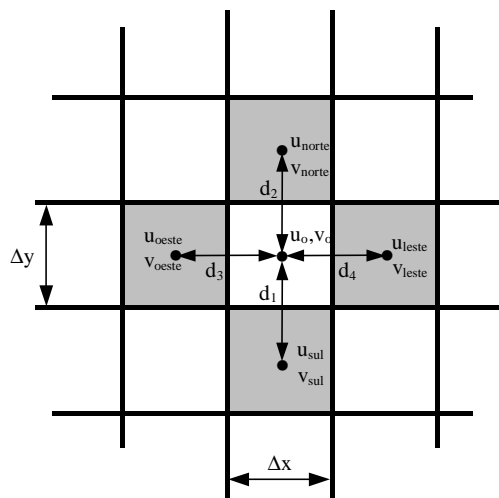


Figura 1. Nomenclatura para a determinação da função estrutura de velocidade e de Δ_S de Smagorinsky.

3. Resultados

3.1. escoamentos em transição à turbulência em um degrau (*backward facing step*)

A seguir é apresentado um estudo de escoamentos em transição à turbulência bidimensional e incompressível em regime permanente de um fluido viscoso através de um canal de placas planas infinitas, com salto de área em expansão (degrau). A figura (2) apresenta um esquema da configuração em estudo. A razão de expansão H/H_c (altura do degrau / altura do canal na seção de saída) é de 1/3 e o número de Reynolds é $1,32 \times 10^5$, sendo $Re = u_c H_c / \nu$. A variável u_c é a velocidade na linha de centro da seção de entrada que corresponde ao valor máximo da velocidade nessa seção e ν é a viscosidade cinemática igual a $1,8 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

A seção de entrada foi especificada a uma distância de cinco vezes a altura do salto ($5H$), a montante do mesmo. O comprimento do canal após o salto é de trinta vezes a altura do salto ($30H$). Segundo Thangam e Speziale (1992), as condições de saída devem ser especificadas a uma distância suficiente a jusante do ponto de recolamento para uma perfeita solução.

Nesse tipo de escoamento, o fluido passa de um canal para outro de maior área, essa expansão de área forma um degrau e faz com que o escoamento descole nesse ponto. O escoamento descolado, recola posteriormente a uma determinada distância do degrau. As modelagens de Smagorinsky e Função Estrutura de Velocidade de Ordem 2 são empregadas e os valores dos pontos de recolamento obtidos através dessas modelagens bem como os perfis de velocidades são comparados.

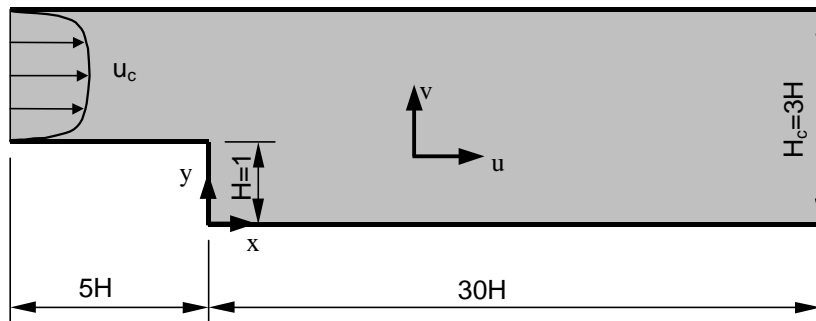


Figura 2 - Esquema do degrau.

3.1.1. Condições iniciais e de contorno

Como condições iniciais, os valores para as componentes de velocidade u e v e para a viscosidade turbulenta ν_t são nulos, exceto na entrada onde o perfil para componente de velocidade u é obtido do escoamento hidrodinamicamente desenvolvido em canal de placas planas.

Na saída considera-se escoamento completamente desenvolvido, ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Nos contornos sólidos (paredes) é admitida a condição de não escorregamento e de impenetrabilidade, onde:

$$u = 0 \quad \text{e} \quad v = 0. \quad (8)$$

3.1.2. Resultados para o degrau

Para a obtenção dos resultados foram utilizadas duas malhas uniformes, a primeira 70×60 e a segunda 120×90 . O ponto de recolamento é medido a partir do degrau, que corresponde a x/H igual a zero.

Para a determinação do ponto de recolamento, verificou-se a porcentagem do tempo em que a componente de velocidade u nos pontos nodais mais próximos a parede inferior, após o degrau, assumiu valores positivos e traçou-se os gráficos mostrados nas figuras (3) e (4) para as modelagens de Smagorinsky e Função Estrutura, respectivamente. O ponto da curva correspondente a 50% com maior valor de x/H , foi admitido como ponto de recolamento.

