

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO NÃO-PERMANENTE EM TORNO DE CILINDROS ELÍPTICOS VIA TRANSFORMAÇÃO DE JOUKOWSKY.

Flávia dos Reis Carreiro

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, EE/COPPE/UFRJ
Cx.P. 68503 – 21945-970 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
flavia@serv.com.ufrj.br

Gustavo César Rachid Bodstein

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, EE/COPPE/UFRJ
Cx.P. 68503 – 21945-970 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
gustavo@serv.com.ufrj.br

Resumo. Neste trabalho investiga-se o escoamento não-permanente, incompressível e bidimensional em torno de cilindros elípticos. O escoamento em torno do cilindro elíptico no plano físico é mapeado em um escoamento em torno de um cilindro circular no plano computacional através da transformação conforme de Joukowski. O Método de Vórtices Discretos é utilizado para calcular o escoamento em torno do cilindro circular. A dinâmica da esteira do corpo é simulada com base no algoritmo de decomposição do operador convecção-difusão da equação de transporte de vorticidade, onde a convecção é realizada através de um esquema lagrangeano de primeira ordem e a difusão através do Método de Avanço Randômico. O Teorema do Círculo é utilizado para impor a condição de impenetrabilidade, enquanto que a condição de não-escorregamento é satisfeita em pontos específicos da superfície do cilindro. As forças aerodinâmicas são calculadas usando a fórmula estendida de Blasius para escoamentos não-permanentes. Resultados obtidos para escoamentos com alto número de Reynolds são comparados, mostrando boa concordância.

Palavras chave: Método de Vórtices, Transformação Conforme, Cilindro Elíptico, Aerodinâmica.

1. Introdução

O estudo do movimento relativo entre um corpo sólido e o fluido em que está imerso desperta grande interesse científico, devido, principalmente à ocorrência de fenômenos como a separação e a formação de uma esteira viscosa à jusante. Por outro lado, existe a necessidade de se desenvolver ferramentas adequadas e confiáveis para a obtenção das cargas aerodinâmicas, uma vez que este estudo encontra aplicação em vários problemas de engenharia.

Um dos mais importantes trabalhos analíticos a respeito do escoamento ao redor de um cilindro circular foi realizado por Sarpkaya (1963) no desenvolvimento de expressões gerais para os coeficientes de arrasto e sustentação incluindo os efeitos do escoamento incidente, dipolo, vórtices discretos e imagens. Posteriormente, Sarpkaya (1975) desenvolveu um modelo para escoamento não-viscoso e bidimensional através de uma placa inclinada utilizando elementos da Teoria Potencial e Transformação de Joukowski. Smith e Stansby (1987) desenvolveram um modelo numérico que analisa o escoamento em torno de cilindros circulares, onde a convecção dos vórtices é feita utilizando um esquema lagrangeano de vórtices em célula e a difusão é simulada utilizando o Método de Avanço Randômico. Este modelo também simula o escoamento em torno de corpos com seção não-circular através da aplicação de transformação conforme. São apresentados resultados para cilindros elípticos com razão entre eixos de 0,6 e 0,8, para ângulo de ataque nulo e igual a 60° . Nair e Sengupta (1997) investigaram numericamente, utilizando Método de Diferenças Finitas, o escoamento em torno de cilindros elípticos com razão entre eixos de 0,1 e 0,25, para Reynolds igual a 3000 e 10000 e ângulos de ataque de 10° , 12° e 30° , a partir da solução da equação de Navier-Stokes bidimensional, incompressível e não-permanente. Nakanishi *et al.* (1999) desenvolveram um modelo numérico que utiliza um método híbrido para simular o escoamento iniciado impulsivamente em torno de cilindros circulares e elípticos. Este modelo combina Método de Vórtices e Método de Elementos de Contorno com um algoritmo de produção de vorticidade específico para o esquema utilizado. Choi e Lee (2001) realizaram estudos experimentais do escoamento em torno de um cilindro elíptico localizado próximo a uma parede plana com proporção entre os eixos de 1:2. As distribuições de pressão ao longo da superfície do cilindro elíptico e da parede plana foram medidas para vários ângulos de ataque, e o perfil de velocidade atrás do cilindro também foi medido com anemometria de fio quente.

Musto Cabrera (1998) investigou numericamente o escoamento ao redor de um cilindro circular utilizando Método de Vórtices e Teorema do Círculo visando satisfazer de uma maneira simples e direta (procedimento não-iterativo), à condição de impenetrabilidade (componente normal da velocidade), e, simultaneamente, impondo a condição de escorregamento nulo (componente tangencial) em alguns pontos da superfície do corpo, servindo como principal referência para os estudos que originaram o presente método.

Este trabalho tem como objetivo calcular as cargas aerodinâmicas presentes em um perfil de Joukowski (cilindro elíptico) a partir do escoamento em torno de um cilindro circular utilizando transformação conforme e Método de Vórtices.

As equações básicas que governam o problema a ser estudado (e as características dos vórtices), bem como o método de vórtices e a transformação conforme utilizada, estão presentes na próxima seção, seguida pelo método numérico, os resultados obtidos e as conclusões.

2. Formulação Matemática

O problema a ser estudado é o escoamento com velocidade uniforme U , bidimensional em torno de um cilindro elíptico imerso em um fluido newtoniano, viscoso e incompressível, de massa específica ρ e viscosidade cinemática ν . O escoamento incide sobre o corpo segundo um ângulo de ataque α . A Figura. (1) ilustra o escoamento em estudo, onde c representa o eixo maior da elipse e t_{max} o eixo menor.

