

**COMPORTAMENTO DA ESTEIRA DE AERONAVES NAS OPERAÇÕES
DE POUSO E DECOLAGEM****Miguel Hiroo Hirata**

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – DME/IEM
Av. BPS, 1303, Pinheirinho, 37500-903 Itajubá, MG
hirata@iem.efei.br

José Eugênio Rios Ricci

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – DME/IEM
Av. BPS, 1303, Pinheirinho, 37500-903 Itajubá, MG
ricci@iem.efei.br

Waldir de Oliveira

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – DME/IEM
Av. BPS, 1303, Pinheirinho, 37500-903 Itajubá, MG
waldir@iem.efei.br

Resumo. *O aumento da frequência de vôos, associado com o porte crescente das aeronaves, faz com que as operações de pouso e decolagem, em quase todos os aeroportos de grande porte, assumam proporções críticas. Por outro lado, a redução do intervalo de tempo entre operações subseqüentes é uma variável importantíssima no desempenho dos aeroportos. Para se estabelecer o menor intervalo entre operações subseqüentes é necessário analisar a dinâmica da dissipação da esteira nas pistas. O objetivo deste trabalho consiste em analisar a dinâmica da esteira de uma aeronave que opera perto do solo. Para tal fim, o Método de Vórtice é utilizado e a esteira é simulada por um par de nuvens formadas por vórtices discretos.*

Palavras chave: *efeito solo, esteira de aeronaves, método de vórtices, operações de pouso e decolagem, simulação numérica.*

1. Introdução

O crescimento do tráfego aéreo e a utilização de aeronaves cada vez maiores e mais potentes, tornam críticas as operações de pouso e decolagem. Por outro lado, a redução do intervalo entre a decolagem e o pouso subseqüente (e vice-versa) é de importância capital para melhorar a eficiência do sistema de controle do tráfego aéreo nos maiores aeroportos do mundo.

Observe-se que esta redução do intervalo entre operações subseqüentes introduz novas variáveis que afetam diretamente a segurança das operações. Os problemas de segurança estão diretamente relacionados com as operações de pouso e decolagem, quando estas acontecem na esteira remanescente (sobre a pista) resultante da operação anterior de uma aeronave de grande porte. Assim, evitar que uma aeronave opere na esteira de outra que a antecede constitui-se no primeiro requerimento do controle do tráfego aéreo em aeroportos, Machol (1993).

Uma primeira observação a respeito deste assunto é encontrada em Critchley e Foot (1991): “a maior frequência de acidentes ocorre com operações subseqüentes na faixa de 30 ~ 70m de altura, quando as formações vorticosas da esteira sofrem influência do solo”. A esta observação pode-se acrescentar, para fins de comparação, as dimensões de um moderno jato, o A340-600, que possui uma envergadura alar de 74,80m, um comprimento de 63,50m e uma altura de 17,80m.

Uma segunda observação é encontrada em Zheng e Ash (1996): “os vórtices livres que se formam nas extremidades das asas possuem uma circulação que se desenvolve na mesma proporção do tamanho e da velocidade da aeronave que os gera e persistem por distâncias significantes.

Conclui-se que os resultados da análise do comportamento da esteira de aeronaves e de sua dissipação representam uma ferramenta crucial para os operadores do tráfego aéreo e a procura destes resultados constitui-se no assunto central deste trabalho.

Em linhas gerais, o problema analisado consiste na simulação numérica do comportamento de duas manchas de vorticidade, que representam os vórtices livres gerados nas extremidades da asa de uma aeronave. Estas manchas de vorticidade mantêm-se com um espaçamento constante a medida que caminham em direção ao solo, mas a interação com a vorticidade gerada sobre a pista, faz com que a vorticidade se espalhe formando novas estruturas vorticosas. Outros mecanismos importantes contribuem de maneira decisiva para a formação e desenvolvimento destas estruturas; um deles é representado pela presença de ventos laterais que podem inclusive transportar a vorticidade para pistas vizinhas que operam paralelamente.