A tabela 1 apresenta uma comparação dos valores do ponto de recolamento obtidos no presente trabalho com o obtido experimentalmente por Kim et al., 1980. Observa-se que os valores obtidos através das duas modelagens para malha 70×60 apresentam a mesma diferença de 10% em relação ao valor experimental. Para a malha 120×90 o ponto de recolamento obtido pela modelagem de Smagorinsky se aproximou mais do valor experimental, porém, é importante observar que para as duas modelagens os resultados encontram-se dentro da faixa de incerteza do valor obtido experimentalmente.

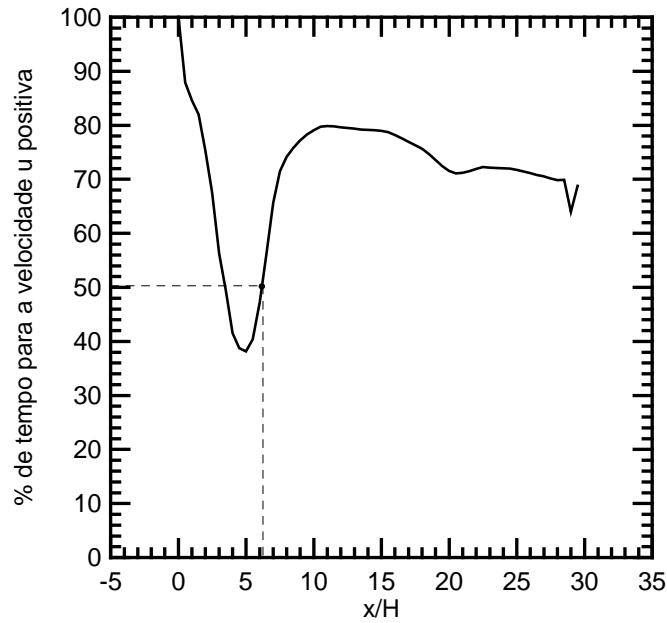


Figura 3 - Porcentagem do tempo em que a velocidade u ao longo de x/H , e junto à parede inferior, assume valores positivos – Modelagem de Smagorinsky.

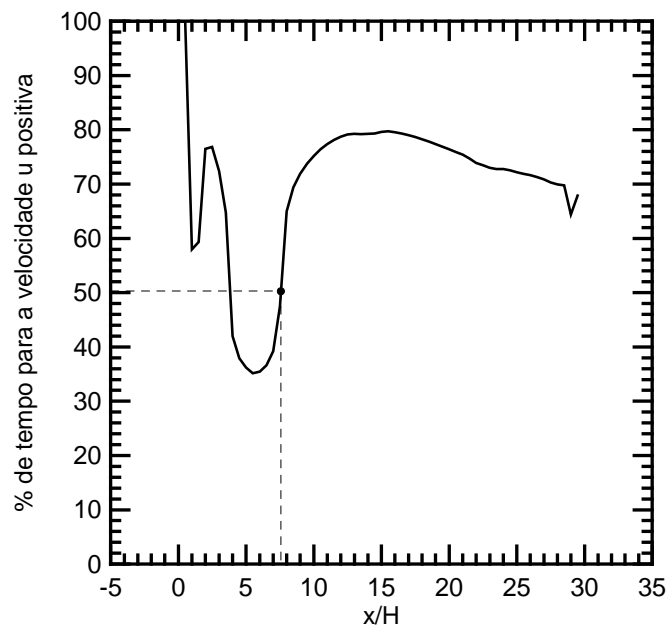


Figura 4 - Porcentagem do tempo em que a velocidade u ao longo de x/H , e junto à parede inferior assume valores positivos – Modelagem Função Estrutura de Ordem 2.

