

**FORMULAÇÃO MISTA DE ELEMENTOS FINITOS E VOLUMES FINITOS  
PARA A ANÁLISE TERMO-HIDRODINÂMICA DE MANCAIS AXIAIS****Paulo José Brüzzi Barros**

ENERG POWER Ltda.

Rua Desembargador Drumond 41, 5º Andar – Bairro dos Funcionários

CEP 30220-030, Belo Horizonte, MG, Brasil

[pbruzzi@terra.com.br](mailto:pbruzzi@terra.com.br)**Marco Túlio Corrêa de Faria**

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627.

CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

[mtfaria@dedalus.lcc.ufmg.br](mailto:mtfaria@dedalus.lcc.ufmg.br)**Ramon Molina Valle**

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627.

CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

[ramon@vesper.demec.ufmg.br](mailto:ramon@vesper.demec.ufmg.br)

**Resumo.** Um procedimento computacional baseado nos métodos de elementos finitos e volumes finitos é implementado para a análise da lubrificação termo-hidrodinâmica de mancais axiais com sapatas fixas inclinadas do tipo setor circular. O método de Galerkin é utilizado no procedimento de solução via elementos finitos da equação de Reynolds, enquanto um procedimento de volumes finitos em coordenadas generalizadas é empregado na solução da equação de energia para o filme lubrificante. Um procedimento linearizado de perturbação é aplicado sobre a equação de Reynolds para a obtenção das equações de lubrificação de ordem zero e primeira ordem, que permitem calcular a capacidade de carga e os coeficientes de força do mancal, respectivamente, sob as mais diversas condições de operação. A predição dos campos de pressão hidrodinâmica e de temperatura no filme lubrificante é efetuada iterativamente para condições estacionárias de operação. A influência da dissipação viscosa e de parâmetros geométricos e operacionais sobre o comportamento de mancais axiais em regime de lubrificação termo-hidrodinâmica é analisada por meio de diversas curvas de capacidade de carga e coeficientes dinâmicos de força para algumas configurações de mancais. A validação dos procedimentos desenvolvidos é efetuada por meio de comparação com resultados disponíveis na literatura.

**Palavras chave:** Lubrificação Termo-Hidrodinâmica, método de elementos finitos, método de volumes finitos, mancais axiais

**1. Introdução**

O comportamento de mancais axiais hidrodinâmicos de conjuntos hidrogeradores verticais é fortemente influenciado pelos efeitos de dissipação viscosa. Como principal consequência, tem-se o aumento da temperatura do filme lubrificante, ocasionando assim uma diminuição de sua viscosidade e a redução da capacidade de sustentação de carga pelo mancal. Aliados a este fato, a alta magnitude do carregamento e as perturbações dinâmicas associadas à operação tornam a análise termo-hidrodinâmica desses mancais uma etapa crucial nas etapas preliminares de seu projeto. Dessa forma, a predição das características de desempenho de mancais axiais em relação a parâmetros geométricos e operacionais considerando os efeitos térmicos consiste em tarefa de extrema importância no projeto de mancais eficientes, resistentes e seguros (Tanaka, 2000).

Aliada à importância da determinação da capacidade de carga e do perfil de temperatura do filme lubrificante na modelagem dos conjuntos girantes de turbogeradores, está o cálculo dos coeficientes dinâmicos dos mancais hidrodinâmicos, isto é, os coeficientes linearizados de rigidez e de amortecimento. Lund (1987) apresenta uma metodologia para o cálculo dos coeficientes de amortecimento e de rigidez de mancais radiais através da perturbação da posição de equilíbrio do conjunto girante. De modo similar, Barros e Faria (2001) desenvolvem um modelo numérico para o cálculo dos coeficientes de desempenho utilizando um procedimento de perturbação linear sobre a posição de equilíbrio estacionário.

Neste trabalho, apresenta-se uma análise termo-hidrodinâmica de mancais axiais de sapatas fixas inclinadas, do tipo setor circular. Desenvolve-se uma formulação numérica híbrida de elementos finitos e volumes finitos, onde os campos bidimensionais de pressão e temperatura são calculadas segundo um processo iterativo de convergência (Barros, 2001). Na formulação de elementos finitos, utilizam-se elementos isoparamétricos lineares, empregando-se o método de Galerkin para a obtenção do sistema de equações de elementos finitos para as equações de lubrificação. Para a solução da equação de energia, emprega-se uma formulação de volumes finitos com malha generalizada não ortogonal. A equação de energia é resolvida para um mancal adiabático considerando apenas transferência de calor por convecção e geração viscosa de calor no filme lubrificante (Barros, 2001). Determinam-se então, para diferentes condições de trabalho, além da distribuição da pressão e do perfil de temperatura ao longo do filme, os coeficientes de desempenho dos mancais, permitindo assim avaliar a influência de parâmetros geométricos e operacionais sobre o comportamento de mancais axiais.

## 2. Descrição do Modelo

O mancal axial de escora analisado é composto por sapatas fixas tipo setor circular que apresentam, no sentido circunferencial, uma porcentagem de sua extensão inclinada. A Fig. (1) representa esquematicamente o mancal em questão. A sapata pode possuir uma região plana (não inclinada) e uma região inclinada. Considera-se que o conjunto girante não apresenta desalinhamento. A relação de dependência entre viscosidade e temperatura faz com que haja um acoplamento entre as equações governantes – equação de Reynolds e equação de energia.

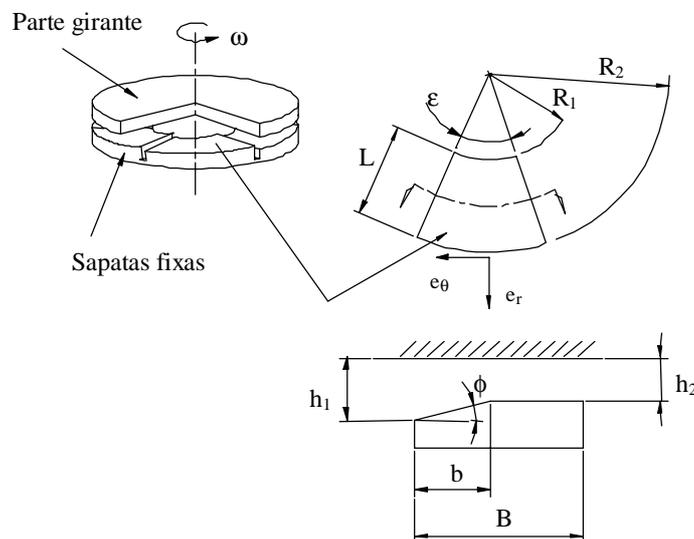


Figura 1. Esquema de um mancal axial com sapatas inclinadas.

A geometria do mancal é caracterizada pelo raio externo e interno do mancal –  $R_2$  e  $R_1$  respectivamente, pela espessura mínima do filme lubrificante –  $h_2$ , pelo ângulo de inclinação –  $\phi$ , pela razão entre o comprimento da região inclinada e o total –  $b/B$ , pelo número de sapatas –  $N$  e pelo ângulo da sapata –  $\epsilon$ . A velocidade de rotação é descrita por  $\omega$ .