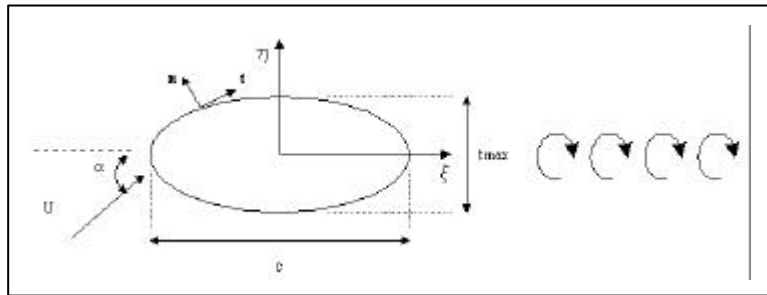


Figura 1. Escoamento uniforme incidindo sobre um cilindro elíptico segundo um ângulo de ataque α .

O movimento do fluido é governado pela equação da continuidade e da conservação da quantidade de movimento, que podem ser escritas na forma adimensional como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \mathbf{u} \tag{2}$$

sendo \mathbf{u} o vetor campo de velocidades, p o campo de pressão, $Re_c \equiv Uc/\nu$ o número de Reynolds baseado no eixo maior da elipse. Todas as grandezas nas Eqs. (1), (2) e nas equações a seguir foram adimensionalizadas por c e U . Sobre a superfície do corpo deve-se especificar a condição de aderência, que é expressa em termos das componentes normal e tangencial da velocidade. Neste caso, a condição de impenetrabilidade é dada por

$$u_n \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3a}$$

e a condição de escorregamento nulo por

$$u_t \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0 \tag{3b}$$

No infinito, o escoamento deve tender ao escoamento uniforme, ou seja,

$$|\mathbf{u}| \rightarrow 1 \tag{3c}$$

O cilindro elíptico é obtido utilizando-se a Transformação de Joukowski que estabelece a correspondência entre um círculo no plano transformado z e um perfil no plano físico \mathbf{z} através da Eq. (4), como pode ser observado na Fig.(2).

$$\mathbf{z} = z + \frac{a^2}{z} \tag{4}$$

onde $z = x + iy$, $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{h}$ e a é uma constante da transformação.

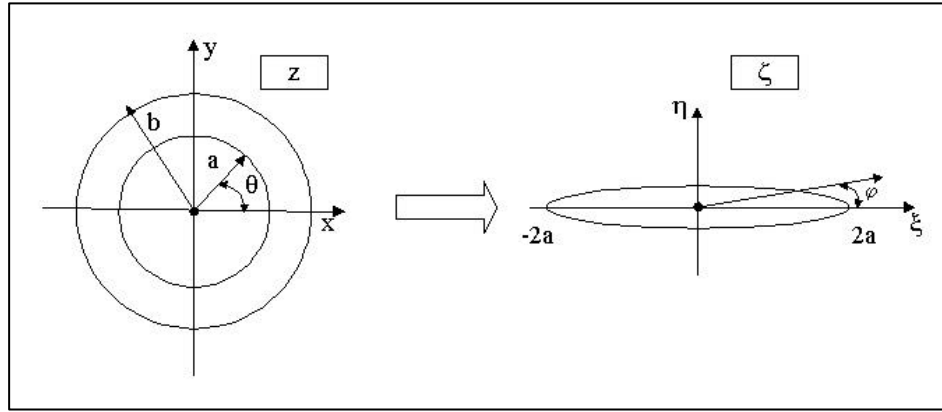


Figura 2. Transformação de um círculo em uma elipse.

Para um ponto $z = be^{iq}$ no círculo, o ponto correspondente no plano \mathbf{z} é dado por

$$\mathbf{x} = \left(b + \frac{a^2}{b} \right) \cos \mathbf{q} \quad (5a)$$

$$\mathbf{h} = \left(b + \frac{a^2}{b} \right) \text{sen } \mathbf{q} \quad (5b)$$

Conhecendo-se o valor da espessura da elipse desejada pode-se determinar o parâmetro e que representa a relação entre os eixos da elipse, $e = \text{eixo menor/eixo maior}$, isto é, $e = t_{\max}/c$. Em outras palavras, parâmetro e também representa a espessura máxima da elipse adimensionalizada por c . Para uma elipse, também podem ser definidos os seguintes parâmetros geométricos

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (6a)$$

$$\frac{c}{a} = 4 \sqrt{\frac{1}{1-e^2}} \quad (6b)$$

A dinâmica do movimento do fluido, governada pelas Eqs. (1) e (2) e as condições de contorno (3), pode ser calculada de forma mais conveniente substituindo-se as equações de Navier-Stokes pela equação de transporte de vorticidade, obtida tomando-se o rotacional da Eq. (2) e utilizando-se a equação da continuidade. No caso bidimensional, incompressível, esta equação é escalar, e pode ser expressa na forma

$$\frac{\mathcal{I}\mathbf{w}}{\mathcal{I}t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} = \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \mathbf{w} \quad (7)$$

onde \mathbf{w} é a única componente não-nula do vetor vorticidade (na direção normal ao plano do escoamento). Uma grande vantagem de se trabalhar com esta equação é a eliminação do termo de pressão, que sempre requer tratamento especial em métodos numéricos em geral.

