

UN ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE TEMPERATURA Y VELOCIDAD EN EL VÉRTICE DE UNA CAVIDAD CON MEDIO POROSO

Luiz Roberto Carrocci

FEG - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
UNESP - Universidade Estadual Paulista
R. Ariberto Pereira da Cunha, 333 - CEP 12500-000 - Guaratinguetá, SP, Brasil
Tel: (012) 5252800 ramales, 229 e 230 Fax.: (012)5252466
carrocci@feg.unesp.br

Edgar Paz Pérez

FEG - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
UNESP - Universidade Estadual Paulista
R. Ariberto Pereira da Cunha, 333 - CEP 12500-000 - Guaratinguetá, SP, Brasil
Tel: (012) 5252800 ramales, 229 e 230 Fax.: (012)5252466
edgarpape@yahoo.es

Alonso Bernabé Aguirre Reto

FEG - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
UNESP - Universidade Estadual Paulista
R. Ariberto Pereira da Cunha, 333 - CEP 12500-000 - Guaratinguetá, SP, Brasil
Tel: (012) 5252800 ramales, 229 e 230 Fax.: (012)5252466
alonso@feg.unesp.br

RESUMEN: *El siguiente es un artículo en el que se trata de hallar los perfiles de temperatura y de velocidad en un medio poroso contenido en el vértice entre dos placas: la primera caliente en posición vertical y la otra fría en posición horizontal. El fluido contenido en el medio poroso, está inicialmente frío y en reposo y debido al contacto con la placa vertical caliente aumenta su temperatura y empieza a ascender por diferencia de masas específicas, de esta manera se tiene en cada punto y en cada instante, diferentes temperaturas y velocidades. Para la solución del problema se parte de las ecuaciones generales de cantidad de movimiento, de energía y de continuidad, realizando consideraciones y adimensionalizaciones adecuadas, se llega a las ecuaciones gobernantes de este particular fenómeno; estas ecuaciones son resueltas por el método de diferencias finitas, através de la aplicación de un programa en lenguaje Delphi desarrollado específicamente para ello. Este estudio atiende específicamente, la región comprendida en un vértice, normalmente no analizado en los estudios realizados para análisis del comportamiento de fluidos en cavidades.*

Palabras clave: *Medio poroso, mecánica de fluidos, convección natural, programación, métodos numéricos.*

1.- Introducción

Los problemas de transferencia de calor tienen gran aplicación en los procesos industriales, especialmente en el diseño de equipos donde hay intercambio de energía térmica; pero los problemas de transferencia de calor, así como todos los problemas reales de ingeniería, no se estudian aisladamente, mas bien están relacionados con otros campos. La transferencia de calor está relacionada con la termodinámica y la mecánica de fluidos. Un fenómeno que involucra tanto la transferencia de calor y la mecánica de fluidos, es la convección natural, principalmente cuando se trabaja con campos de velocidades en espacios pequeños y con bajas velocidades.

En este trabajo se trata de hallar los perfiles de temperatura y velocidad de un fluido que está contenido en un medio poroso, el cual a su vez está comprendido entre dos paredes, una fría y la otra caliente. El fluido está inicialmente frío y en reposo y debido al contacto con la pared vertical caliente, aumenta su temperatura y empieza a ascender por diferencia de masas específicas; de esta manera se forman dos campos, uno de velocidad y otro de temperatura.

La línea de investigación que aquí se presenta, se inicia con el trabajo de Carnahan (1969) sobre modelamiento de un fenómeno de convección natural de un fluido contenido entre dos placas. Posteriormente Carrocci, Aguirre y Paz (2001) presentan un modelamiento de convección natural entre dos placas conteniendo un medio poroso; para este caso se usaron propiedades físicas globales del medio poroso. En el presente trabajo se amplía la investigación incluyendo un análisis pormenorizado de las propiedades del fluido y del material sólido que constituyen el medio poroso, para ello se parte de las ecuaciones de transferencia de calor para medios porosos proporcionados por Nield e Bejan (1992).

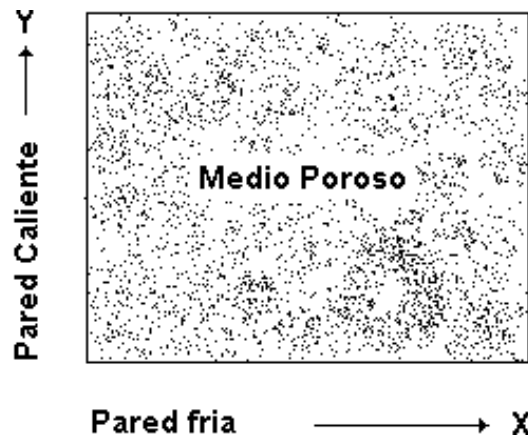


Figura 1.- Sistema de estudio.

2. Ecuaciones Generales

Para obtener el modelo matemático que gobierna este fenómeno, se parte de las ecuaciones generales de Conservación de la Cantidad de Movimiento, de la Energía y de Continuidad, expresadas para un medio poroso conteniendo un fluido (Nield e Bejan, 1992). Estas ecuaciones se simplifican haciendo las consideraciones y adimensionalizaciones adecuadas para este caso, obteniéndose así las ecuaciones diferenciales particulares que describen el modelo matemático de este fenómeno.