A equação clássica de Reynolds para fluidos incompressíveis, baseada nas hipóteses de fluido isoviscoso, newtoniano e incompressível e escoamento laminar, isotérmico e não inercial (Pinkus e Sternlicht, 1961), é escrita em coordenadas cilíndricas como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{rh^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{-h^3}{12\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\omega r h}{2} \right) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

onde  $\mu$ ,  $p$ ,  $h$  representam, respectivamente, a viscosidade, a pressão e a espessura do filme lubrificante. As coordenadas cilíndricas são dadas por  $r$  e  $\theta$ .

A espessura do filme lubrificante  $h_o(r, \theta)$  define a posição de equilíbrio estacionário do rotor vertical em relação ao mancal. Eventuais vibrações axiais no eixo ocasionam a variação na espessura do filme. Para avaliar a resposta do mancal a estas vibrações axiais externas, utiliza-se um procedimento de perturbação sobre sua posição de equilíbrio estacionário, desenvolvido por Lund (1987). Considera-se uma perturbação  $\delta$  aplicada na frequência de excitação  $\Omega$ . Logo, tem-se a espessura do filme descrita como

$$h(r, \theta, t) = h_o(r, \theta) + \delta e^{i\Omega t} \quad (2)$$

Considera-se, então, que a perturbação na espessura do filme ocasiona uma variação semelhante na pressão hidrodinâmica do fluido, que pode ser descrita como

$$p = P_0 + P_1 \delta e^{i\Omega t} \quad (3)$$

onde  $P_0$  e  $P_1$  representam, respectivamente, a pressão na posição de equilíbrio (ordem zero) e a perturbação no campo de pressão (primeira ordem).

Substituindo as Eq. (2) e (3) em (1), obtêm-se as equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{r h_0^3}{12\mu} \frac{\partial P_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{-h_0^3}{12\mu r} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} + \frac{\omega r h_0}{2} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{-r}{12\mu} \left( h_0^3 \frac{\partial P_1}{\partial r} + 3h_0^2 \frac{\partial P_0}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{-1}{12\mu r} \left( h_0^3 \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + 3h_0^2 \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\omega r}{2} \right] = -i\Omega \quad (5)$$

As Equações (4) e (5) permitem determinar os campos de pressão de ordem zero e de primeira ordem na posição de equilíbrio do sistema rotor-mancal. Integrando-se a pressão hidrodinâmica  $P_0$  obtida de (4) no domínio do fluido lubrificante, definido como  $\Phi$ , obtém-se a carga total suportada pelo mancal. Tem-se então que

$$F_z = \iint_{\Phi} P_0 r dr d\theta \quad (6)$$

onde  $F_z$  representa a carga total suportada pelo mancal de escora.

Os coeficientes dinâmicos de força do mancal são obtidos por meio da integração das pressões complexas de primeira ordem (perturbadas) no domínio do lubrificante  $\Phi$ . Definindo  $K$  como o coeficiente de rigidez e  $C$  como o coeficiente de amortecimento, tem-se

$$K + i\Omega C = \iint_{\Phi} P_1 r dr d\theta \quad (7)$$

A equação da energia é obtida considerando-se que não haja variação da pressão ou da temperatura transversalmente ao fluido, que as superfícies fixas e móveis do mancal em contato com o filme lubrificante são adiabáticas e que o transporte de calor por convecção do fluido é muito mais significativo do que a transferência por condução (Pinkus, 1990).

$$c_p h \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{1}{2} U h c_p \left\{ \left[ 1 - \frac{h^2}{6\mu U} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial(\rho T)}{\partial x} - \frac{h^2}{6\mu U} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial(\rho T)}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\mu U^2}{h} + \frac{h^3}{12\mu} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (8)$$

onde  $U$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ , representam, respectivamente, a velocidade tangencial, a densidade e o calor específico do filme lubrificante. São utilizadas na representação do modelo, as coordenadas  $(x, z)$ . Para maiores detalhes, ver Pinkus (1990).

Na Eq. (8), considera-se tanto a densidade quanto a viscosidade variáveis com a temperatura. Pinkus (1990) e Kim et al (1983) mostram que, para a maioria de óleos lubrificantes minerais, estas grandezas podem ser expressas como

$$\mu = \mu_{ref} \exp[\varphi(T - T_{ref})] \quad (9)$$

$$\rho = \rho_{ref} [1 + \iota(T - T_{ref})] \quad (10)$$

onde  $\mu_{ref}$ ,  $\rho_{ref}$  representam, respectivamente, a viscosidade e a densidade definida segundo uma temperatura de referência ( $T_{ref}$ ) na pressão atmosférica. Os coeficientes  $\iota$  e  $\varphi$  são constantes e dependentes do tipo de fluido lubrificante.

### 3. Formulação de Elementos Finitos

Para um elemento finito, cujo domínio é representado por  $\Phi_e$ , tem-se a equação de lubrificação de ordem zero escrita na seguinte forma (Barros, 2001)

$$[K_{ji}^e] \{P_{oi}^e\} = -\{q_{oj}^e\} + \{f_{oj}^e\} \quad (11)$$

onde

$$[K_{ji}^e] = \int_{\Phi_e} \left[ \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial r} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial r} \frac{h_0^3}{12\mu} + \frac{1}{r_e^2} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \theta} \frac{h_0^3}{12\mu} \right] d\Phi_e \quad (12)$$

$$\{f_{oj}^e\} = \int_{\Phi_e} \frac{\omega h_0^e}{2} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} d\Phi_e \quad (13)$$

$$\{q_{oj}^e\} = \oint_{\Gamma_e} \Psi_j^e q_{n0} d\Gamma_e \quad (14)$$

sendo que  $\{P_{oi}^e\}$ ,  $[K_{ji}^e]$ ,  $\{f_{oj}^e\}$ ,  $\{q_{oj}^e\}$  e  $q_{n0}$  representam para cada elemento “e”, respectivamente, o vetor da pressão hidrodinâmica de equilíbrio estacionário, a matriz de fluidez de ordem zero, o vetor de fluxo de ordem zero devido ao efeito de cisalhamento, o vetor de fluxo de ordem zero devido ao escoamento de fluido através do contorno do elemento  $\Gamma_e$  e o fluxo de ordem zero por unidade de comprimento através do contorno  $\Gamma_e$ .