Pela sua importância, este problema já mereceu a atenção de muitos pesquisadores que produziram resultados extremamente importantes. Donaldson e Bilanin (1975), apresentam uma revisão bastante compreensiva das pesquisas realizadas até 1975. Infelizmente, quase todos os resultados foram obtidos utilizando o modelo potencial para simular o fenômeno. A trajetória dos vórtices, segundo este modelo, é hiperbólica devido à presença do solo que provoca uma separação dos vórtices descendentes (Lamb, 1932).

Sabe-se, no entanto, que a esteira das aeronaves interage fortemente com o solo, sobre o qual se desenvolve uma camada limite. A vorticidade aí gerada influencia a dinâmica da mancha descendente de vórtices e, também, sofre influência dos ventos laterais. Estes efeitos, obviamente, não podem ser captados com a utilização do modelo potencial.

Zheng (1993), em sua tese de doutoramento, analisa a influência do número de Reynolds no desenvolvimento da esteira de vórtices junto ao solo. A sua análise é feita utilizando o método das expansões assintóticas combinadas para inicializar as simulações numéricas feitas com o método de diferenças finitas. A análise apresenta algumas dificuldades para a imposição das condições de contorno e é restrita ao regime laminar. Mais tarde, Zheng e Ash (1996) utilizaram o esquema de Zheng para calcular vários parâmetros de interesse. A simulação numérica consegue capturar as estruturas vorticosas secundárias resultantes da interação das estruturas primárias com o solo mas não está preparada para analisar o escoamento com separação, o que fatalmente ocorre.

Outros trabalhos (Doligalski et al. 1994) analisam o desenvolvimento das estruturas vorticosas primárias interagindo com a camada limite do solo. Estes trabalhos, por utilizarem a formulação da camada limite, não conseguem, também, analisar o escoamento além do ponto em que a separação ocorre.

Talvez, um dos aspectos importantes da interação das estruturas primárias com o solo e o desenvolvimento subsequente das estruturas secundárias seja a habilidade destas estruturas de se deformarem. Este aspecto é inibido nas simulações porque os autores citados representam os vórtices livres por meio de um par de vórtices discretos. Zheng e Ash (1996) utilizam vórtices de Lamb (ou Oseen) e a maior parte dos autores, como é o caso de Corjon e Poinot (1997), utiliza vórtices potenciais.

Neste trabalho, um esquema totalmente diferente dos anteriores é adotado. A sua principal característica, e que a torna única, consiste na utilização de uma descrição lagrangiana, mais especificamente o Método de Vórtices (Lewis, 1991; Kamemoto, 1994; Hirata, 2000).

Este método exige que as manchas de vorticidade (vórtices livres) sejam discretizadas e modeladas com a utilização de dois conjuntos (nuvens) de vórtices discretos. Estas nuvens são posicionadas simetricamente com relação a um plano vertical que passa pelo centro da pista. A evolução, no tempo, destas nuvens de vórtices sofre a influência do solo que é representada por uma superfície plana de largura finita.

Com este enfoque, vários pontos críticos, mencionados acima, podem ser sanados:

- utiliza-se o modelo newtoniano na solução do problema; desta maneira, considera-se, na simulação, os efeitos da camada limite que se desenvolve na superfície do solo, assim como a sua interação com as estruturas vorticosas primárias;
- como característica inerente ao método, as condições de contorno são automaticamente satisfeitas;
- a geração de vorticidade junto à superfície do solo é simulada de maneira simples com a criação de vórtices nascentes nas suas vizinhanças;
- a utilização de nuvens de vórtices discretos para simular as estruturas primárias, assim como as secundárias, confere uma flexibilidade muito grande para que as nuvens de vorticidade se deformem de acordo com a dinâmica do escoamento, o que não é possível com a utilização de apenas um vórtice discreto;
- o acompanhamento lagrangiano das estruturas vorticosas permite, numa análise que vai além dos propósitos deste trabalho, identificar os pontos de separação e o escoamento que se desenvolve a seguir;
- em trabalhos futuros, os aspectos turbulentos serão considerados com a utilização de uma função estrutura de velocidades de segunda ordem (Alcântara Pereira, et al. 2000).