2.1. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en un medio poroso:

En estas ecuaciones sólo se han tomado en cuenta los términos que corresponden al eje Y, ya que las únicas fuerzas causantes del movimiento son: el empuje arquimediano y la gravedad, las cuales actúan en el eje Y. Debe notarse también que en esta ecuación aparecen dos términos que no están incluidos en la ecuación de Navier-Stokes y son: el término de Darcy $-(\mu/k)v$, que toma en cuenta los efectos del medio poroso en la velocidad del fluido y en el campo de temperaturas. El otro término $\rho_f g \beta (T_f - T_\infty)$ corresponde al empuje arquimediano, el cual se produce debido a la variación de volumen específico del fluido, causado por el calentamiento de éste.

En esta ecuación se considera que la viscosidad no varía con la temperatura, esto es válido para diferencias de temperatura menores de 50 °C (Schlichting, 1972).

Debe notarse también que en esta ecuación así como en las ecuaciones de energía y conservación de la masa, aparece la variable ϕ , que representa la porosidad del medio, esto es, el cociente entre el volumen de vacío y el volumen total del medio.

$$\rho_f \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) = \frac{\mu}{\phi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} + \rho_f g \beta (T_f - T_\infty) - \frac{\mu}{K} v \quad (1)$$

Donde:

- u : Componente de la velocidad en el eje x.
- v : Componente de la velocidad en el eje y.
- w : Componente de la velocidad en el eje z.
- T_f : Temperatura del fluido caliente.
- T_∞ : Temperatura inicial del fluido.
- P : presión del fluido.
- ρ_f : Masa específica del fluido.
- μ : Viscosidad absoluta del fluido.
- ϕ : Porosidad.
- K : Permeabilidad
- β : Coeficiente de dilatación volumétrico.
- g : Aceleración de la gravedad.

Considerando que:

- No hay variación en Z
- El fluido es incompresible para las condiciones presentes en este trabajo.
- El movimiento del fluido no es forzado
- $\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \cong 0$, ya que el orden de grandeza de: $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$

Usando estas consideraciones se obtiene la siguiente ecuación:

$$\rho_f \left(A_1 \frac{\partial v}{\partial t} + A_2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) = \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho_f \cdot g \cdot \beta (T_f - T_\infty) - \frac{\mu}{K} v \quad (2)$$

Donde: $A_1 = 1/\varphi$ $A_2 = 1/\varphi^2$

2.2. Ecuación de conservación de la energía en un medio poroso:

En la ecuación de energía para un medio poroso, se considera que una partícula de fluido está en equilibrio térmico con la partícula sólida que está en contacto con ella, por tanto se asume que la conducción de calor en las fase sólida y en la fase del fluido se dan en paralelo, ya que no hay transferencia de calor entre el sólido y el fluido (Niels, 1992). En esta ecuación también se considera que la conductividad térmica, la masa específica y el calor específico de los materiales no varían con la temperatura. Los subíndices m, s y f significan medio poroso, sólido y fluido respectivamente.

$$\left(\rho_m \cdot C_m \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f C_f \left(u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} + w \frac{\partial T_f}{\partial z} \right) = \lambda_m \left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} \right) + q \quad (3)$$

Siendo:

$$(\rho_m C_m) = (1 - \varphi) \rho_s C_s + \varphi \cdot \rho_f C_f \quad (4)$$

$$\lambda_m = (1 - \varphi) \lambda_s + \varphi \cdot \lambda_f \quad (5)$$

Donde:

- u : Componente de la velocidad en el eje x.
- v : Componente de la velocidad en el eje y.
- w : Componente de la velocidad en el eje z.
- T_f : Temperatura del fluido caliente.
- ρ_f : Masa específica del fluido.
- ρ_s : Masa específica del sólido.
- ρ_m : Masa específica de medio poroso.
- C_f : Calor específico del fluido a presión constante.
- C_s : Calor específico del sólido.
- C_m : Calor específico del medio poroso.
- λ_f : Conductividad térmica del fluido.
- λ_s : Conductividad térmica del sólido.
- λ_m : Conductividad térmica del medio.
- q : Factor de generación interna de calor.
- φ : Porosidad.

Considerando que:

- No hay variación en Z
- Se desprecia la transferencia de calor en el eje Y
- Se desprecia el calor producido internamente por rozamiento

$$\text{Haciendo : } C_1 = \rho_s / \rho_f \quad C_2 = C_s / C_{pf} \quad C_3 = \lambda_s / \lambda_f$$

Las ecuaciones 3, 4, 5, quedan como:

$$A_3(\rho_f C_f) \frac{\partial T_f}{\partial t} + \rho_f C_f \left(u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} \right) = A_4 \lambda_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$A_3 = (\rho_m C_m) = (1 - \phi) C_1 C_2 + \phi \quad (7)$$

$$A_4 = \lambda_m = (1 - \phi) C_3 + \phi \quad (8)$$

2.3. Ecuación de conservación de la masa en un medio poroso

$$\frac{\partial(\rho_f u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_f v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_f w)}{\partial z} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

Considerando:

- No hay variación en Z
- Que el fluido es incompresible para las condiciones presentes en este trabajo.

Utilizando estas consideraciones se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

Condiciones iniciales y de contorno:

$$\begin{array}{llll} y = 0 & \Rightarrow & u = 0 & v = 0 & T_f = T_\infty \\ x = 0 & \Rightarrow & u = 0 & v = 0 & T_f = T_p \\ x = \infty & \Rightarrow & u = 0 & v = 0 & T_f = T_\infty \\ t = 0 & \Rightarrow & u = 0 & v = 0 & T_f = T_\infty \end{array}$$

Donde:

T_p : Temperatura de la placa vertical.

T_f : Temperatura del fluido caliente.

T_∞ : Temperatura inicial del fluido.