Tabela 1. Ponto de recolamento

Modelo	Ponto de recolamento
Experimental, Kim et al. (1980)	7 ± 1
SGE Smagorinsky – malha 60x70 uniforme	6,3
SGE Função Estrutura – malha 60x70 uniforme	7,7
SGE Smagorinsky – malha 120x90 uniforme	6,5
SGE Função Estrutura – malha 120x90 uniforme	7,8

As figuras (5) e (6) apresentam comportamento da componente de velocidade u ao longo do tempo na saída do canal em $y=0,4m$ para as modelagens de Smagorinsky e Função Estrutura respectivamente. Duas malhas são utilizadas, a malha 70×60 , que corresponde as figuras (5a) e (6a) e a malha 120×90 , que corresponde as figuras (5b) e (6b). A frequência de emissão de vórtices no degrau utilizando a malha 70×60 é de aproximadamente $0,0465 \text{ Hz}$ para a modelagem de Smagorinsky e de $0,0436 \text{ Hz}$ para a Função Estrutura, já para a malha 120×90 a frequência de emissão de vórtices é de $0,0623 \text{ Hz}$ para a modelagem de Smagorinsky e de $0,0602 \text{ Hz}$ para a Função Estrutura. É importante observar que com o refinamento da malha novos vórtices são captados no escoamento, isso faz com que ocorra um aumento na frequência de emissão desses vórtices.

Comparando as frequências de emissão de vórtices obtidas através das duas modelagens, considerando a mesma malha, observa-se que a frequência obtida pela modelagem de Smagorinsky é ligeiramente maior que a obtida pela Função Estrutura, esta diferença deve ser atribuída às características próprias de cada modelagem no cálculo da viscosidade turbulenta.

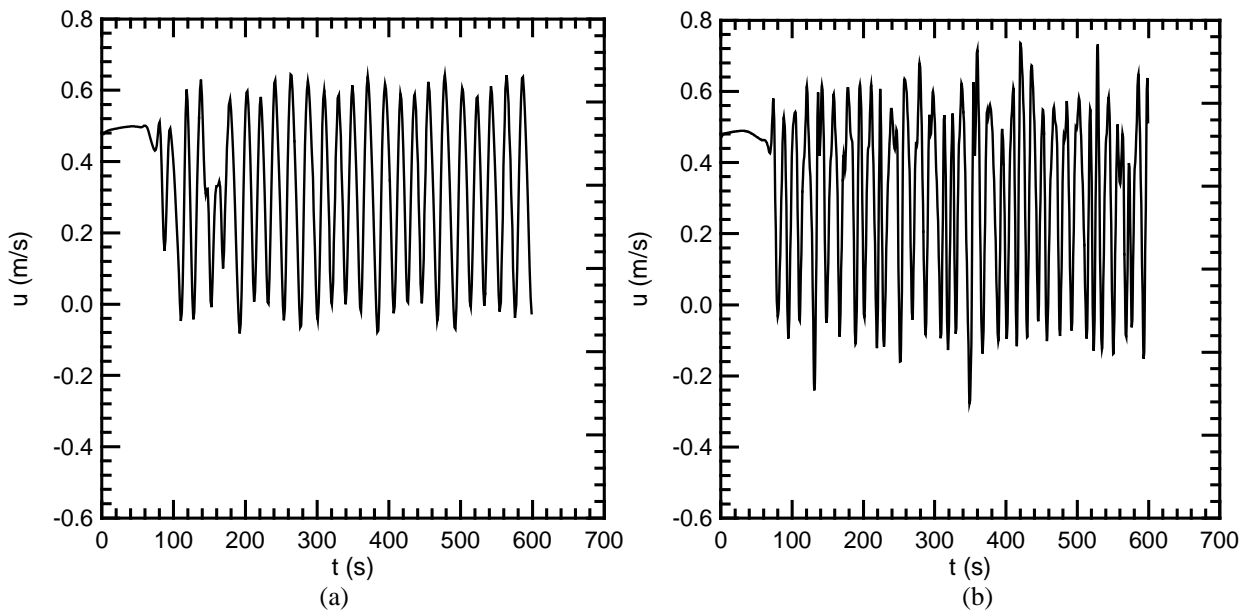


Figura5. Comportamento da componente de velocidade u ao longo do tempo na saída do canal em $y=0,4m$ - Modelagem de Smagorinsky, (a) malha 70×60 , (b) malha 120×90 .