No presente trabalho, apresenta-se resultados preliminares obtidos com a metodologia proposta. Estes resultados são comparados com alguns dados experimentais disponíveis e apresentam boa concordância, mostrando as potencialidades do enfoque utilizado.

2. Definição do Problema

Uma aeronave numa operação de pouso (ou decolagem) é representada na Fig. (1).

Na Fig. (1) identificam-se os vórtices livres, nas extremidades das asas, os quais possuem circulação $\pm \Gamma$. Esta circulação está relacionada com a força de sustentação, L , das asas através da lei de Kutta-Joukowski,

$$\Gamma = \frac{L}{b\rho U_{\infty}} \quad (1)$$

onde b é a envergadura da aeronave.

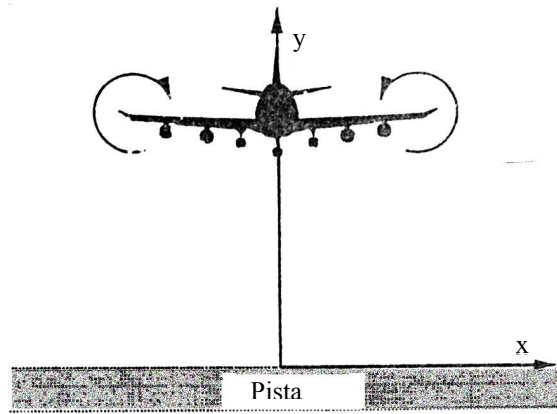


Figura 1. Representação esquemática dos vórtices livres.

O modelo utilizado para a simulação numérica assume que esta possa ser feita em duas dimensões, posicionando os dois vórtices livres simetricamente ao eixo vertical, a uma altura h_0 . O solo é representado pelo eixo horizontal, como ilustra a Fig. (2). A distância entre os centros dos dois vórtices livres é b_0 e B é a largura da pista.

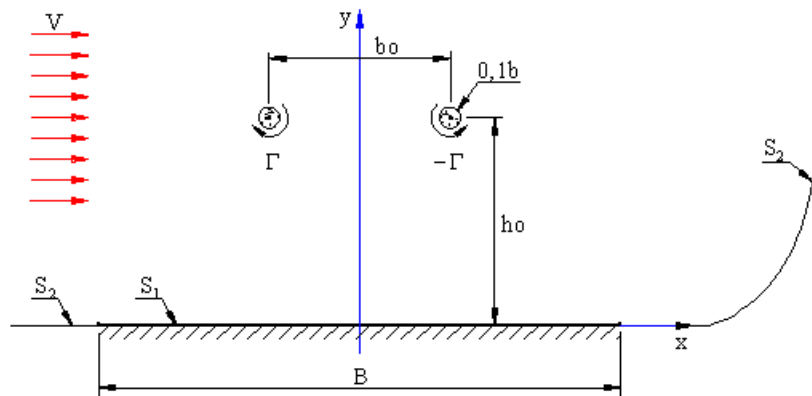


Figura 2. Modelo utilizado para a simulação numérica.

A região de interesse (região fluida), onde as equações que governam o fenômeno devem ser satisfeitas, é definida pela superfície S que, por sua vez, é vista como

$$S = S_1 \cup S_2. \quad (2)$$

A superfície S_1 corresponde a pista de pouso e decolagem e S_2 é uma superfície localizada a grandes distâncias. S_1 e S_2 são definidas como

$$S_1: \quad F_1(x, y) = y = 0 \quad (3)$$

$$S_2: \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Assim sendo, além de assumir que o problema realiza-se em todo o semi-plano superior, assume-se que o fluido é newtoniano com propriedades constantes e que o escoamento é laminar; os efeitos da compressibilidade não são considerados.