Analogamente, a equação de lubrificação de primeira ordem é escrita como

$$[K_{ji}^e] \{P_{li}^e\} + [Kp_{ji}^e] \{P_{oi}^e\} = \{f_{lj}^e\} - \{q_{lj}^e\} \quad (15)$$

onde

$$[Kp_{ji}^e] = \int_{\Phi_e} \frac{3h_0^2}{12\mu} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial r} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial r} + \frac{1}{r_e^2} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial \theta} \right) \right] d\Phi_e \quad (16)$$

$$\{f_{lj}^e\} = \int_{\Phi_e} \frac{\omega}{2} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial \theta} d\Phi_e + \int_{\Phi_e} i\Omega \Psi_j^e d\Phi_e \quad (17)$$

$$\{q_{lj}^e\} = \oint_{\Gamma_e} \Psi_j^e q_{n1} d\Gamma_e \quad (18)$$

sendo que  $\{P_{li}^e\}$ ,  $[Kp_{ji}^e]$ ,  $\{f_{lj}^e\}$ ,  $\{q_{lj}^e\}$  e  $q_{n1}$  representam para cada elemento “e”, respectivamente, o vetor da pressão hidrodinâmica perturbada de primeira ordem, a matriz de fluidez de primeira ordem, o vetor de fluxo de primeira ordem devido ao efeito de cisalhamento e o vetor de fluxo de primeira ordem devido ao escoamento de fluido através do contorno do elemento  $\Gamma_e$  e o fluxo de primeira ordem por unidade de comprimento através do contorno  $\Gamma_e$ . Os valores de pressão de ordem zero e de primeira ordem são calculados através das equações globais de elementos finitos, que são obtidas pela superposição das Eq. (11) e (15) sobre o domínio global da película lubrificante (Faria, 1995).

As bordas de entrada e saída da sapata estão sujeitas à pressão atmosférica, enquanto que as bordas interna e externa possuem fluxo de massa igual a zero.

#### 4. Formulação de Volumes Finitos

Para a solução numérica da equação de energia, utiliza-se uma formulação de volumes finitos, com malha generalizada não ortogonal [Maliska (1995) e Valle (1995)]. A obtenção do novo sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$  a partir do sistema de coordenadas original conhecido  $(x, z)$ , se faz a partir das transformações  $\xi = \xi(x, z)$  e  $\eta = \eta(x, z)$ . Aplicando-se a transformação geral na Eq. (8), a equação da energia pode ser dada pela Eq. (19), onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  (componentes do tensor métrico associado à transformação) representam os coeficientes de acoplamento entre as equações e  $J$  o Jacobiano da transformação.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{U}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho T z_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho T z_\xi) \right) - \frac{h^2}{12\mu} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \rho T J \frac{\partial p}{\partial \xi} z_\eta^2 - \rho T J \frac{\partial p}{\partial \eta} z_\xi z_\eta \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \rho T J \frac{\partial p}{\partial \eta} z_\xi^2 - \rho T J \frac{\partial p}{\partial \xi} z_\eta z_\xi \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \rho T J \frac{\partial p}{\partial \xi} x_\eta^2 - \rho T J \frac{\partial p}{\partial \eta} x_\xi x_\eta \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \rho T J \frac{\partial p}{\partial \eta} x_\xi^2 - \rho T J \frac{\partial p}{\partial \xi} x_\eta x_\xi \right) \right] = \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\mu U^2}{J c_p h^2} + \frac{h^2 J}{12 \mu c_p} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)^2 \alpha - 2 \beta \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \left( \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^2 \gamma \right]$$

sendo que

$$J = (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi)^{-1}; \quad \alpha = x_\eta^2 + z_\eta^2; \quad \gamma = x_\xi^2 + z_\xi^2 \quad \text{e} \quad \beta = x_\xi x_\eta + z_\xi z_\eta \quad (20)$$

Empregando-se uma formulação totalmente implícita, onde todos os termos são avaliados no instante  $(t+\Delta t)$ , segundo Patankar (1980) e Maliska (1995), e utilizando-se as funções de interpolação unidimensionais WUDS – *Weighted Upstream Differencing Scheme*, definidas em Maliska (1995) e Valle (1995), a integração no tempo e no espaço da Eq. (19) para um volume elementar resulta em

$$A_p T_p = A_E T_E + A_W T_W + A_N T_N + A_S T_S + B \quad (21)$$

onde

$$\begin{aligned} A_p = & \frac{M_p}{\Delta t} + A_E + A_W + A_N + A_S + (K_e - M_{ez} - M_{ex}) + (-K_w + M_{wz} + M_{wx}) + \\ & + (-K_n - N_{nz} - N_{nx}) + (K_s + N_{sz} + N_{sx}) \end{aligned} \quad (22)$$

$$A_E = \left( -\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right) (K_e - M_{ez} - M_{ex}) \quad A_N = \left( -\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right) (-K_n - N_{nz} - N_{nx}) \quad (23)$$

$$A_W = \left( -\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w \right) (-K_w + M_{wz} + M_{wx}) \quad A_S = \left( -\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s \right) (K_s + N_{sz} + N_{sx})$$

$$B = \frac{M_p^0 T_p^0}{\Delta t} + \frac{\mu_p U_p^2}{J_p C_p h_p^2} + \left( \frac{h^2 J \alpha}{48 \mu c_p} \right)_p (P_E - P_W)^2 + \left( \frac{h^2 J \gamma}{48 \mu c_p} \right)_p (P_N - P_S)^2 - \left( \frac{h^2 J \beta}{24 \mu c_p} \right)_p (P_E - P_W)(P_N - P_S)$$

$$M_p = \frac{\rho \Delta \xi \Delta \eta}{J}$$

$$K_e = \frac{U_e \rho_e (z_\eta)_e}{2} \Delta \eta$$

$$K_w = \frac{U_w \rho_w (z_\eta)_w}{2} \Delta \eta$$

$$K_n = \frac{U_n \rho_n (z_\xi)_n}{2} \Delta \xi$$

$$K_s = \frac{U_s \rho_s (z_\xi)_s}{2} \Delta \xi$$

$$M_{ez} = \frac{h_e^2 \rho_e J_e}{12 \mu_e} \left( z_\eta^2 \Big|_e \frac{P_E - P_P}{\Delta \xi} - z_\eta \Big|_e z_\xi \Big|_e \frac{P_{NE} + P_N - P_S - P_{SE}}{4 \Delta \eta} \right) \Delta \eta$$

$$M_{wz} = \frac{h_w^2 \rho_w J_w}{12 \mu_w} \left( z_\eta^2 \Big|_w \frac{P_P - P_W}{\Delta \xi} - z_\eta \Big|_w z_\xi \Big|_w \frac{P_{NW} + P_N - P_S - P_{SW}}{4 \Delta \eta} \right) \Delta \eta$$

$$M_{ex} = \frac{h_e^2 \rho_e J_e}{12 \mu_e} \left( x_\eta^2 \Big|_e \frac{P_E - P_P}{\Delta \xi} - x_\eta \Big|_e x_\xi \Big|_e \frac{P_{NE} + P_N - P_S - P_{SE}}{4 \Delta \eta} \right) \Delta \eta$$

$$M_{wx} = \frac{h_w^2 \rho_w J_w}{12 \mu_w} \left( x_\eta^2 \Big|_w \frac{P_P - P_W}{\Delta \xi} - x_\eta \Big|_w x_\xi \Big|_w \frac{P_{NW} + P_N - P_S - P_{SW}}{4 \Delta \eta} \right) \Delta \eta$$

$$N_{nz} = \frac{h_n^2 \rho_n J_n}{12 \mu_n} \left( z_\xi^2 \Big|_n \frac{P_N - P_P}{\Delta \eta} - z_\eta \Big|_n z_\xi \Big|_n \frac{P_{NE} + P_E - P_W - P_{NW}}{4 \Delta \xi} \right) \Delta \xi$$