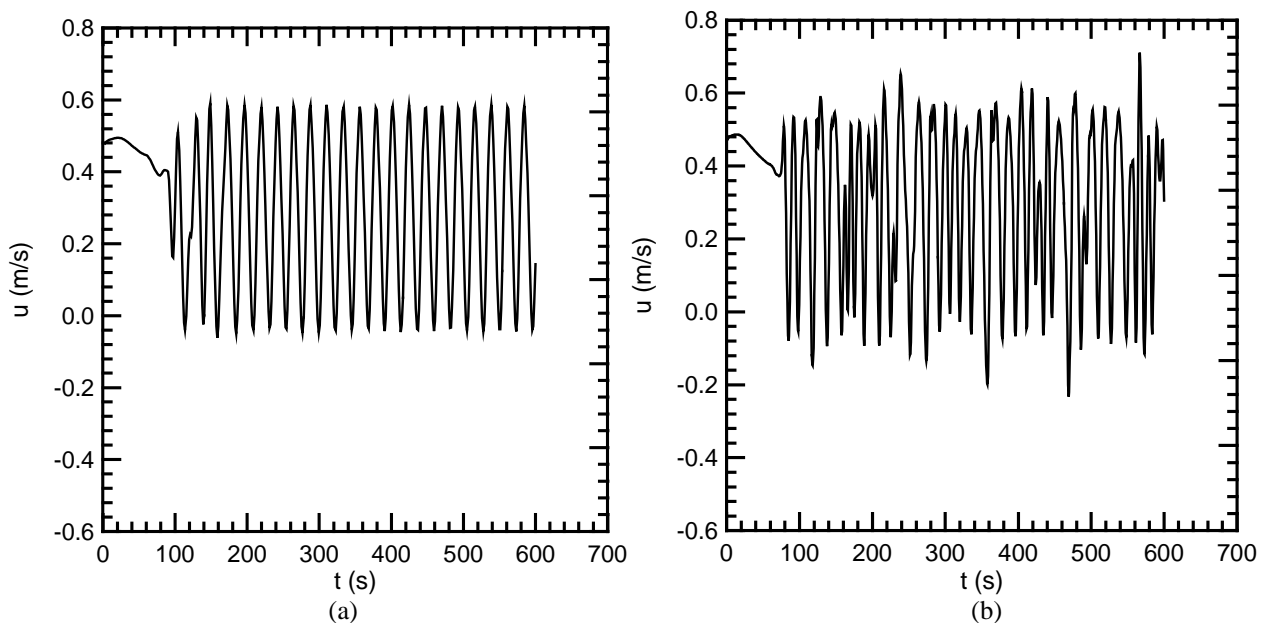


Figura 6. Comportamento da componente de velocidade u ao longo do tempo na saída do canal em $y=0,4m$ - modelagem Função Estrutura de ordem2, (a) malha 70×60 , (b) malha 120×90 .

A figura (7) apresenta o campo de vorticidade do escoamento em cinco instantes diferentes, para a modelagem de Smagorinsky. Nessa figura é possível observar a formação dos vórtices no degrau que ocorre devido ao aumento brusco da área, fazendo com que o fluido descole. Os vórtices assim formados deslocam-se pelo canal, provocando a formação de outros vórtices na parede superior. O mesmo pode ser visto na figura (8) para a modelagem Função Estrutura.

Através das figuras (7) e (8) também pode ser observada a diferença entre as freqüências de emissão de vórtices obtidas pelas duas modelagens, o espaçamento entre os vórtices na figura (7) obtida através da modelagem de Smagorinsky é menor que o espaçamento entre os vórtices na figura (8) obtida pela modelagem Função Estrutura.

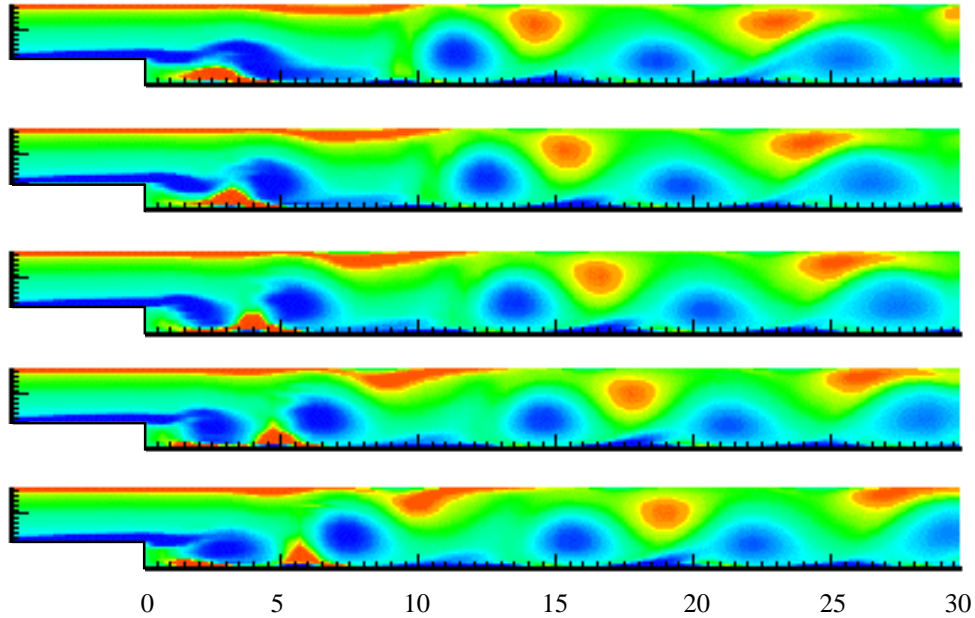


Figura 7. Campo de vorticidade – Modelagem de Smagorinsky.