Nestas condições, a equação da continuidade é escrita como

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

e as equações de Navier-Stokes (N-S) como

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad i=1,2 \text{ e } j=1,2. \quad (6)$$

Nas fronteiras da região fluida, as seguintes condições de contorno são estipuladas:

$$u_1 = u = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (\text{condição de escorregamento nulo})$$

$$u_2 = v = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (\text{condição de impenetrabilidade})$$

$$|\mathbf{u}| \rightarrow V \quad \text{para } r \rightarrow \infty.$$

onde V é a intensidade do vento lateral.

3. Adimensionalização do Problema

Para a adimensionalização das equações que governam o fenômeno, as seguintes grandezas são de utilizadas:

comprimento característico - b

velocidade característica - $U = \frac{\Gamma}{b}$ a qual é uma velocidade representativa do fenômeno

Tomando-se o rotacional das equações de N-S, o termo de pressão é eliminado, resultando, na forma adimensional, a equação da vorticidade

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_j}, \quad j=1,2. \quad (7)$$

Observe que, nesta equação, ω representa a única componente não nula do vetor vorticidade $\vec{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ e o número de Reynolds é definido como

$$Re = \frac{\Gamma}{\nu}. \quad (8)$$

As condições de contorno impostas sobre a superfície S_1 formalmente são idênticas às versões dimensionais

$$u_1 = u = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (\text{condição de escorregamento nulo})$$

$$u_2 = v = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (\text{condição de impenetrabilidade})$$

e a condição em S_2 toma a forma

$$|\mathbf{u}| \rightarrow \frac{Vb}{\Gamma} \quad \text{para } r \rightarrow \infty.$$

4. O método de vórtices.

A simulação numérica do problema é feita com a utilização do Método de Vórtices. Segundo este método, a vorticidade é discretizada e representada por uma nuvem de vórtices discretos. A evolução da vorticidade é simulada pela evolução dos vórtices da nuvem que sofre uma convecção e, simultaneamente, está sujeita ao processo de difusão, (Lewis, 1991; Kamemoto, 1994 e Hirata, 2000). Utiliza-se vórtices de Lamb, cujo raio é indicado por σ_0 ; para maiores detalhes das características deste vórtice veja Musto (1998).

O algoritmo de separação dos efeitos viscosos (*viscous splitting algorithm*) é fundamental para a implementação numérica do Método de Vórtices. Segundo este algoritmo, num mesmo incremento de tempo, a convecção da nuvem de vórtices pode ser calculada independentemente de sua difusão (Chorin, 1973).

Nesta implementação, a condição de impenetrabilidade, especificada na superfície S_1 , é considerada com a utilização de imagens. Com este expediente, garante-se a satisfação desta condição em todos os pontos da superfície.

A condição de escorregamento nulo é satisfeita pontualmente sobre a superfície, mais especificamente sobre um número discreto de pontos de controle. O expediente aqui utilizado consiste na geração, em cada incremento de tempo, de vórtices nascentes. Sobre uma reta normal à superfície, que passa por cada ponto de controle, posiciona-se um

vórtice nascente a uma pequena distância ϵ . A intensidade dos vórtices nascentes é calculada de modo a garantir que a velocidade tangencial em todo os pontos de controle seja nula.

5. Simulação numérica

5.1. Vórtices livres

Dois enfoques foram utilizados para simular a vorticidade contida nos vórtices livres. Dois vórtices discretos de intensidade $\pm\Gamma$ e localizados nos pontos $(-b_0/2, h_0)$ e $(b_0/2, h_0)$, Fig. (2), foram inicialmente utilizados. Esta escolha foi necessária porque os resultados disponíveis na literatura adotam este procedimento e, assim, tem-se parâmetros para a comparação. Observa-se que $b_0 = 0,8b$ porque assumiu-se que a asa possui carregamento elíptico, (Betz,1932).