3. Adimensionalización

Sea:

L = longitud de la placa

t_∞ = tiempo que demora el fluido en ascender desde la placa horizontal hasta la parte superior de la placa vertical.

$$u_\infty = \frac{L}{t_\infty}$$

Haciendo:

$$U = \frac{u}{u_\infty}, \quad V = \frac{v}{u_\infty}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_\infty}, \quad T = \frac{T_f - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

4. Ecuaciones particulares

En las ecuaciones 2, 6, 7, 8 y 10 Las variables ordinarias: u, v, x, y, t, t_f son remplazadas como funciones de sus correspondientes variables adimensionales: U, V, X, τ y T. Realizando operaciones algebraicas y simplificando se obtienen las siguientes ecuaciones y condiciones de contorno adimensionales que gobiernan este particular fenómeno:

Ecuación de la Conservación de Cantidad de Movimiento Adimensionalizada

$$A_1 \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} \right) + A_2 \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = \frac{A_2}{Re} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{Gr}{Re^2} T - \frac{1}{Re} \frac{L^2}{k} V \quad (11)$$

Ecuación de Conservación de la Energía Adimensionalizada

$$A_3 \frac{\partial T}{\partial \tau} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{A_4}{Re Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \quad (12)$$

Ecuación de Continuidad adimensionalizada

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Y=0 & \Rightarrow U=0 \quad V=0 \quad T=0 \\ X=0 & \Rightarrow U=0 \quad V=0 \quad T=1 \\ X=\infty & \Rightarrow U=0 \quad V=0 \quad T=0 \\ \tau=0 & \Rightarrow U=0 \quad V=0 \quad T=0 \end{aligned}$$

Donde:

- Re* : Número de Reynolds.
- Pr* : Número de Prandtl.
- Gr* : Número de Grashof.

5. Solución Numérica

Para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas, se ha hecho uso del método de las diferencias finitas (método explícito). para ello se ha dividido el espacio de estudio X-Y en una malla de 10x10, en la cual se ha tomado $Y_{max} = 100$ y $X_{max} = 25$ como el correspondiente a X_{∞} .

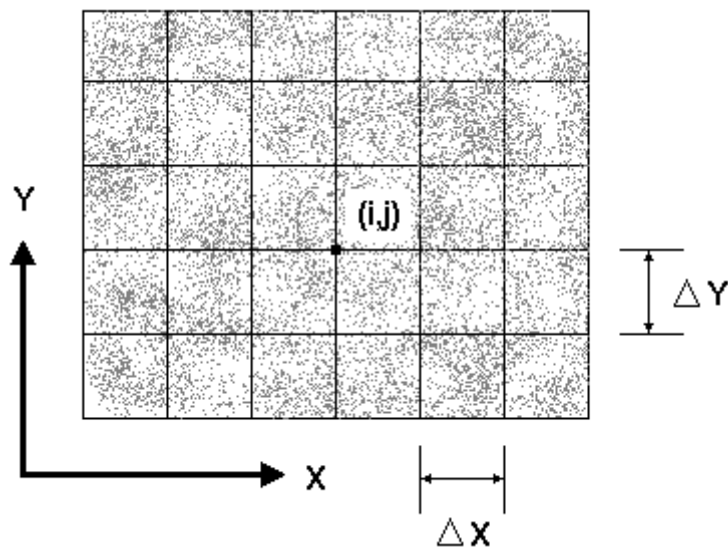


Figura. 2.- Malla para análisis numérico

Siendo k el índice referido al tiempo, aplicando las diferencias finitas al sistema de ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el fenómeno, se obtienen las siguientes ecuaciones:

Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento:

$$A_1 \left(\frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k}}{\Delta \tau} \right) + A_2 \left(U_{i,j,k} \frac{V_{i,j,k} - V_{i-1,j,k}}{\Delta X} - V_{i,j,k} \frac{V_{i,j+1,k} - V_{i,j,k}}{\Delta Y} \right) =$$

$$\frac{Gr}{Re} T_{i,j,k+1} + \frac{A_2}{Re} \left(\frac{V_{i,j+1,k} - 2V_{i,j,k} + V_{i,j-1,k}}{\Delta X^2} \right) - \frac{1}{Re} \frac{L^2}{K} V_{i,j,k} \quad (14)$$

Ecuación de Conservación de Energía

$$A_3 \left(\frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{\Delta \tau} \right) + \left(U_{i,j,k} \frac{T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k}}{\Delta X} - V_{i,j,k} \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}}{\Delta Y} \right) = \frac{1}{Re} \frac{A_4}{Pr} \left(\frac{T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}}{\Delta X^2} \right) \quad (15)$$

Ecuación de Conservación de la Masa

$$\frac{U_{i,j,k+1} - U_{i-1,j,k}}{\Delta X} + \frac{V_{i,j,k+1} - V_{i-1,j,k}}{\Delta Y} = 0 \quad (16)$$

Estas ecuaciones fueron resueltas usando un programa computacional desarrollado en lenguaje Delphi, código específicamente hecho para este caso. Las ecuaciones fueron acopladas, primero, calculándose el campo de temperaturas a través de la ecuación de conservación de la energía y luego el campo de velocidades "U" y luego "V", como se muestra en el digrama de flujos presentado a continuación (figura 6).

Los datos iniciales son ingresados directamente en el código del programa, estableciéndose valores adecuados para las constantes iniciales. El método de solución se mostró estable y convergente para el problema en cuestión.

Para evaluar el programa se ha utilizado un fluido con número de Prandtl = 0,7, número de Reynolds = 5 y número de Grashof = 2,04. Estos dos ultimos han sido elegidos teniendo en cuenta que éste es un fenómeno de convección natural con velocidades relativamente bajas. Los perfiles fueron graficados para la altura media de la placa y para cuando los campos de temperatura y velocidad han llegado al estado permanente.