$$N_{sz} = \frac{h_s^2 \rho_s J_s}{12 \mu_s} \left( z_\xi^2 \Big|_s \frac{P_P - P_S}{\Delta \eta} - z_\eta \Big|_s z_\xi \Big|_s \frac{P_{SE} + P_E - P_W - P_{SW}}{4 \Delta \xi} \right) \Delta \xi$$

$$N_{nx} = \frac{h_n^2 \rho_n J_n}{12 \mu_n} \left( x_{\xi}^2 \Big|_n \frac{P_N - P_P}{\Delta \eta} - x_{\eta} \Big|_n x_{\xi} \Big|_n \frac{P_{NE} + P_E - P_W - P_{NW}}{4 \Delta \xi} \right) \Delta \xi$$

$$N_{sx} = \frac{h_w^2 \rho_w J_w}{12 \mu_w} \left( x_{\xi}^2 \Big|_w \frac{P_P - P_S}{\Delta \eta} - x_{\eta} \Big|_s x_{\xi} \Big|_s \frac{P_{SE} + P_E - P_W - P_{SW}}{4 \Delta \xi} \right) \Delta \xi$$

onde o índice “1” representa o instante  $(t + \Delta t)$  e o “0” o instante  $t$ . Os termos  $\bar{\alpha}_s, \bar{\alpha}_w, \bar{\alpha}_e, \bar{\alpha}_n$  são coeficientes usados nas funções de interpolação WUDS. Segundo Maliska (1995), para problemas com predominância da convecção sobre os efeitos difusivos, tem-se que  $\bar{\alpha}_i$  assume os valores de  $-0,5$  ou  $0,5$ , possuindo sempre o mesmo sinal da velocidade, isto é, positivo se for de oeste-leste ( $W \rightarrow E$ ), ou negativo, se leste-oeste ( $E \rightarrow W$ ).

Para a definição das condições de contorno da solução da equação de energia, são utilizados volumes fictícios (Maliska, 1995), criados nas fronteiras da sapata. Deste modo, estes volumes assumem como parâmetros característicos aqueles já definidos nas condições de contorno da solução da equação de Reynolds. Assim, nas faces sul e norte tem-se condição de fluxo prescrito que define uma fronteira adiabática. Na face leste, tem-se condição de fluxo prescrito nulo, que define temperaturas iguais para os volumes fictícios e de fronteira. Na face oeste, tem-se condição de temperatura prescrita.

Da condição de contorno na face oeste, tem-se a necessidade do conhecimento da temperatura do filme na fronteira dos volumes. Sendo assim, no primeiro momento, isto é, na primeira iteração no tempo, considera-se constante a temperatura na fronteira como sendo a temperatura de entrada do óleo frio. Nas iterações seguintes, utiliza-se o balanço de fluxo para a sua determinação, conforme apresentado em Heshmat e Pinkus (1986) com a definição de um coeficiente de mistura em função da velocidade de rotação do rotor, definindo assim as parcelas de participação do fluido quente e do de refrigeração na formação do lubrificante de entrada na sapata subsequente. Tem-se então, a seguinte equação

$$T_e = \frac{\kappa T_f + T_q - \bar{\delta} (160/9) \lambda_c (1 + \kappa - \chi)}{(1 + \kappa - \chi)(1 + \lambda_c)} \quad (24)$$

onde  $\bar{\delta} = 1$  se as temperaturas forem dadas em °C e  $\lambda_c$  é o coeficiente empírico de mistura, definido como

$$\lambda_c = -9 \cdot 10^{-3} [1 - 1,053 \tilde{U} + 0,053 \tilde{U}^2] [5 - 3 \tilde{T}_0] \quad (25)$$

onde  $\tilde{U} = (U/5000)$  e  $\tilde{T}_0 = (T_0/120)$ , com  $U$  dado em ft/min e  $T_0$  em °F.

Na Eq. (24), tem-se que  $\chi$  representa a razão entre as vazões do óleo que sai nas ranhuras de alimentação e de entrada na sapata posterior e, finalmente,  $\kappa$ , indicando a razão entre as vazões de fluido frio e quente.

## 5. Validação

A validação do cálculo do campo de temperatura em um mancal axial de sapatas fixas inclinadas (Tab. (1)) é realizada por meio da comparação das predições obtidas pela formulação mista com os resultados apresentados por Sternlicht (1957), que emprega um processo iterativo baseado na formulação de diferenças finitas.

Tabela 1. Dados do mancal para validação do modelo THD.

$R_2 = 0,2824$ m (11,12 in)	$N = 8$ sapatas	$\mu = 2,02 \times 10^{-2}$ Pa.s, para 115°F
$L/R_2 = 0,56$	$\beta = 40^\circ$	$\rho = 898,4$ kg/m <sup>3</sup> , para 115°F
$h_2 = 5,08 \times 10^{-5}$ m	$b/B = 1$	$c_p = 2,09 \times 10^3$ J/(kg.K)
$h_1/h_2 = 2$	$\omega = 3600$ rpm	$T_0 = 46,11^\circ$ C (115 °F)

Apesar da importância da mistura do óleo frio com o quente proveniente da sapata anterior ser ressaltada, Sternlicht (1957) não explicita o coeficiente de troca utilizado em seu modelo. Sendo assim, considera-se que o perfil de entrada da temperatura é uniforme e igual ao de fornecimento de óleo. A temperatura adimensionalizada é dada por

$$\bar{T} = \frac{\rho_{ref} c_p h_2^2}{12 \pi \mu_{ref} \omega R_2^2} T \quad (26)$$

onde  $\omega$  é a rotação do rotor em Hz. Demais variáveis são dadas no SI.

A Figura (2) apresenta os desvios relativos obtidos para um modelo com 784 elementos, sendo 14 radiais e 56 circunferenciais. Os perfis de temperatura apresentam forma similar, sendo que o ponto máximo de temperatura

localiza-se no ponto extremo da face de saída da sapata. Os desvios relativos estão, na sua maioria, dentro de uma faixa aceitável.

4,79%	0,87%	0,75%	1,64%	2,23%	2,83%	4,92%
2,60%	1,86%	4,22%	5,76%	6,60%	7,36%	8,62%
2,42%	0,73%	1,45%	1,47%	1,26%	1,07%	2,05%
0,45%	2,69%	3,74%	4,30%	4,59%	4,85%	5,53%
0,74%	0,69%	0,66%	0,28%	0,05%	0,11%	0,42%
0,82%	2,50%	3,07%	3,41%	3,74%	4,08%	4,43%
0,46%	0,74%	0,96%	1,18%	1,37%	1,64%	1,96%

Figura 2. Desvios relativos no cálculo do campo de temperatura em uma sapata.

## 6. Resultados

O mancal descrito na Tab. (2) é selecionado para a análise dos efeitos dos parâmetros geométricos e operacionais sobre seu desempenho.

Tabela 2. Características do mancal axial de sapatas fixas.