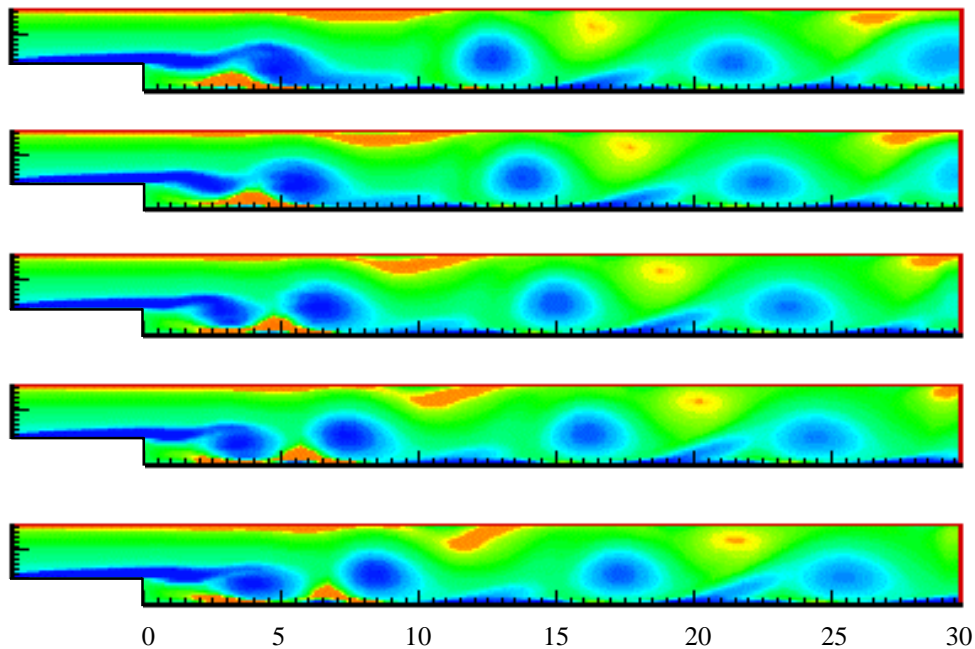


Figura 8. Campo de vorticidade – Modelagem Função Estrutura de ordem 2.

Para uma comparação dos resultados, perfis de velocidade média são traçados em seis seções transversais conforme mostrado na figura (9). As comparações dos perfis de velocidade média obtidos pelas modelagens de Smagorinsky e Função Estrutura com os obtidos experimentalmente por Kim et al (1980) são apresentadas nas figuras (10) e (11) respectivamente.

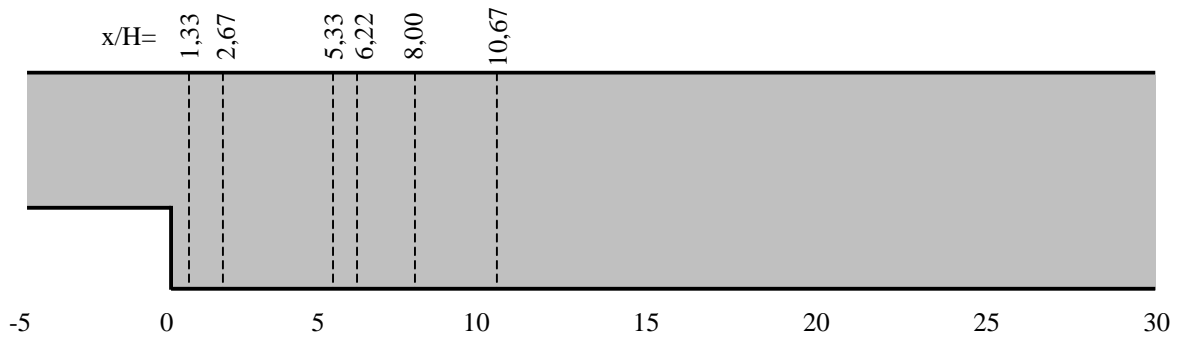


Figura 9. Seções para o traçado do perfil de velocidade média.