No segundo enfoque foram utilizadas duas nuvens de vórtices (nuvens livres), centradas em $(-b_0/2, h_0)$ e $(b_0/2, h_0)$, Fig. (2), cada uma formada por 100 vórtices de Lamb de intensidade $0,01\Gamma$ e $-0,01\Gamma$, respectivamente. Para a geração destas nuvens, assumiu-se que, no instante inicial (de geração da nuvem e não da simulação do fenômeno) os 100 vórtices achavam se concentrados no centro da nuvem, $(b_0/2, h_0)$, e permitiu-se que eles fossem submetidos a um processo difusivo, simulado através de avanços randômicos, até que o vórtice mais externo atingisse uma distância (do centro) igual a $0,1b$, Fig. (2). Desta maneira, garante-se que a vorticidade contida nas nuvens iniciais ajusta-se segundo uma distribuição gaussiana, como se fosse um “grande” vórtice de Lamb com seu centro nos pontos $(\pm b_0/2, h_0)$. Os vórtices da nuvem com centro em $(-b_0/2, h_0)$ possuem intensidade positiva e os vórtices da nuvem com centro em $(b_0/2, h_0)$ possuem intensidade negativa

5.2. Outros parâmetros da simulação numérica

Na simulação numérica, como já mencionado, foi utilizado o Método de Imagens para garantir a condição de impenetrabilidade na pista; a largura desta foi adotada como $B = 8b_0$. Para a impor a condição de escorregamento nulo, foram adotados 30 pontos de controle, igualmente espaçados; este fato garante que, a cada incremento de tempo, 30 vórtices nascentes são incorporados à nuvem que simula o desenvolvimento da camada limite sobre a pista.

Foram analisados duas situações extremas; algumas simulações com $Re = 1000$ e outras com $Re = 75000$. A Tab. (1) resume as situações analisadas.

Tabela 1. Situações analisadas.

Caso	Re	Vórtice Livre	$\frac{V}{\Gamma b}$
1	1000	Pontual	0,0
2-4	75000	Pontual	0,0, 0,2, 0,4 e 0,6
5	75000	Nuvem	0,0
6	75000	Nuvem	0,1

6. Resultados

A Fig. (3) mostra os resultados da simulação do Caso 1. Nesta figura, mostram-se as trajetórias descendentes dos vórtices livres e sua interação com a nuvem que se forma junto à pista (nuvem da CL) e que simula o desenvolvimento da camada limite. Na figura, foram adicionados os resultados experimentais de Liu e Srnsky (1990). Como pode ser observado, os resultados obtidos, até o instante em que a simulação foi interrompida, são semelhantes àqueles obtidos experimentalmente. Na figura, observa-se também uma intensa interação entre os vórtices livres e a nuvem da CL o que mostra claramente a importância dos efeitos viscosos no desenvolvimento da vorticidade. De fato, verifica-se que a interação faz com que duas novas estruturas vorticosas se desenvolvam e tomem uma trajetória ascendente, podendo atingir uma altura da ordem de h_0 .

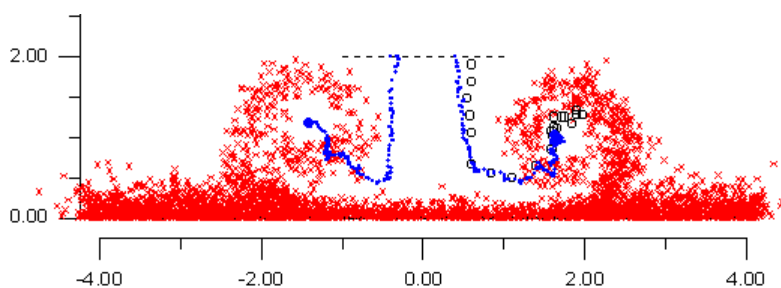


Figura 3. Comparação dos dados experimentais de Liu e Srnsky (1990) com os da simulação numérica para dois vórtices livres e $Re = 1000$.

A Fig. (3) sugere, ainda, que a ascensão das novas estruturas vorticosas é responsável pela separação do escoamento e, como consequência, a formação de duas estruturas vorticosas secundárias. Este é um assunto para investigações subseqüentes que já se iniciaram.