$R_2 = 0,36 \text{ m}$	$\beta = 30^\circ$	$\mu = 5,0 \times 10^{-2} \text{ Pa.s, para } 27^\circ \text{C}$
$h_{ref} = 5,08 \times 10^{-5} \text{ m}$	$\omega = 600 \text{ rpm}$	$\rho = 855,0 \text{ Kg/m}^3, \text{ para } 27^\circ \text{C}$
$h_2/h_{ref} = 1; 1,5; 2; 2,5; 3$	$T_0 = 30^\circ \text{C}$	$c_p = 2,09 \times 10^3 \text{ J/(kg K)}$
<i>Malha utilizada: 20 elementos radiais x 30 elementos circunferenciais</i>		

A adimensionalização utilizada para as características de desempenho é dada por

$$\bar{F}_z = \frac{F_z}{N\mu\pi R_{med}\omega L} \left( \frac{h_1 - h_2}{B} \right)^2; \quad \bar{K} = \frac{K}{12\mu\pi R_{med}\omega} \left( \frac{h_1 - h_2}{L} \right)^2 \quad \text{e} \quad \bar{C} = \frac{C \cdot 10^{-3}}{6\mu B} \left( \frac{h_1 - h_2}{L} \right)^2 \quad (27)$$

onde  $F_z$ ,  $K$ ,  $C$ ,  $R_{med}$  e  $N$  representam, respectivamente, a capacidade de carga, o coeficiente de rigidez, de amortecimento, o raio médio da sapata e o número de sapatas. A rotação do rotor  $\omega$  é dada em Hz.

No modelo isotérmico (ISO), a viscosidade do fluido lubrificante é definida segundo o método de viscosidade efetiva (Pinkus, 1991), sendo então considerado um aquecimento do filme de 20 °C. Os modelos isotérmico (ISO) e termo-hidrodinâmico (THD) são empregados para determinar os parâmetros do mancal que provêm o melhor desempenho, baseado na capacidade de carga e nos coeficientes de força, para aquela configuração.

A Fig. (3) mostra a variação da capacidade de carga obtida pelo modelo THD em função do número de sapatas do mancal. São utilizados mancais com a relação entre as espessuras de entrada e de saída do filme lubrificante igual a 2, tendo em vista as maiores capacidades de carga apresentadas por estes mancais. Observa-se um crescimento da capacidade de carga com o aumento do número de sapatas, tendo os valores máximos alcançados para 10 sapatas. Após este valor, têm-se pequenas variações da capacidade de carga. Observa-se também que com o aumento da área de cada sapata, tem-se o crescimento da capacidade de carga gerada. É importante notar que, pela análise dos modelos ISO e THD, os maiores valores para a capacidade de carga são alcançados em mancais com 10 sapatas e 70% do comprimento circunferencial inclinado. Essa configuração de mancal é também obtida em Barros e Faria (2001).

A Fig. (4) mostra a variação do coeficiente de rigidez obtido pelo modelo THD em função do número de sapatas do mancal. Observa-se um crescimento gradativo da rigidez com o aumento do número de sapatas para todas as geometrias analisadas, representando um aumento na estabilidade. Já a Fig. (5) mostra a variação do coeficiente de amortecimento obtido pelo modelo THD em função do número de sapatas.

As Fig. (6) a (8) mostram a variação das características de desempenho do mancal versus a razão de espessura de filme para diferentes razões de vazão de óleo frio (externo) e óleo quente (interno) na entrada da sapata. Independentemente do fator de refrigeração  $\kappa$  utilizado, observa-se uma diminuição acentuada da capacidade de carga e dos coeficientes de rigidez e de amortecimento com o aumento da espessura do filme.

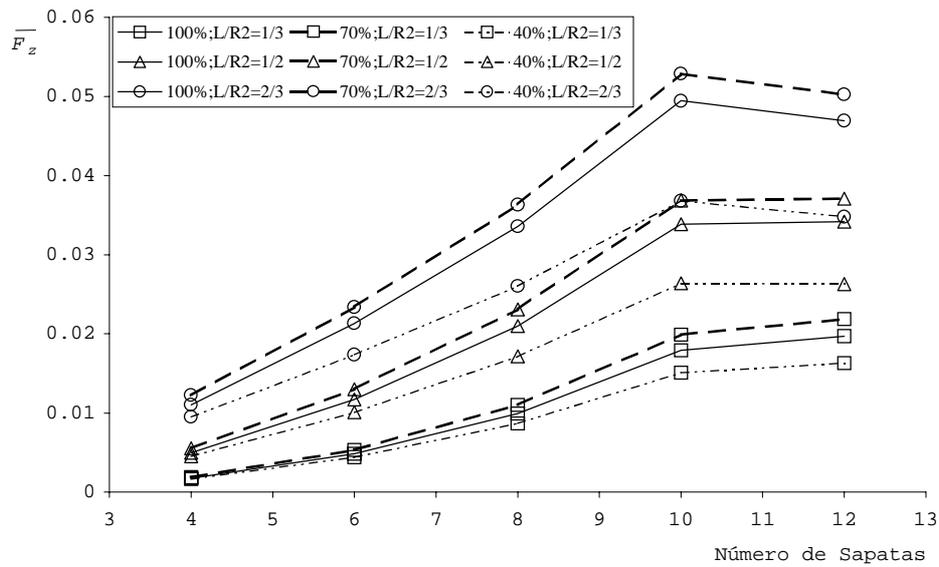


Figura 3. Capacidade de carga versus número de sapatas.  $h_1/h_2=2$ . Modelo THD.

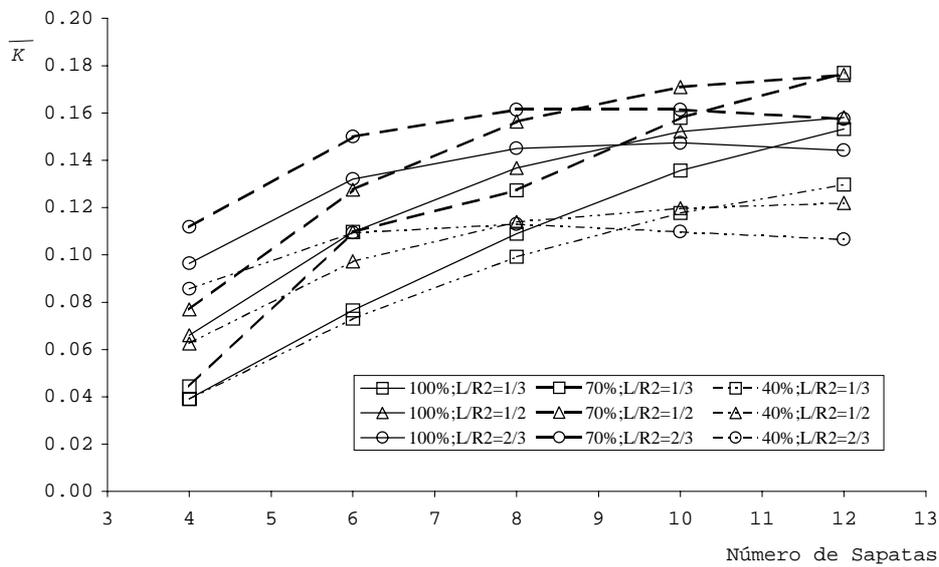


Figura 4. Coeficiente de rigidez adimensional versus número de sapatas.  $h_1/h_2=2$ . Modelo THD.