A vorticidade presente no escoamento é modelada como uma nuvem de vórtices pontuais. Numericamente, o processo de geração de vorticidade é implementado de modo a satisfazer à condição de escorregamento nulo, e o teorema do círculo garante que a condição de impenetrabilidade seja satisfeita em toda a superfície do cilindro circular. O escoamento potencial em torno de um círculo imerso em um escoamento uniforme com ângulo de ataque α e N_v vórtices pontuais permite escrever o potencial complexo e a velocidade complexa como (Carreiro, 2002)

$$f(z) = \left(ze^{-i\alpha} + \frac{e^{i\alpha}}{z} \right) - \frac{i}{2\mathbf{p}} \sum_{k=1}^{N_v} \Gamma_k \ln(z - z_k(t)) + \frac{i}{2\mathbf{p}} \sum_{k=1}^{N_v} \Gamma_k \ln(z - z_{k_{im}}(t)) \quad (8)$$

$$q = \frac{df}{dz} = u - iv = \left(e^{-ia} - \frac{e^{ia}}{z^2} \right) - \frac{i}{2\mathbf{P}} \sum_{k=1}^{N_v} \frac{\Gamma_k}{z - z_k(t)} + \frac{i}{2\mathbf{P}} \sum_{k=1}^{N_v} \frac{\Gamma_k}{z - z_{k_{im}}(t)} \quad (9)$$

onde u e v são componentes de \mathbf{u} nas direções x e y , respectivamente; $i \equiv \sqrt{-1}$; $z \equiv x + iy$ é a posição de um ponto qualquer no plano z ; z_k e $z_{k_{im}} \equiv 1/\bar{z}_k$ são as posições dos vórtices de intensidade Γ_k e suas imagens no ponto inverso, respectivamente (a barra na equação denota complexo conjugado) e N_v é o número total de vórtices presentes no escoamento (excluindo suas imagens). Observe que as imagens no centro, prescritas pelo Teorema do Círculo (Milne-Thomson, 1955), foram desprezadas, uma vez que sua presença afeta a condição de contorno no infinito para um escoamento assimétrico em relação ao eixo x (Sarpkaya, 1989).

A velocidade induzida pelo escoamento em um vórtice n no plano \mathbf{z} calculada em função do escoamento no plano z com efeito do ângulo de ataque, é dada por

$$u_n - iv_n = \left[e^{-ia} - \frac{e^{ia}}{z_n^2} - \frac{i}{2\mathbf{P}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{N_v} \frac{\Gamma_k}{z_n - z_k} + \frac{i}{2\mathbf{P}} \sum_{k=1}^{N_v} \frac{\Gamma_k}{z_n - z_{k_{im}}} \right] \frac{(z_n + z_0)^2}{(z_n + z_0)^2 - (a/b)^2} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{i}{2\mathbf{P}} \Gamma_n \frac{(z_n + z_0)}{[(z_n + z_0)^2 - (a/b)^2]^2} \quad (10)$$

onde $z_0 \equiv x_0 + iy_0$ é a posição do centro do círculo de raio b .

As forças aerodinâmicas são obtidas a partir da Fórmula de Blasius generalizada para escoamento transiente (Milne-Thompson, 1955), a qual, aplicada ao problema em questão, se reduz a

$$C_D + iC_L = 2 \left(\frac{b}{c} \right) e^{ia} \sum_{k=1}^{N_v} \Gamma_k [(u_k + iv_k) - (u_{k_{im}} + iv_{k_{im}})] \quad (11)$$

3. Método Numérico

3.1. O Método de Vórtices

A solução para o problema proposto neste trabalho foi obtida com a utilização do Método de Vórtices Discretos (Hirata, 1991). Este método baseia-se na Eq. (7), e faz uso de um algoritmo de decomposição do operador diferencial convectivo-difusivo, na forma

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{w}}{\mathcal{D}t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} = 0 \quad (12a)$$

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{w}}{\mathcal{D}t} = \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \mathbf{w} \quad (12b)$$

A vorticidade no escoamento real é gerada na superfície do corpo de modo a satisfazer à condição de escorregamento nulo, Eq. (3b), e é, então, transportada por convecção e difusão, de acordo com a Eq. (7). O método de vórtices discretos representa a vorticidade por meio de vórtices pontuais, cujo transporte a cada instante de tempo é realizado em duas etapas. Na primeira, utiliza-se uma abordagem lagrangeana para descrever o processo de convecção, que é governado pela Eq. (12a). O movimento convectivo de cada vórtice é determinado ao se integrar a equação para sua trajetória

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}[\mathbf{x}(t), t] \quad (13)$$

onde \mathbf{u} é o vetor velocidade calculado pela lei de Biot-Savart no ponto onde o vórtice se encontra. Um esquema de Euler de primeira ordem foi utilizado na convecção e o processo de difusão viscosa, governado pela Eq. (12b), é modelado utilizando-se o método de avanço randômico (Lewis, 1991), onde o deslocamento randômico de cada vórtice nas direções x e y devido à difusão, \mathbf{D}_{x_d} e \mathbf{D}_{y_d} , é calculado a partir de

$$\Delta x_d = \Delta r \cos(\Delta \mathbf{q}) \text{ e } \Delta y_d = \Delta r \sin(\Delta \mathbf{q}) \quad (14)$$

onde \mathbf{D} and \mathbf{Dq} são definidos por

$$\Delta r = \left[4Re^{-1} \Delta t \ln(1/P) \right]^{1/2} \text{ e } \Delta q = 2pQ \quad (15)$$

Nas Eqs. (15), P e Q são números randômicos entre 0 e 1, obtidas da rotina ran2 de Press et al. (1989) para uma distribuição de probabilidade estatisticamente uniforme.