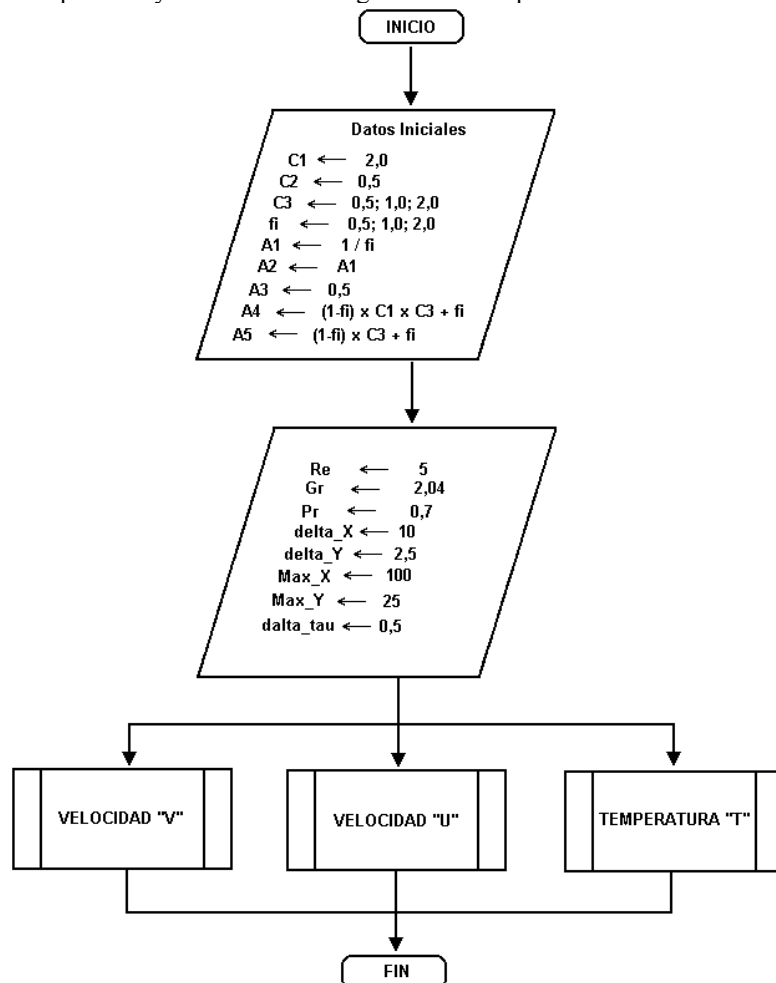


Figura 3.- Diagrama de flujos del programa

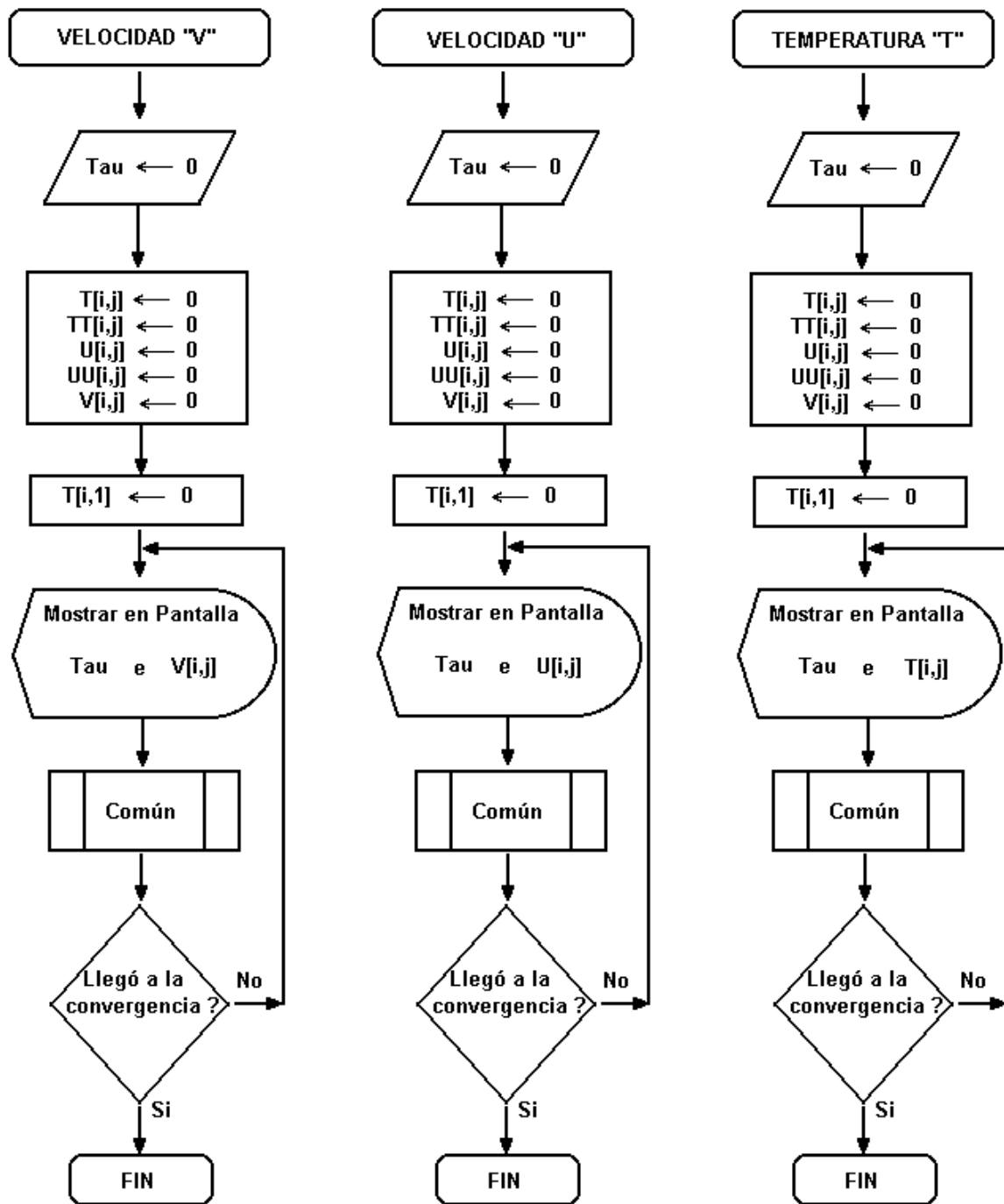


Figura 4.- Diagrama de flujo de los bloques Velocidad "U", Velocidad "V" y Temperatura

6. Resultados

- De las figuras 6 y 7 puede apreciarse claramente que, el incremento de la porosidad ϕ , produce un incremento en la magnitud de los perfiles de velocidad y una disminución en los perfiles de temperatura.