A Fig. (4) mostra as trajetórias obtidas com simulações onde se faz presente ventos laterais, casos 2-4. Verifica-se que a presença destes ventos, que se manifestam da esquerda para a direita, carregam as estruturas vorticosas da direita para fora da pista. As estruturas vorticosas da esquerda são, no entanto, carregadas para o interior da pista e, como já mencionado, podem atingir alturas consideráveis. Ventos laterais de maior intensidade tendem a restringir a altura atingida pelas estruturas vorticosas que se formam como consequência da interação entre os vórtices livres e a nuvem da CL.

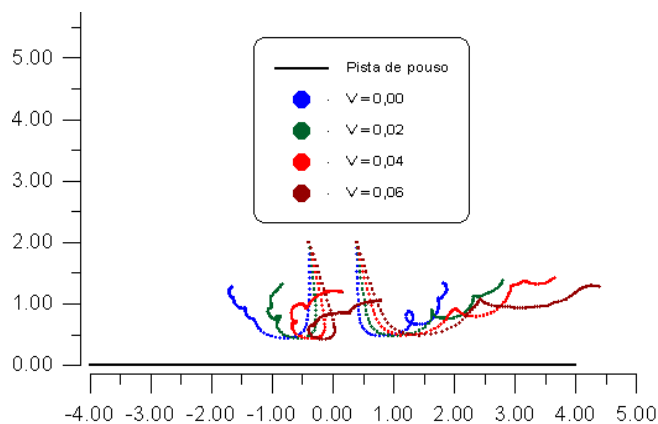


Figura 4. Trajetórias dos vórtices livres para várias condições do vento lateral.

A comparação entre as Figs (3) e (4) com a Fig. (5) mostra claramente as dificuldades em se simular os vórtices livres utilizando apenas dois vórtices discretos. Devido à grande intensidade destes vórtices e sua inability de se deformarem, a sua interação com a nuvem da CL resulta em regiões com poucos vórtices, gerados à partir da superfície, nas suas vizinhanças, o que certamente não condiz com a realidade.

A Fig. (5), que apresenta os resultados do Caso 5, ilustra com clareza o processo iterativo ao longo da simulação numérica. Logo no início da simulação, a fraca velocidade induzida (pelas nuvens livres), no solo, dá origem à nuvem da CL. Esta nuvem aumenta com o tempo de simulação e passa a interagir com as duas nuvens livres descendentes, formando as novas estruturas vorticosas. Verifica-se claramente que a ausência de ventos laterais faz com que o centro da pista se caracterize por ser uma zona de pouca atividade. A Fig. (6), que apresenta os resultados do Caso 6, ilustra a influência dos ventos laterais. Verifica-se, qualitativamente, que a trajetória das nuvens livres muito se aproxima dos resultados obtidos com a utilização de vórtices discretos (Caso 1), inclusive na altura mínima atingida. Os aspectos já analisados anteriormente aqui se verificam.

7. Conclusões

Os resultados preliminares permitem avaliar as grandes potencialidades do enfoque utilizado. A trajetória calculada dos vórtices descendentes concorda com aquela obtida experimentalmente e com os resultados numéricos obtidos da literatura.

O Método de Vórtices, aqui utilizado, permite simular a vorticidade criada nas extremidades das asas através de nuvens de vórtices discretos, ao contrário dos enfoques anteriores que utilizam dois vórtices isolados, um em cada extremidade da asa. Mostra-se claramente, que a interação da vorticidade descendente com a vorticidade criada no solo é melhor simulada com a utilização das nuvens.

Em trabalho, em fase de elaboração, serão analisados o campo de velocidade e pressão, o fenômeno da separação, etc. Observa-se, também, que os efeitos da turbulência poderão ser facilmente considerados quando se utiliza o enfoque proposto.