3.2. Vórtice de Lamb

Neste trabalho o vórtice de Lamb é utilizado para eliminar as singularidades existentes no campo de velocidade dos vórtices pontuais que modelam o campo de vorticidade.

O vórtice de Lamb possui distribuições de \mathbf{w} e u_q (componente tangencial da velocidade induzida pelo vórtice no sistema de coordenadas cilíndricas) e suas derivadas contínuas em todo o domínio, pois é solução da equação de difusão de vorticidade,

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial r} \right) \quad (16)$$

Para um vórtice potencial em $t=0$, a solução para este problema de decaimento de um vórtice pontual, (Kundu, 1990) é

$$\mathbf{w}(r,t) = \frac{\Gamma}{\rho \mathbf{s}^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\mathbf{s}^2}\right) \quad (17)$$

onde $\mathbf{s} = \sqrt{4\mathbf{u}}$. A velocidade induzida pelo vórtice de Lamb, com a distribuição de vorticidade acima é

$$u_q = \frac{\Gamma}{2\rho} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\mathbf{s}^2}\right) \right] \quad (18)$$

E o núcleo do vórtice de Lamb, \mathbf{s}_0 é definido como

$$\mathbf{s}_0 = 4,48364 \sqrt{\Delta t_c / Re_c} \quad (19)$$

3.3. Cálculo do Coeficiente de Pressão

O coeficiente de pressão é calculado sobre cada ponto da superfície do cilindro utilizado para a geração de novos vórtices em cada instante de tempo segundo o esquema abaixo:

- Escolher valor nulo para a pressão de referência $p_{ref} = 0$, já que C_p não depende deste parâmetro;
- Calcular p_m em todos os m pontos do cilindro utilizando a equação

$$p_m = p_{ref} + \frac{2}{\Delta t} \sum_{n=1}^m \Gamma_{v_n} \quad (20)$$

- Achar o ponto de pressão máxima (p_{max}) e fazer

$$p_s = p_{max} \quad \text{em} \quad n = n_{max}$$

- Calcular o coeficiente de pressão C_p para todos os m pontos do cilindro, somando-lhe o valor $(1-p_s)$ segundo a equação a seguir

$$C_{pm} = p_m + 1 - p_s \quad (21)$$

O coeficiente de pressão C_p obtido ao final de uma simulação é uma média no tempo do C_p em cada ponto calculado a partir do instante inicial. Para um ponto sobre a superfície do cilindro, o C_p médio no tempo é obtido como se segue

$$C_p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M C_{pi} \quad (22)$$

onde M é o número de passos de tempo contados a partir de $t = 0$.

3.4. O Algoritmo

A implementação numérica através do Método de Vórtices é feita de acordo com o seguinte algoritmo:

- 1) **Geração de vorticidade:** a cada instante de tempo, N novos vórtices são gerados no plano transformado (plano do círculo);
- 2) **Cálculo do coeficiente de pressão sobre o corpo:** o coeficiente de pressão é calculado em cada instante de tempo, para cada ponto situado na superfície do cilindro onde os N novos vórtices são gerados, sendo corrigidos para o plano físico;
- 3) **Cálculo das forças sobre o corpo:** os coeficientes de arrasto e sustentação são calculados usando a fórmula de Blasius;
- 4) **Mapeamento:** determina as coordenadas de cada vórtice no plano físico;
- 5) **Convecção dos vórtices:** a velocidade induzida pelo escoamento em cada vórtice é calculada, em cada instante de tempo, e o deslocamento dos vórtices devido à convecção é determinado no plano físico;
- 6) **Difusão dos vórtices:** calcula-se o avanço randômico de cada vórtice no plano físico, em cada instante de tempo;
- 7) **Transformação Inversa:** aplica-se aos vórtices do plano físico a transformação de Joukowski inversa para obter-se novamente as coordenadas no plano transformado.
- 8) **Reflexão dos vórtices:** vórtices que penetram no corpo são refletidos de volta para o escoamento no plano transformado;
- 9) **Avanço no tempo:** um novo instante de tempo é iniciado, e a computação volta ao passo 1.

A cada instante de tempo N novos vórtices são gerados a uma pequena distância dr do círculo, e suas intensidades são determinadas pela condição de escorregamento nulo aplicada explicitamente a $N-1$ pontos do corpo imediatamente abaixo dos vórtices, na direção radial.

O sistema de $N-1$ equações obtido acima é complementado pela condição de conservação de circulação, onde a soma de toda a vorticidade no escoamento é nula. Este procedimento produz um sistema de N equações algébricas e N incógnitas (as intensidades dos vórtices), isto é

$$\sum_{k=1}^{N-1} A_{jk} \Gamma_k = b_j, 1 \leq j \leq N-1 \text{ e } \sum_{k=1}^N \Gamma_k, j = N \quad (23)$$

A matriz A_{jk} , de dimensão $N \times N$, possui elementos que dependem da posição onde os vórtices são gerados e da posição dos pontos do corpo onde se impõe a condição de escorregamento nulo. Como estes pontos são fixos, A_{jk} é calculada apenas uma vez. O vetor b_j , que é atualizado a cada instante de tempo, inclui a contribuição de todos os termos que compõem o escoamento (escoamento uniforme, dipolo, vórtices da esteira e suas imagens) sobre os pontos da superfície do cilindro. O sistema de equações é resolvido utilizando-se um algoritmo de eliminação de Gauss.