- Se observa, que el aumento de la relación de conductividades ($C_3 = \text{conductividad del sólido entre conductividad del fluido}$), trae como consecuencias un aumento de la magnitud de los perfiles de velocidad y de temperatura, ver figuras 8 y 9.
- De las figuras 3, 4, 5 y 6 puede observarse que la variación de los perfiles de velocidad y temperatura son mayores con la variación de la porosidad que con la variación de la relación de conductividades.

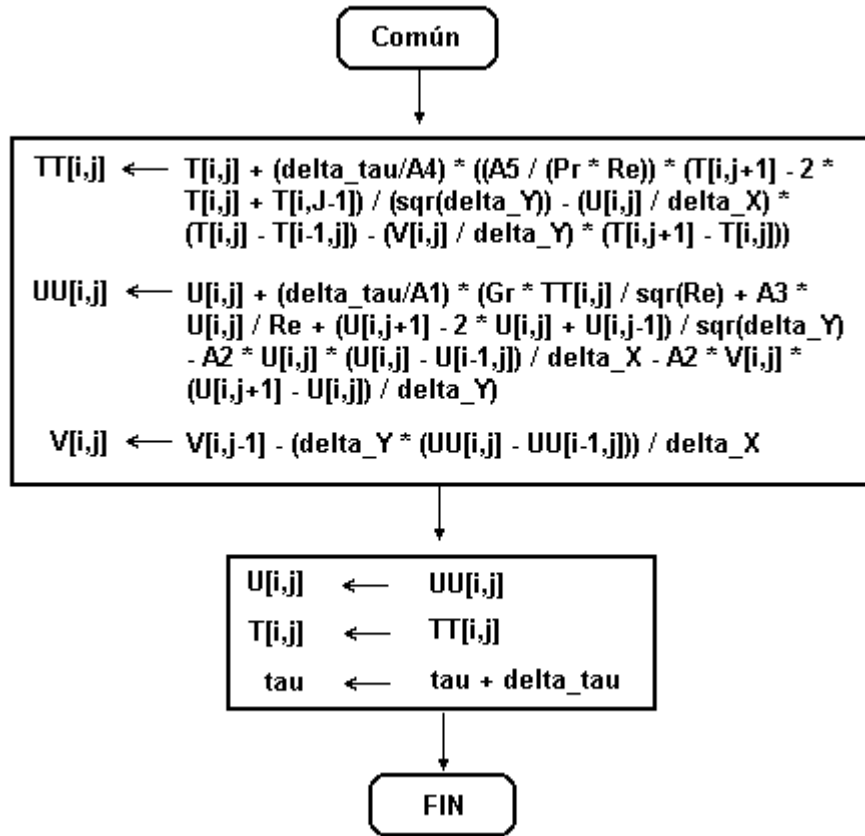


Figura 5.- Diagrama de flujo del bloque "Común".