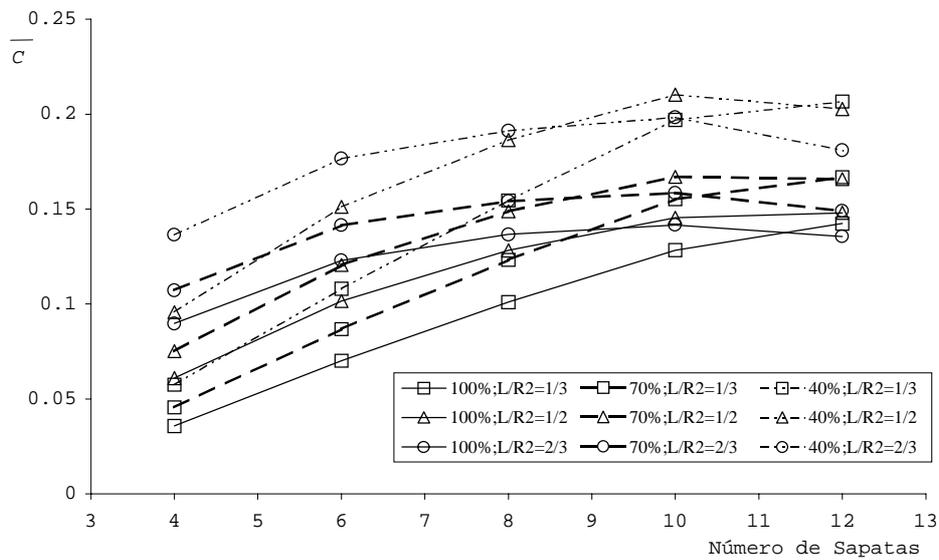


Figura 5. Coeficiente de amortecimento adimensional versus número de sapatas.  $h_1/h_2=2$ . Modelo THD.

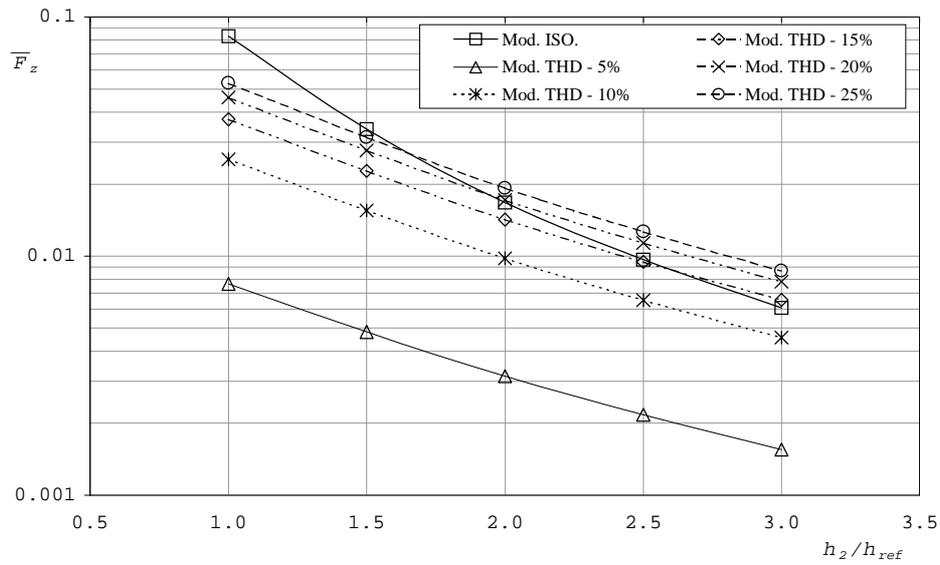


Figura 6. Capacidade de carga adimensional x espessura mínima do filme lubrificante.  $L/R_2 = 2/3$ . 70% de inclinação.

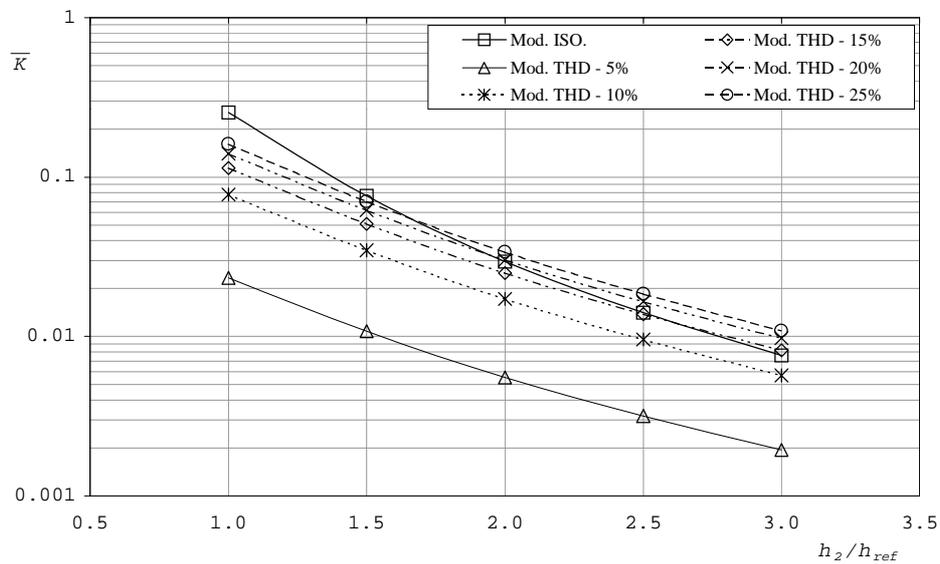


Figura 7. Coeficiente de rigidez adimensional x espessura mínima do filme lubrificante.  $L/R_2 = 2/3$ . 70% de inclinação.

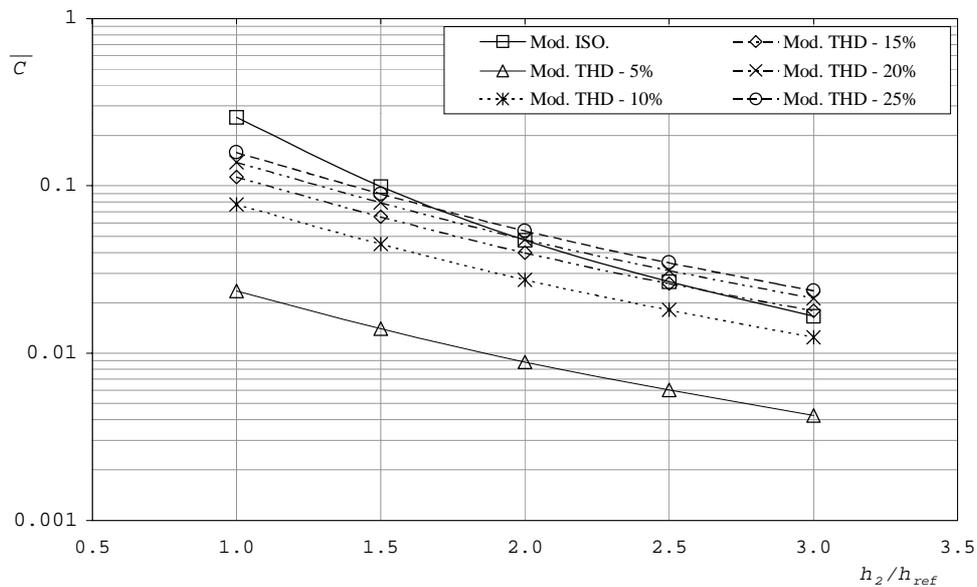


Figura 8. Coeficiente de amortecimento adimensional x espessura mínima do filme lubrificante.  $L/R_2 = 2/3$ . 70% de inclinação.