3.5. Os Parâmetros Numéricos

O algoritmo desenvolvido neste trabalho possui os seguintes parâmetros numéricos principais: o passo de tempo no plano físico, Δt_c ; o número de vórtices gerados a cada passo de tempo, N ; o raio do núcleo dos vórtices, s e a distância (radial) e entre a superfície do cilindro e os novos vórtices serão gerados. A escolha, ou determinação, destes parâmetros obedece a certos critérios.

O valor do passo de tempo utilizado nas simulações é determinado considerando-se inicialmente o avanço convectivo de um vórtice, Δl , no plano do círculo. Utilizando a distância entre dois vórtices consecutivos na superfície do cilindro circular como comprimento característico e considerando que esta distância é aproximadamente igual ao avanço convectivo de um vórtice, com velocidade da ordem da velocidade do escoamento uniforme U , pode-se escrever

$$\Delta s \sim \Delta l \sim U \Delta t \quad (24)$$

Uma estimativa para o valor de Δs pode ser obtida em função do número de vórtices gerados naquele passo de tempo, N , ou seja,

$$\Delta s = \frac{2pb}{N} \quad (25)$$

A inclusão de uma constante uma constante k , positiva e de ordem 1, torna a expressão acima uma igualdade, que pode ser escrita na forma adimensional (utilizando-se U e b) como

$$\Delta t = \frac{2\mathbf{p}^k}{N} \tag{26}$$

Em todas as simulações com o esquema de Euler de 1ª ordem, utiliza-se $k = 0,25$, e a Eq. (26) fornece uma estimativa para o avanço de tempo no plano do círculo. Para obter-se o passo de tempo Δt_c no plano físico do cilindro elíptico, adimensionalizado por U e c , deve-se corrigir o valor de Δt como se segue

$$\Delta t_c = \frac{b}{c} \Delta t \tag{27}$$

onde $b/c = 0,25 (1 + e^2)^{1/2}$. O número de vórtices gerados a cada passo de tempo, N , é escolhido arbitrariamente, levando-se em conta que quanto maior N , maior será o número de vórtices presentes na esteira ao final da simulação e, portanto, maior o tempo de execução de cada simulação. O raio do núcleo do vórtice é obtido com a Eq. (19) e a distância \mathbf{e} de posicionamento dos vórtices nascentes foi considerada igual ao núcleo do vórtice em todas as simulações. Esta hipótese se mostrou bastante efetiva para obtenção de bons resultados (Mustto Cabrera, 1998).

4. Resultados e Conclusões

O escoamento em torno de cilindros elípticos tem sido muito investigado, principalmente por apresentar características de campo de escoamento comuns aos escoamentos em torno de corpos rombudos e aerodinâmicos, como cilindros circulares e aerofólios, dependendo do valor da espessura máxima ou da orientação em relação ao escoamento.

De acordo com a metodologia utilizada, as simulações partem de uma distribuição de vórtices nascentes em torno do cilindro circular e, via Transformação Conforme, obtém-se a distribuição dos vórtices em torno do cilindro elíptico desejado. O número de vórtices nascentes distribuídos ao longo da superfície do cilindro é $N = 32$, o ângulo de ataque do escoamento é $\alpha = 0^\circ$, e o número de Reynolds é $Re_c = 10^4$, todos mantidos constantes em todas as simulações. Os parâmetros numéricos utilizados possuem valores nominais, determinados a partir dos critério de escolha para Δt_c e do cálculo respectivo de \mathbf{e} e \mathbf{s} como mostrado na seção 3.5. Três casos são estudados, onde as simulações são realizadas para cilindros elípticos com razão entre eixos (e =eixo menor/eixo maior) igual a 0,8, 0,5 e 0,25, respectivamente. A Tabela (1) apresenta os valores dos parâmetros nominais utilizados nas simulações para cada caso.

Tabela 1. Parâmetros Nominiais.

CASO	e	$\mathbf{e}=\mathbf{s}$	D_c
I	0,80	0,0067	0,022
II	0,50	0,0061	0,018
III	0,25	0,0056	0,015

Os resultados obtidos para o escoamento em torno de um cilindro elíptico com espessura máxima dada por $e = 0,8$ (Caso I), são apresentados em primeiro lugar. Nas Figuras (3), (4a) e (4b) são mostrados os gráficos da posição dos vórtices na esteira, de forças aerodinâmicas e do coeficiente de pressão, respectivamente, após 1000 passos de tempo. Pode-se observar na Fig. (3) a formação de uma extensa esteira de Von Kármán, constituída de grandes estruturas vorticais geradas alternadamente nas superfícies superior e inferior do cilindro elíptico, que se desprendem da superfície e formam a esteira do corpo. Devido ao fato de que $e = 0,8$, a esteira a jusante do cilindro elíptico se assemelha a de um cilindro circular, caracterizada por uma grande concentração de vorticidade nas grandes estruturas vorticais que se desprendem da superfície. A esteira mostrada abaixo possui 32000, pois 32 novos vórtices são gerados a cada passo de tempo, e os vórtices que penetram no corpo são refletidos de volta para o escoamento e posicionados no seu ponto inverso.