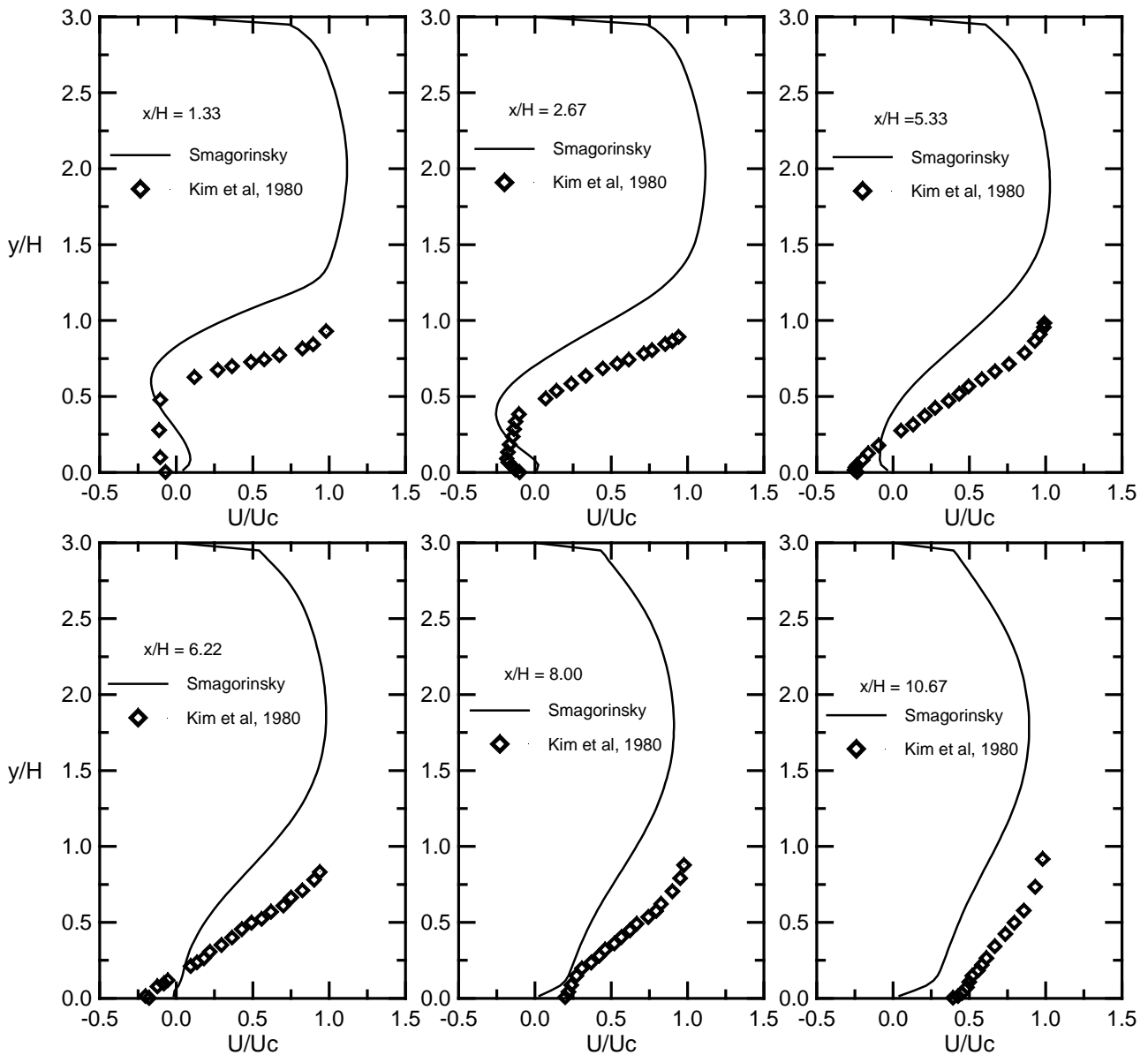


Figura 10. Perfis de velocidade média para a modelagem de Smagorinsky.