PERFILES DE VELOCIDAD EN FUNCIÓN DE LA POROSIDAD

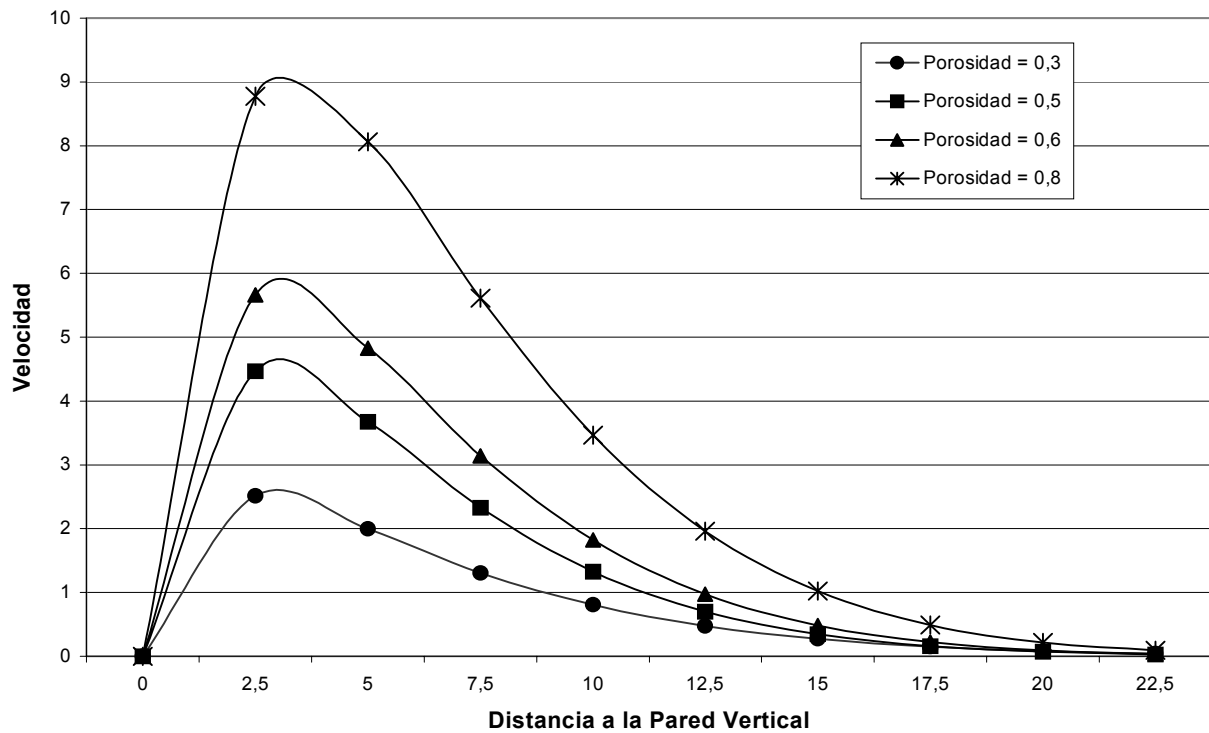


Figura 6. Variación de los perfiles de velocidad en función de la porosidad. Siendo: $C_1 = 2,0$; $C_2 = 0,5$; $C_3 = 1,0$; $L^2/k = 0,5$

PERFILES DE TEMPERATURA EN FUNCIÓN DE LA POROSIDAD

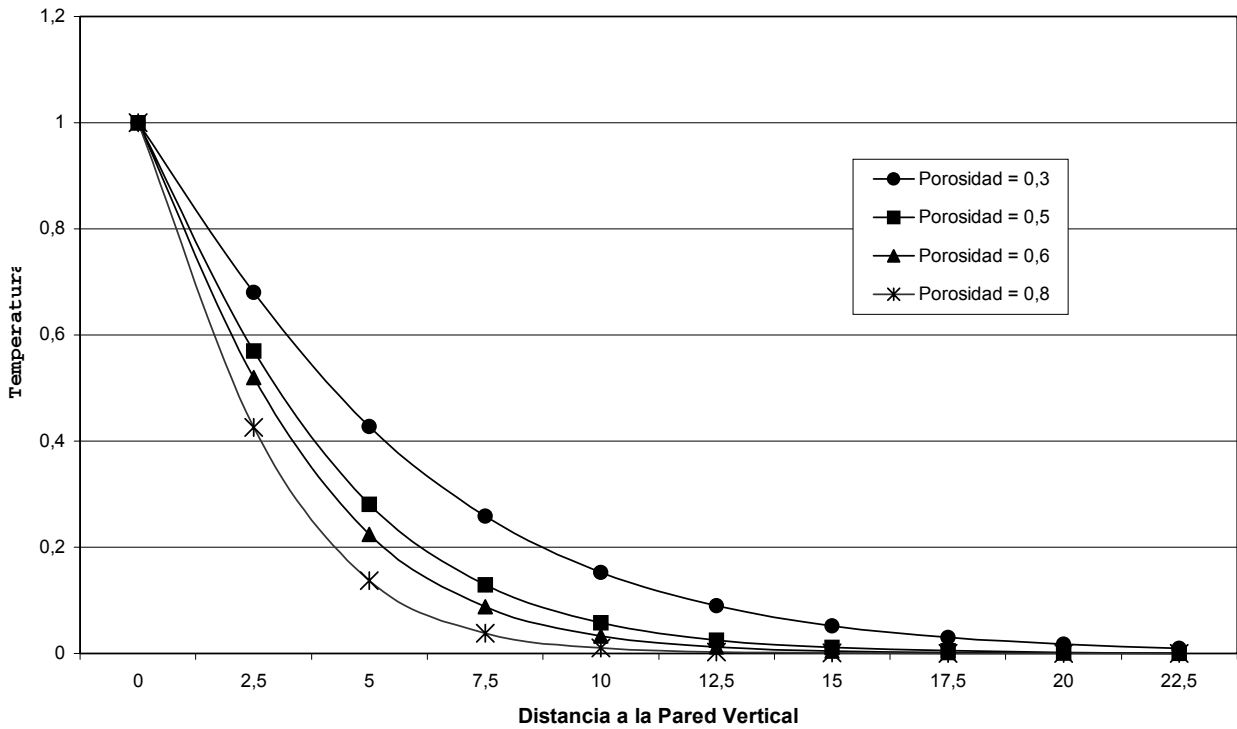


Figura 7. Variación de los perfiles de temperatura en función de la porosidad. Siendo $C_1 = 2,0$; $C_2 = 0,5$; $C_3 = 1,0$; $L^2/k = 0,5$.