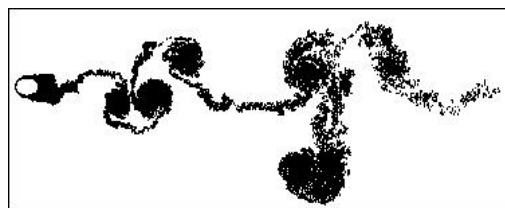


Figura 3. Posição dos vórtices na esteira para $e = 0,8$ em $t = 22,0$ (Caso I).

A Figura (4) mostra a evolução temporal dos coeficientes de arrasto e sustentação. O coeficiente de sustentação (Figura 4a) apresenta três ciclos de oscilação em torno de zero, numa frequência adimensional (número de Strouhal) igual 0,21, que é um pouco maior que o valor numérico de 0,18 obtido por Smith and Stansby. Deve-se notar que estes valores numéricos são muito próximos do valor experimental para um cilindro circular, que é 0,19. O valor do coeficiente de arrasto apresenta um valor médio de 0,89, um pouco acima do valor experimental de 0,64 apresentado por Blevins (1984). Na Figura (4b) pode-se observar o gráfico da distribuição do coeficiente de pressão obtido numericamente com o presente método, além dos resultados experimentais de Smith e Stansby (1987) e os resultados teóricos previstos pela teoria potencial. Observa-se uma boa concordância com o caso experimental. Os resultados apresentados, baseados em três ciclos de oscilação do coeficiente de sustentação, são suficientes para demonstrar a capacidade do algoritmo de simular, mesmo que aproximadamente, escoamentos complexos para este. Apesar da grande quantidade de vórtices presentes na esteira, uma aproximação dos resultados numéricos dos experimentais consiste em aumentar o número de vórtices nascentes a cada passo de tempo. Porém, para que alguns ciclos de oscilação sejam obtidos, a simulação deve ser realizada por um longo período de tempo, como a simulação aqui realizada ($t = 22$). Este procedimento acarreta um alto custo computacional devido à grande quantidade de vórtices presentes na esteira, e possui efeito limitado porque o escoamento real em torno de corpos rombudos como um cilindro elíptico com espessura máxima de 0,8 apresenta efeitos tridimensionais para valores altos de Re . Por outro lado, simulações bidimensionais como as realizadas neste trabalho não levam em conta estes efeitos 3D, o que produz valores calculados de C_d médio maiores que os valores experimentais.

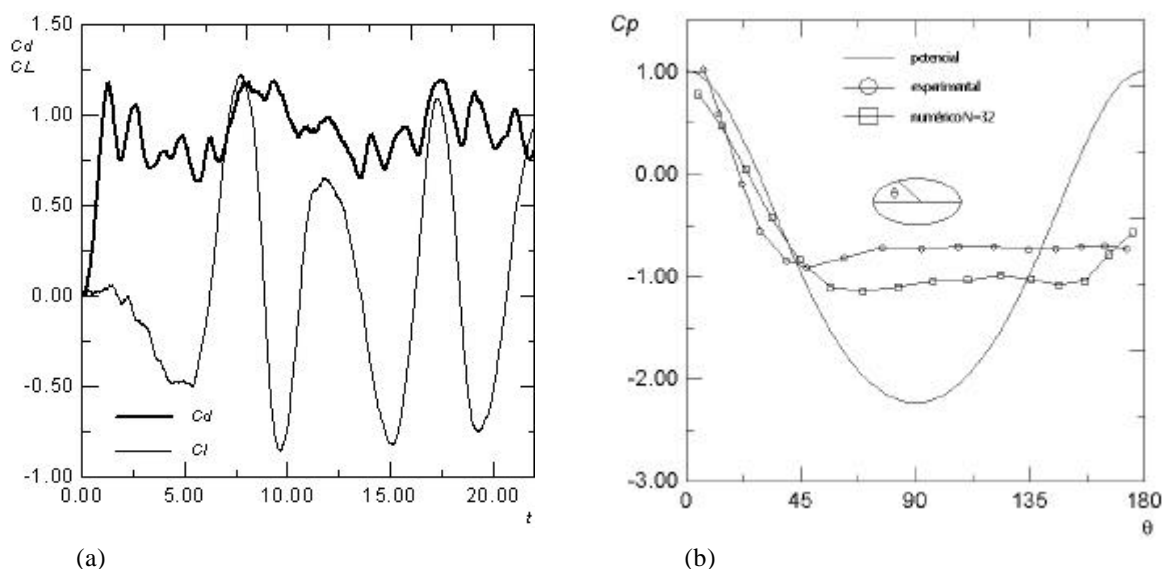


Figura 4. (a) Evolução de C_d e C_l com o tempo para $e = 0,8$ em $t = 22,0$ (Caso I) e (b) Comparação do C_p para os resultados potencial, experimental e numérico (Caso I).

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para os escoamentos em torno de cilindros elípticos com espessura máxima $e = 0,5$ (Caso II) e $e = 0,25$ (Caso III). Nas Figuras (5a) e (6a) são mostrados os gráficos da posição dos vórtices na esteira e as forças aerodinâmicas, respectivamente, para o Caso II. Os resultados obtidos para o escoamento em torno de um cilindro elíptico com espessura máxima $e = 0,25$ (Caso III) são mostrados nas Figuras (5b) e (6b), que representam a posição dos vórtices na esteira e as forças aerodinâmicas, respectivamente.