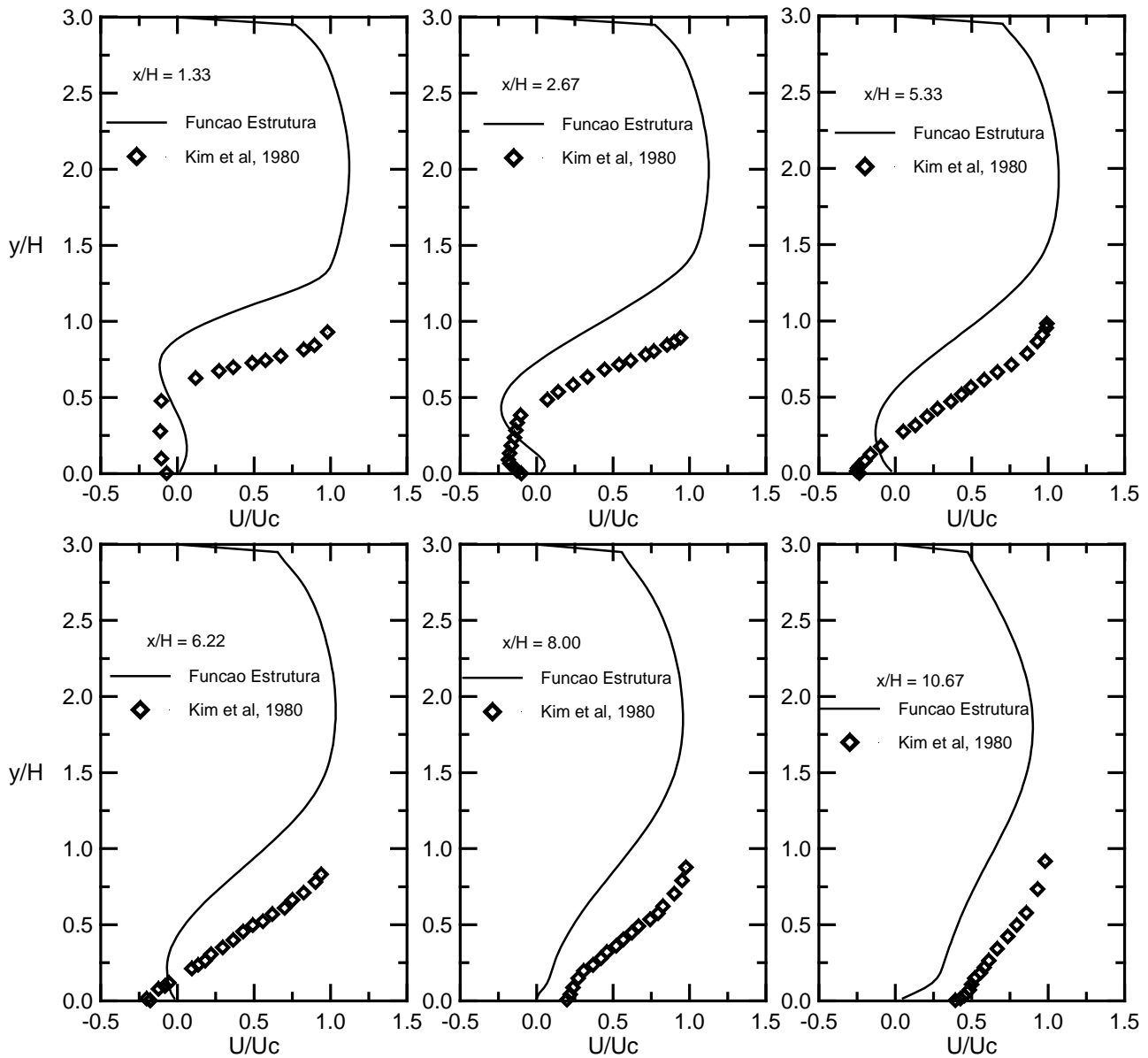


Figura 11. Perfis de velocidade média para a modelagem Função Estrutura de ordem 2.

Experimentalmente, foi observada a existência de uma recirculação secundária girando no sentido anti-horário junto a parte inferior da parede vertical do salto (Karniadakis et al, 1989). Essa recirculação foi captada pelas duas modelagens, como pode ser visto nas figuras (10) e (11), porém, enquanto as modelagens prevêem a presença dessa recirculação até x/H igual a 2,67, nos experimentos essa recirculação para x/H igual a 1,33 já não existe.

4. Conclusões

Considerando que, no caso estudado, a dificuldade de implementação das modelagens é a mesma, as condições iniciais e de contorno são idênticas, o tempo de processamento é praticamente o mesmo, considerando ainda que os resultados obtidos pelas duas modelagens estão bem próximos, e no caso do ponto de recolamento estão dentro da faixa de incerteza do resultado experimental, que é de ± 1 , não foram observadas vantagens ou desvantagens significativas de uma modelagem em relação a outra.