PERFILES DE VELOCIDAD EN FUNCIÓN DE LA RELACIÓN DE CONDUCTIVIDADES (C3)

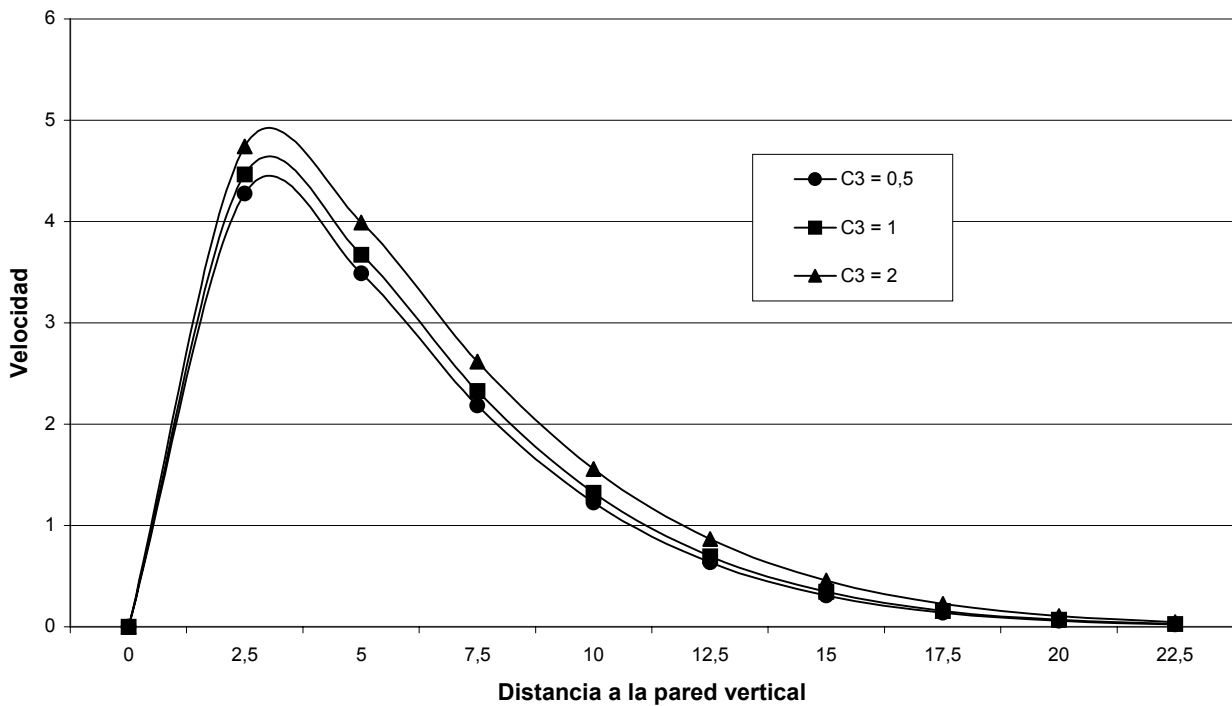


Figura 8. Variación de los perfiles de velocidad en función de la relación de conductividades. Siendo: $C_1 = 2,0$; $C_2 = 0,5$; $\varphi = 0,5$; $L^2/k = 0,5$.

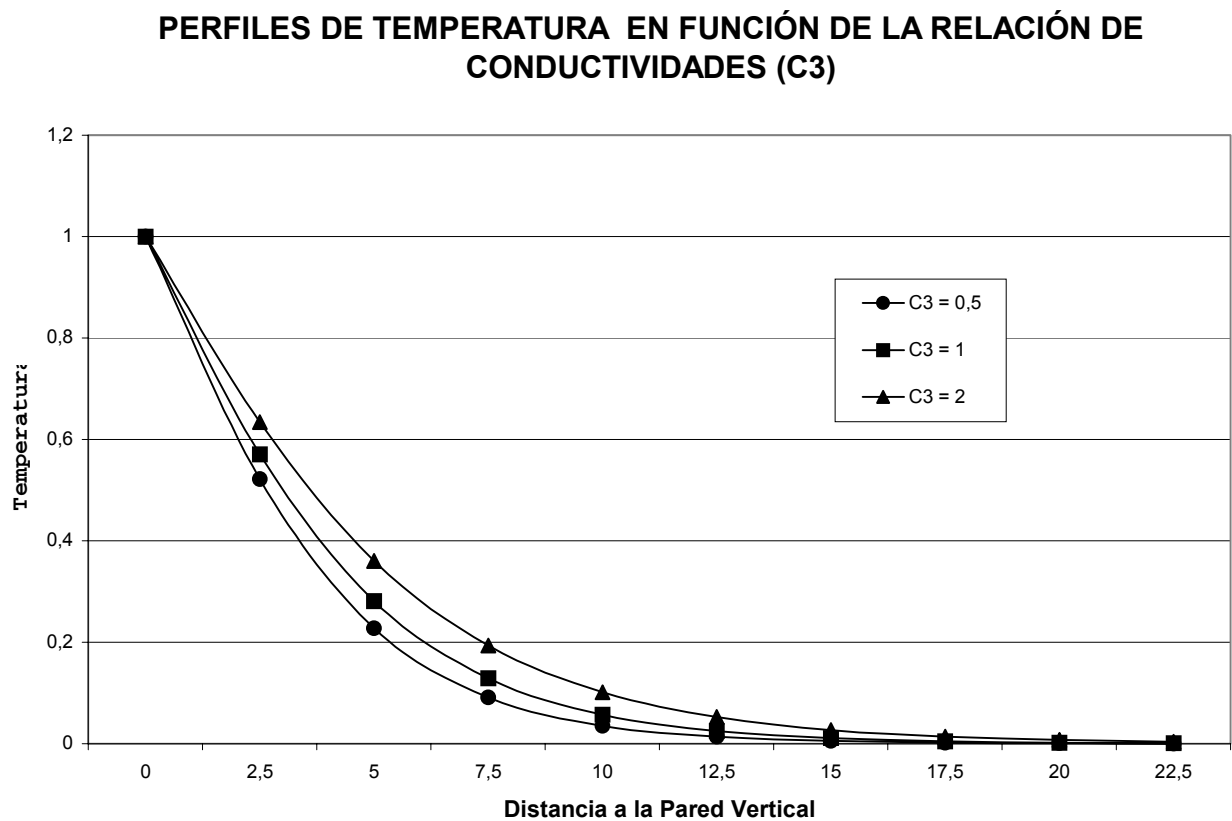


Figura 9. Variación de los perfiles de temperatura en función de la relación de conductividades. Siendo: $C_1 = 2,0$; $C_2 = 0,5$; $\varphi = 0,5$; $L^2/k = 0,5$.