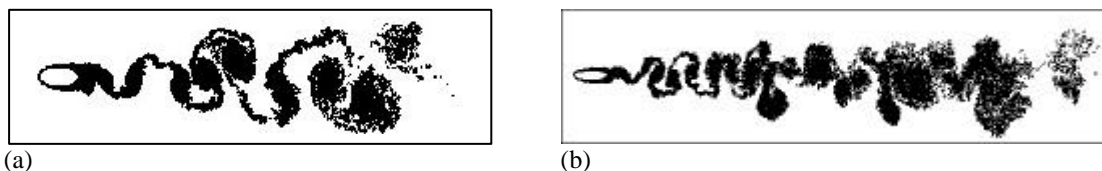


Figura 5. (a) Posição dos vórtices na esteira para $e = 0,5$ em $t = 10,8$ (Caso II) e (b) Posição dos vórtices na esteira para $e = 0,25$ em $t = 15,0$ (Caso III).

A dinâmica oscilatória da esteira é claramente observada, o que se reflete na história das forças de arrasto e sustentação, mostradas nas Fig. (6a) e (6b). A variação temporal das forças fica caracterizada pela oscilação em C_d e C_l , que apresentam ciclos bem definidos. Pode-se observar que à medida que a elipse vai ficando mais fina a frequência das oscilações tende a aumentar.

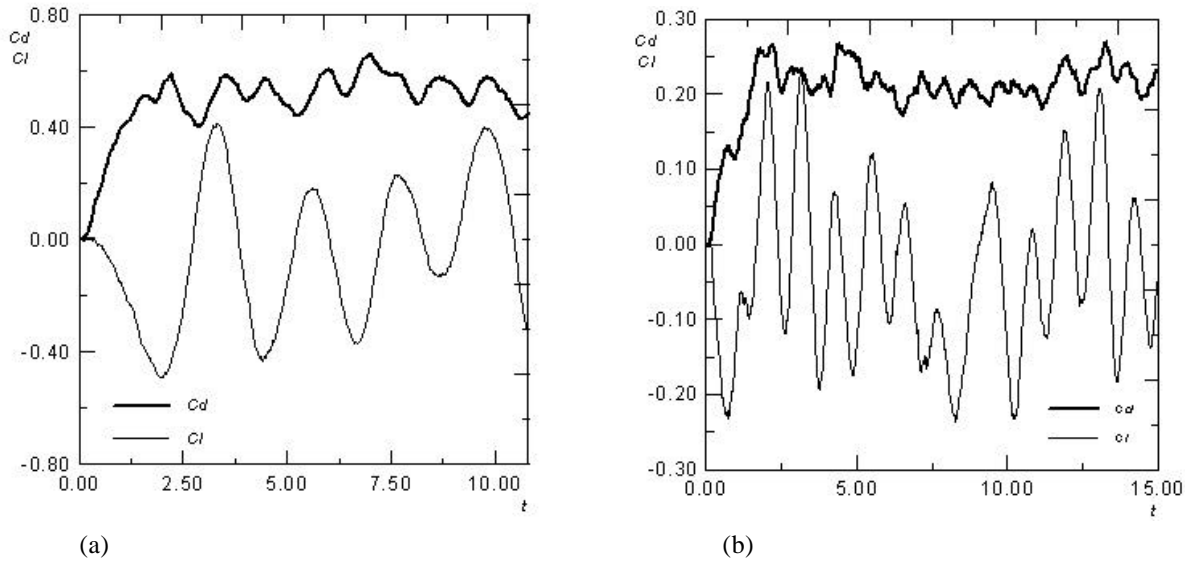


Figura 6. (a) Evolução de C_d e C_l com o tempo para $e = 0,5$ em $t = 10,8$ (Caso II) e (b) Evolução de C_d e C_l com o tempo para $e = 0,25$ em $t = 15,0$ (Caso III).

Na Tabela (2) são apresentados, resumidamente, os resultados obtidos com o presente método, os resultados experimentais de Blevins (1984) e o resultado numérico de Smith e Stansby (1987) para $Re = 10^4$ e ângulo de ataque nulo. Pode-se observar que o Caso I produz valores de C_d e St próximos ao valor de Smith e Stansby utilizado como referência para comparação. O coeficiente de arrasto obtido pelo presente método, para cilindro elíptico com espessura máxima de 0,5, é aproximadamente 63% superior ao experimental apresentado por Blevins enquanto que para o cilindro elíptico com $e=0,25$ esta diferença aumenta para 110%.

Tabela 2. Valores experimentais e numéricos de C_d e St .

		C_d	St
$e=0,8$	Blevins (1984)	0,64	---
	Smith e Stansby (1987)	---	0,18
	Caso I	0,89	0,21
$e=0,5$	Blevins (1984)	0,30	---
	Caso II	0,49	0,46
$e=0,25$	Blevins (1984)	0,10	---
	Caso III	0,21	0,93

De uma forma geral, as diferenças encontradas nas comparações entre os resultados obtidos neste trabalho e os resultados experimentais de Blevins (1984) se justificam devido aos efeitos tridimensionais que existem no escoamento real mas não existem nas simulações. A comparação de St com o valor calculado por Smith e Stansby (1987) para o caso I requer um valor experimental para que seja melhor efetuada. Por outro lado, o algoritmo utilizado necessita ser explorado mais detalhadamente através de simulações mais longas, com mais vórtices na esteira, e com valores dos parâmetros numéricos mais cuidadosamente investigados. Além disso, há necessidade de se adicionar a este método uma modelagem de turbulência e avanços convectivos de ordem superior. Pode-se observar que para altos valores de espessura máxima (e), isto é, quanto mais a elipse se aproxima de um círculo, melhores resultados são obtidos, uma vez que os critérios utilizados para determinação dos parâmetros numéricos aplicam-se com sucesso para a geometria circular (Mustto Cabrera, 1998). Apesar das discrepâncias encontradas, o algoritmo demonstrou capacidade de simular qualitativamente bem a dinâmica da esteira e o comportamento das forças aerodinâmicas.