As Fig. (9) a (11) apresentam os efeitos da razão entre a vazão de óleo frio, fornecido externamente, e de óleo quente, proveniente da sapata anterior no perfil de temperatura do filme lubrificante. Os valores da temperatura são dados em °C. A temperatura do filme cresce gradativamente tanto circunferencial quanto radialmente, tendo, na borda externa de saída da sapata a região de maior temperatura, conforme citado em Pinkus (1990) e Kim et all (1983). Observa-se que, com o aumento do fator de refrigeração, isto é, com uma maior troca de calor entre o óleo quente e o frio na entrada da sapata, o fluido lubrificante apresenta um aquecimento menor e mais uniforme. É interessante notar também que, no caso de menor refrigeração, tem-se um maior aquecimento do óleo localizado na borda externa da sapata (diâmetro externo), que desaparece progressivamente com o aumento da troca de calor.

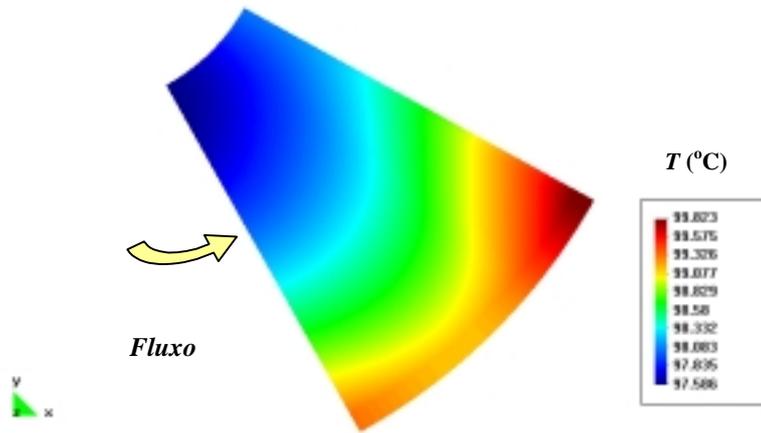


Figura 9. Perfil de Temperatura para mancal com sapata fixa. 70% de inclinação.  $L/R_2 = 2/3$ .  $\kappa = 5\%$ .

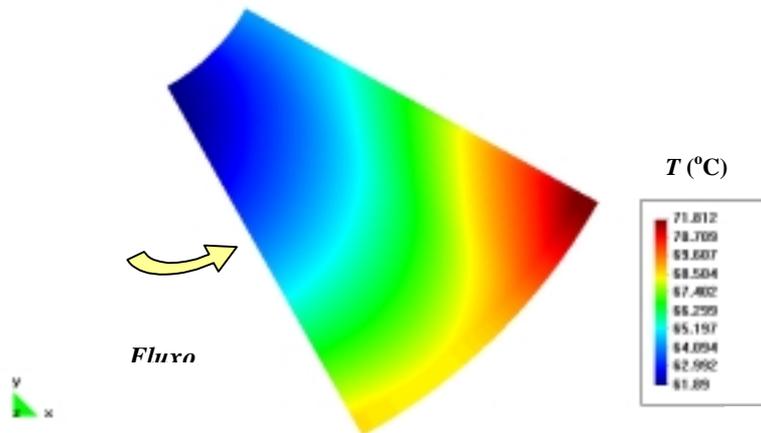


Figura 10. Perfil de Temperatura para mancal com sapata fixa. 70% de inclinação.  $L/R_2 = 2/3$ .  $\kappa = 15\%$ .

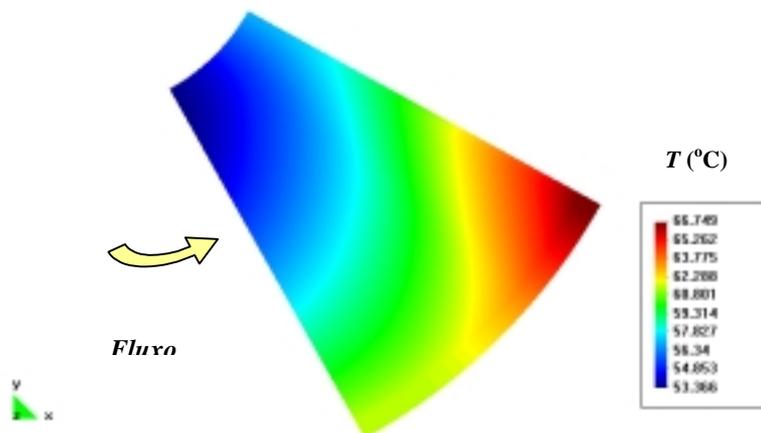


Figura 11. Perfil de Temperatura para mancal com sapata fixa. 70% de inclinação.  $L/R_2 = 2/3$ .  $\kappa = 25\%$ .

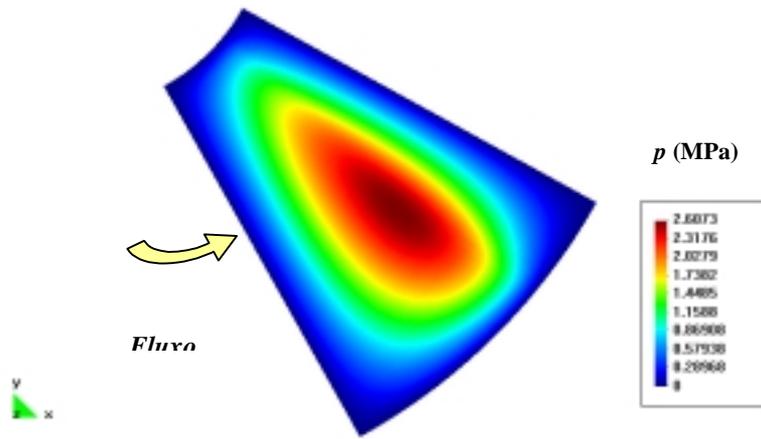


Figura 12. Distribuição da pressão hidrodinâmica.  $L/R_2 = 2/3$ . 70% de inclinação.