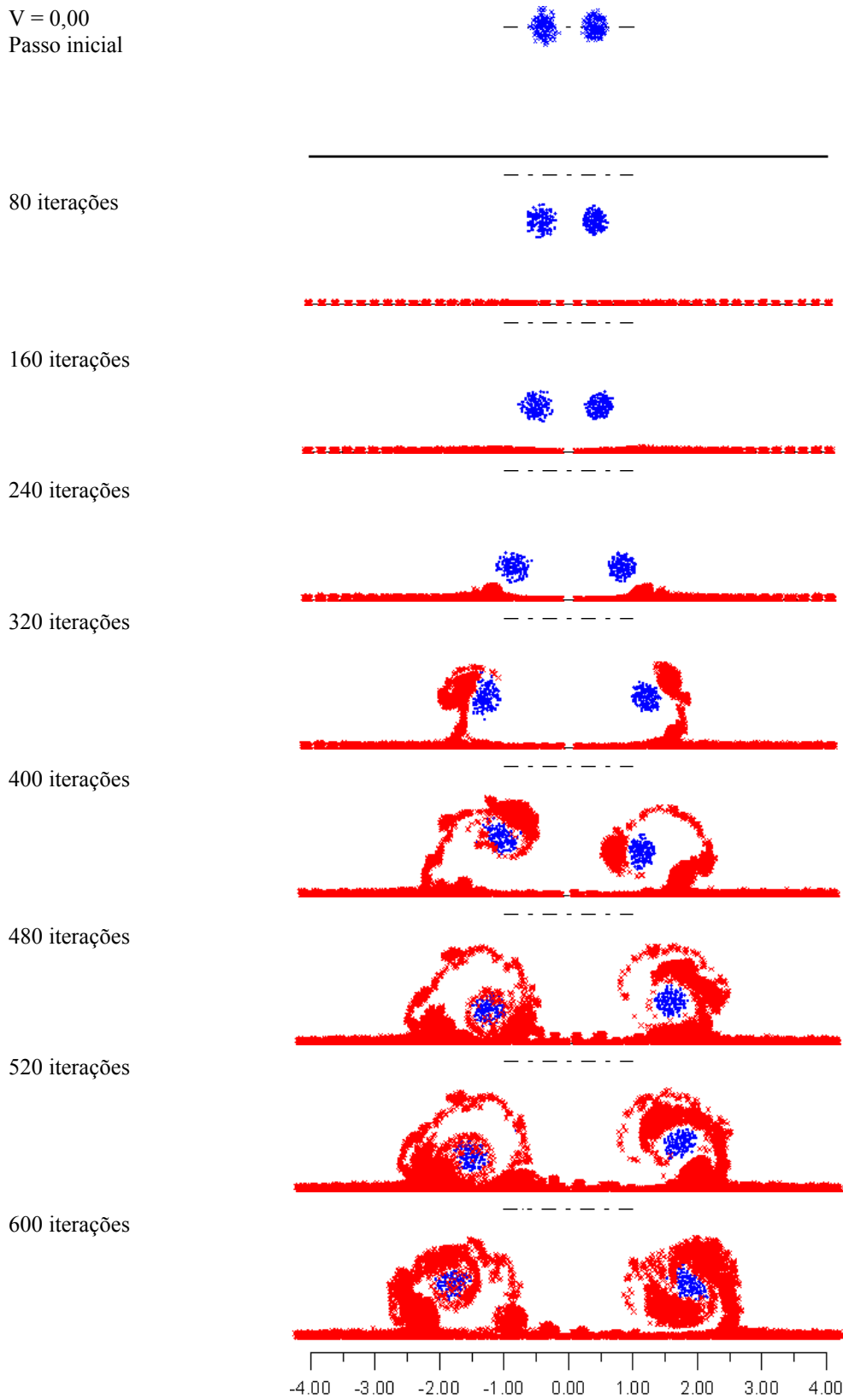


Figura 5. Evolução da nuvem vorticiosa sobre a pista e sua interação com a vorticidade gerada a partir da pista para o caso de vento lateral nulo.