Com base nas comparações efetuadas entre as simulações realizadas e resultados utilizados para análise pode-se concluir que, apesar das discrepâncias, o método numérico utilizado é apropriado para a simulação de escoamentos externos em torno de corpos. Este escoamento é caracterizado pelo fenômeno de separação e a conseqüente formação de uma extensa esteira oscilatória e turbulenta. A simulação acurada destes fenômenos provoca ainda enormes desafios a serem vencidos do ponto de vista numérico, e um estudo mais detalhado dos parâmetros numéricos acoplado a um modelo de turbulência faz-se necessário. Este fato serve de motivação para a contínua investigação científica dos fenômenos físicos associados e os correspondentes métodos numéricos em desenvolvimento para a simulação desses escoamentos.

5. Referências

- Batchelor, G.K., 1967, “*Introduction To Fluid Dynamics*”, Cambridge University Press.
- Blevins, R.D., 1984, “*Applied Fluid Dynamics Handbook*”, Van Nostrand Reinhold Co.
- Carreiro, F.R., 2002, *Simulação Numérica Bidimensional, Incompressível, de alto Reynolds, em Torno de Corpos via Transformação Conforme e Método de Vórtices*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, BRA.
- Choi, J.H. e Lee, S.J., 2001, “Flow Characteristics Around an Inclined Elliptic Cylinder in a Turbulent Boundary Layer”. *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 15, pp. 1123-1135.
- Hirata, M.H., 1991, “*Análise do Escoamento de um Fluido Viscoso Utilizando Elementos de Teoria Potencial*”, Textos em Mecânica dos Fluidos, n. 001/91, Laboratório de Mecânica dos Fluidos e Aerodinâmica, PEM-COPPE/UFRJ.
- Kundu, P.K., 1990, “*Fluid Mechanics*”, Academic Press.
- Lewis, R.I., 1991, “*Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*”, Cambridge, Cambridge University Press.
- Milne-Thomson, L.M., 1955, “*Theoretical Aerodynamics*”, Dover.
- Mustto Cabrera, A.A., 1998, *Simulação Numérica do Escoamento em Torno de um Cilindro Circular com e sem Rotação Utilizando o Método de Vórtices Discretos*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, BRA.
- Nair, M.T. e Sengupta, T.K., 1997, “Unsteady Flow Past Elliptic Cylinders”. *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 11, pp. 555-595.
- Nakanishi, Y., Tobita, K., Hagihara, N. e Kubokawa, M., 1999, “Flows around 2D Circular and Elliptic Cylinders Using New Scheme for Vorticity Production at Solid Surface”. *Proceedings of the 1th International Conference on the Vortex Methods*, Vol.1, Maiko Villa, Kobe, Japan.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. & Vetterling, W.T., 1989, “*Numerical Recipes - the Art of Scientific Computing (Fortran Version)*”, Cambridge University Press.
- Sarpkaya, T., 1963, “Lift, Drag, and Added-Mass Coefficients for a Circular Cylinder Immersed in a Time-Dependent Flow”. *Journal of Applied Mechanics*, pp 13-15.
- Sarpkaya, T., 1975, “An Inviscid Model of Two-Dimensional Vortex Shedding for Transient and Asymptotically Steady Separated Flow over an Inclined Plate”. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 68, part1, pp. 109-128.
- Smith, P.A. and Stansby, P.K., 1987 “Generalized discrete vortex method for cylinders without sharp edges”. *AIAA Vol.25*, pp. 199-201.

NUMERICAL SIMULATION OF THE UNSTEADY FLOW AROUND ELLIPTIC CYLINDERS VIA JOUKOWSKY TRANSFORMATION

Flávia dos Reis Carreiro

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, EE/COPPE/UFRJ
Cx.P. 68503 – 21945-970 – Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
flavia@serv.com.ufrj.br

Gustavo César Rachid Bodstein

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, EE/COPPE/UFRJ
Cx.P. 68503 – 21945-970 – Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
gustavo@serv.com.ufrj.br

Abstract. *In this work the unsteady, incompressible, two-dimensional flow around elliptic cylinders is studied. The flow around an elliptic cylinder in the physical plane is mapped into the flow around a circular cylinder in the computational plane by the Joukowski transformation. The Discrete Vortex Method is used to calculate the flow around the circular cylinder. The dynamics of the body wake is computed using the convection-diffusion splitting algorithm, where the convection process is carried out with a lagrangian-first-order time-marching scheme, and the diffusion process is simulated using the random walk method. The Circle Theorem is used to impose the impermeability condition on the body surface, whereas the no-slip condition is satisfied at the specific points on the body. The aerodynamic forces are calculated from the unsteady Blasius equation. Results are presented for high Reynolds number flows, showing good agreement with other results available in the literature.*

Keywords. *Vortex Methods, Conformal Transformation, Elliptic Cylinders, Aerodynamics.*