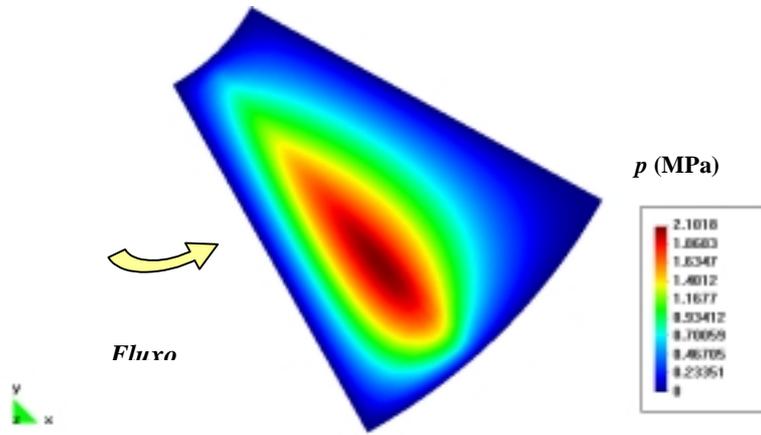


Figura 13. Distribuição da pressão hidrodinâmica.  $L/R_2 = 2/3$ . 40% de inclinação.

As Fig. (12) e (13) apresentam a distribuição da pressão hidrodinâmica. Observa-se que a região da pressão máxima está localizada na fronteira entre a região inclinada e a região plana da sapata. Na Fig. (12), o pico de pressão localiza-se próximo à borda de saída da sapata. Observa-se também uma distribuição mais uniforme da pressão ao longo da sapata com o aumento da porcentagem de área inclinada.

## 7. Conclusão

Este trabalho apresenta um procedimento numérico, baseado nos métodos de elementos finitos e de volumes finitos, desenvolvido para a análise termo-hidrodinâmica de mancais axiais de sapatas fixas inclinadas, do tipo setor circular. A equação de Reynolds, modelada por elementos finitos, e a equação de energia, modelada por meio de um procedimento de volumes finitos em coordenadas generalizadas, são resolvidas por meio de um processo iterativo para o cálculo dos campos de pressão hidrodinâmica e de temperatura do filme lubrificante. Um procedimento de perturbação linear é aplicado sobre a equação de Reynolds para permitir a determinação dos coeficientes de força de mancais axiais. Os resultados apresentados não somente mostram que o procedimento desenvolvido é capaz de reproduzir as predições para o campo de temperatura obtidas por outros métodos, mas também pode servir para o estudo das características estáticas e dinâmicas de desempenho de mancais considerando os efeitos da dissipação viscosa do filme fluido. A análise do comportamento de um mancal axial sob diferentes condições de operação mostra o efeito positivo da refrigeração externa do fluido lubrificante sobre a capacidade de carga e coeficientes dinâmicos de força de mancais de sapatas fixas inclinadas.

## 5. Referências

- Barros, P.J.B., 2001, “Análise Termo-Hidrodinâmica de Mancais Axiais de Turbomáquinas Hidráulicas”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- Barros, P.J.B. e Faria, M.T.C., 2001, “Análise de Coeficientes de Força de Mancais Hidrodinâmicos Axiais”, Anais do XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlândia, Brasil, pp. 1-10.
- Faria, M. T. C., 1995, “Analysis of Some Aspects of Hydrodynamic Thrust Pad Bearing Performance using a Finite Element Formulation”, Research notes, Texas A&M University, College Station, TX, USA.

- Heshmat, H. e Pinkus, O., 1986, "Mixing Inlet Temperatures in Hydrodynamic Bearings", ASME Journal of Tribology, vol. 108, pp. 231-248.
- Kim, K. W., Tanaka, M. e Hori, Y., 1983, "A Three-dimensional Analysis of Thermohydrodynamic Performance of Sector-shaped, Tilting-pad Thrust Bearing", ASME Journal of Lubrication Technology, vol. 105, pp. 406-413.
- Lund, J. W., 1987, "Review of the Concept of Dynamic for Fluid Film Journal Bearings", ASME Journal of Tribology, vol. 109, pp. 37-41.
- Maliska, C., 1995, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional – Fundamentos e Coordenadas Generalizadas", LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, Brasil.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill, New York, USA.
- Pinkus, O., 1984, "Anisothermal Fluid Films in Tribology", Israel Journal of Technology, vol. 22, pp. 121-141.
- Pinkus, O., 1990, "Thermal Aspects of Fluid Film Tribology", ASME Press., New York, USA.
- Pinkus, O. e Sternlicht, B., 1961, "Theory of Hydrodynamic Lubrication", McGraw-Hill, New York, USA.
- Sternlicht, B., 1957, "Energy and Reynolds Considerations in Thrust Bearing Analysis", Conf. on Lubrication and Wear, IMechE Publ., London, UK, pp. 28-38.
- Tanaka, M., 2000, "Recent Thermohydrodynamic Analyses and Designs of Thick-Film Bearings", Proc. Instn. Mech. Engrs., Part J : Journal of Engineering Tribology, vol. 212, n° J1, pp.107-122.
- Valle, R. M. 1995, "Escoamento Laminar em Placas de Orifício – Análise Teórica e Experimental em Regime Permanente e Transiente", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil.
- Wilson, W. R. D., 1998, "A Framework for Thermohydrodynamic Lubrication Analysis", ASME Journal of Tribology, vol. 120, no. 2, pp. 399-405.

## A NUMERICAL PROCEDURE BASED ON THE FINITE ELEMENT AND FINITE VOLUME METHODS FOR THE THERMOHYDRODYNAMIC LUBRICATION ANALYSIS OF THRUST BEARINGS

### Paulo José Brüzzi Barros

ENERG POWER Ltda.

Rua Desembargador Drumond 41, 5° Andar – Bairro dos Funcionários

CEP 30220-030, Belo Horizonte, MG, Brasil

[pbruzzi@terra.com.br](mailto:pbruzzi@terra.com.br)

### Marco Túlio Corrêa de Faria

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627.

CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

[mtfaria@dedalus.lcc.ufmg.br](mailto:mtfaria@dedalus.lcc.ufmg.br)

### Ramon Molina Valle

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627.

CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

[ramon@vesper.demec.ufmg.br](mailto:ramon@vesper.demec.ufmg.br)

*Abstract.. A computational procedure based on the finite element and finite volume methods is developed for the thermohydrodynamic lubrication analysis of sector shaped, tapered-land thrust bearings. The Galerkin weighted residual method is employed in the finite element procedure for the Reynolds equation. A finite volume scheme using generalized coordinates is used in the solution of the energy equation for the thin oil film. A linearized perturbation procedure is applied on the Reynolds equation to render the zeroth- and first-order lubrication equations, which permit the computation of the bearing-load capacity and the bearing linearized dynamic force coefficients for different operating conditions. The numerical prediction of the hydrodynamic pressure and temperature fields within the oil film is carried out iteratively under steady-state conditions. Performance characteristic curves show the influence of the viscous dissipation and of the geometric and operating parameters on the thrust bearing behavior in thermohydrodynamic lubrication regime. The validation of the computational hybrid procedure is performed by comparing the predicted results with data available in the technical literature.*

**Keywords:** Thermohydrodynamic Lubrication, Finite Element Method, Control Volume Method, Thrust Bearings