7. Conclusiones

La porosidad φ , tiene gran influencia sobre los campos de temperatura y velocidad, como puede verse en las figuras 6 y 7.

En cada punto cuando el medio es más poroso, la velocidad de ascenso del fluido es mayor y la temperatura disminuye, no prevalece la conducción para el medio solido. esto se debe a que al ser el medio más poroso, el fluido tiene mas facilidad para moverse, llevando consigo el calor que le és transmitido, este efecto convectivo no permite que halla acumulación de calor, disminuyendo asi la temperatura.

La variación de la relación de conductividades influye en los perfiles de velocidad y temperatura, aunque puede observarse que su influencia es menor que la ejercida por la porosidad, (ver figuras 6, 7, 8, 9).

El aumento de la relación de conductividades, provoca un aumento de la velocidad de ascenso del fluido y de la temperatura, esto debido a que al prevalecer la conducción para el medio solido, aumenta la temperatura del fluido, se incrementa el empuje arquimediano y en consecuencia aumenta la velocidad de escenso del fluido.

7. Agradecimientos

Los autores quieren expresar su agradecimiento a la "Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior" - CAPES, al "Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico" -CNPq y al "departamento de Energia de la Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - FEG, Universidade Estadual Paulista - UNESP", sin cuyo apoyo hubiera sido imposible la realización de este modesto trabajo.

7 Referencias

Bejan, Adrian, 1995, "Convection Heat Transfer", Second Edition, New York: John Willey & Sons Inc, 619 pp.
 Burmeister, Louis, C., 1993, "Convective Heat Transfer", Second Edition, New York: John Willey & Sons Inc, 623 pp.
 Cantú, M., 2000, "Delphi 5", Madrid: Ediciones Anaya Multimedia 928.
 Carnahan B, Luther H.A, 1969, "Applied numerical methods". New York: Edit. J. Wiley, 604 pp.

- Carroci, L.R., Aguirre, A. B., Paz, P. E., 2001, "Convección natural en un vértice formado por una placa vertical caliente y una placa horizontal fría, conteniendo un medio poroso", Anais da Jornada 2001 de Iniciação científica e Pós-graduação da FEG, Guaratinguetá, São Paulo.
- Cebal, T., Bradshaw, P., 1984, "Physical and computational aspects of convective heat transfer", New York: Springer Verlag, 487 pp.
- Chapra, S.C., Canale R.P., 1985, "Numerical methods for engineers", second edition, New York: Mc Graw-Hill, 839 pp.
- Claudio D.M., Marins J.M., 1984, "Calculo numérico computacional", 2. ed. São Paulo: Atlas, 464 pp.
- Holman, J. P., 1983, "Transferência de calor", São Paulo: edit. Mac Graw Hill do Brasil 689 pp.
- Nield, D.A., Bejan, A., 1992, "Convection in porous media", New York: Springer Verlag, 408 pp.
- Özisik, M. Necati., 1994, "Finite Difference Methods in Heat Transfer, Boca Raton: CRC Pres, 412 pp.
- Schlichting, 1972, "Teoría de la capa límite", Bilbao: Ediciones Urmo, 774 pp.

A STUDY OF THE VARIATION OF THE TEMPERATURE AND THE SPEED IN THE VERTEX OF A CAVITY WITH POROUS MEDIA

Luiz Roberto Carrocci

Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - FEG
Universidade Estadual Paulista - UNESP
R. Ariberto Pereira da Cunha, 333 - CEP 12500-000 - Guaratinguetá, SP, Brasil
Tel: (012) 5252800 ramales, 229 e 230 Fax.: (012)5252466
carrocci@feg.unesp.br

Edgar Paz Pérez

Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - FEG
Universidade Estadual Paulista - UNESP
R. Ariberto Pereira da Cunha, 333 - CEP 12500-000 - Guaratinguetá, SP, Brasil
Tel: (012) 5252800 ramales, 229 e 230 Fax.: (012)5252466
edgarpape@yahoo.es

Alonso Bernabé Aguirre Reto

Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - FEG
Universidade Estadual Paulista - UNESP
R. Ariberto Pereira da Cunha, 333 - CEP 12500-000 - Guaratinguetá, SP, Brasil
Tel: (012) 5252800 ramales, 229 e 230 Fax.: (012)5252466
alonso@feg.unesp.br

Abstract. *The article's objective is to find the profiles of temperature and speed of a fluid in a given system, the vertex of the space understood between two plates. The system is constituted by a hot vertical plate and a cold horizontal plate, full with a porous media one that contains a fluid that is initially cold and in stationary. For the solution of the problem its leaves of the equations of quantity of movement, of energy and of continuity. carrying out the simplifications and appropriate dimensionless, you arrives to the ruling equations of the phenomenon; these equations are solved by the method of finite differences, through of the application of a program in language Delphi developed specifically for this case.*

Keywords. Porous Media, mechanics of fluids, natural Convection, programming, numerical methods.