Para o modelo Função Estrutura, o refinamento da malha provocou um afastamento do valor do ponto de recolamento em relação ao experimental, porém, deve-se observar que os resultados encontram-se dentro da faixa de incerteza do valor experimental. A região de recirculação secundária prevista pelas modelagens mostrou-se maior que a experimental.

Por necessitar de ferramentas estatísticas, a análise dos resultados obtidos através da SGE requer o tratamento de um grande volume de dados, implicando em maior capacidade de memória e armazenamento dos computadores. Uma característica atraente da SGE é a possibilidade de obtenção de resultados em regime transiente, permitindo-se analisar o comportamento do escoamento ao longo do tempo, as regiões de formação dos vórtices e suas trajetórias ao longo do

domínio de cálculo. As duas modelagens são relativamente simples de se implementar, principalmente quando comparadas com outras modelagens, tais como κ - ϵ e κ - ω que aumentam o número de equações a serem resolvidas.

Em relação a obtenção dos resultados deve-se observar os seguintes fatores:

- A turbulência tem como característica ser tridimensional, quando se restringe o escoamento a duas dimensões os efeitos tridimensionais da turbulência são perdidos, fato este que reflete na qualidade dos resultados;
- Os perfis de velocidade média são obtidos estatisticamente através de médias temporais, sendo assim, é de se esperar que um tempo maior de processamento e conseqüentemente um maior número de amostras, conduzam a melhores resultados;
- Foi desprezada a parte transposta do termo difusivo nas equações de quantidade de movimento;
- Uma malha mais refinada poderia ser utilizada.

5. Referências

- Hirt, C. W.; Nichols, B. D. and Homero N. C., 1975, "SOLA - A numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows", Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California.
- Kim, J., Kline, S.J., and Johnston, J.P., 1980, "Investigation of a Reattaching Shear Layer: Flow Over a Backward Facing Step", ASME J. Fluids Eng., Vol. 102, pp. 302-308.
- Leonard, B.P., 1979, "A Stable Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 19, pp. 59-98.
- Patankar, V. Suhas, 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation.
- Pirani, M. J., 1996, "Simulação de Escoamentos Turbulentos Usando o Método dos Volumes Finitos", Tese de Mestrado da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, Minas Gerais.
- Silveira-Neto, A., 1998, "Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos", I Escola de Primavera, Transição e Turbulência, apostila de mini cursos, ABCM, COPPE/UFRJ, IME/RJ, Rio de Janeiro, pp. 159-190.
- Smagorinsky, J., 1963, "General Circulation Experiments with Primitive Equations", Mon. Weather Rev., vol 91, pp. 2501-2514.
- Thangam, S., and Speziale, C.G., 1992, "Turbulent Flow Past a Backward Facing Step: A Critical Evaluation of Two Equation Models", AIAA Journal, Vol. 30, nº 5, pp. 1314-1320.

TITLE: Comparative Study Between Smagorinsky and Structure Function Subgrid Models – Application to the Flow in Transition in a Backward Facing Step.

Marcelo José Pirani

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI
 Departamento de Engenharia Mecânica
 Campos Prof José Rodrigues Seabra
 Av. BPS, 1303, Pinheirinho
 CEP 37500 000 - Itajubá - MG
 Email: pirani@iem.efei.br

Nelson Manzanares Filho

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI
 Departamento de Engenharia Mecânica
 Campos Prof José Rodrigues Seabra
 Av. BPS, 1303, Pinheirinho
 CEP 37500 000 - Itajubá - MG
 Email: nelson@iem.efei.br

Rogério Brito

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI
 Departamento de Engenharia Mecânica
 Campos Prof José Rodrigues Seabra
 Av. BPS, 1303, Pinheirinho
 CEP 37500 000 - Itajubá - MG
 Email: rogbrito@iem.efei.br

Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Departamento de Engenharia Mecânica
Uberlândia - MG
Email: aristeus@mecanica.ufu.br

Abstract

A comparison between Smagorinsky subgrid model and Velocity Structure Function of Second Order model is made using the finite volume method, applied to the flow in transition to the turbulence in backward facing step. The reattachment point as well as the mean velocity profile obtained with the two models are compared to literature and the vorticity field is showed. The developed computational program make use of SOLA method, QUICK convective scheme and, to solve a linear equation system, the Choleski method.

Keywords: *Large Edge Simulation, Smagorinsky Subgrid Model, Velocity Structure Function of Second Order Subgrid Model, Finite Volume.*