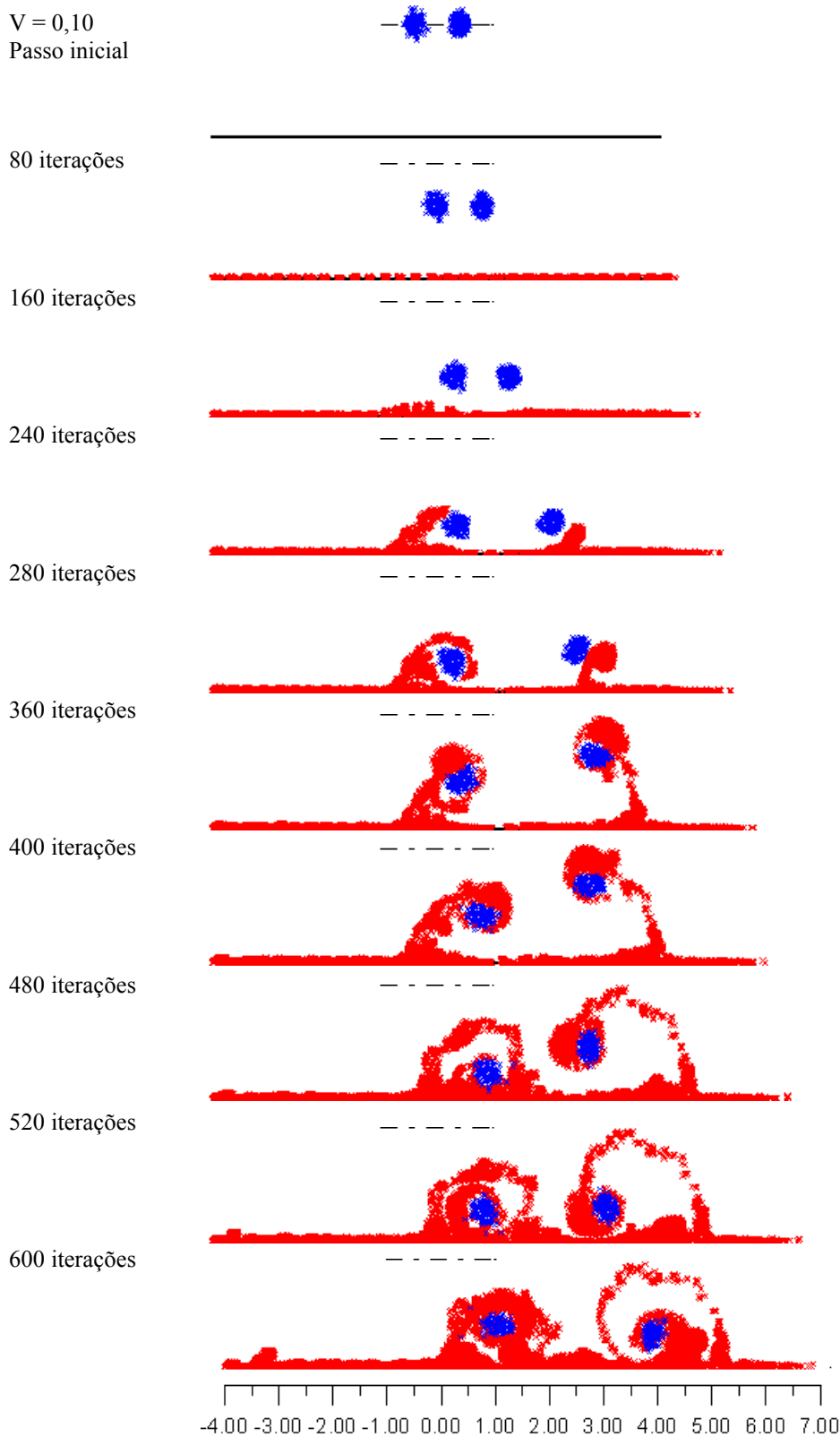


Figura 6. Evolução da nuvem vorticiosa sobre a pista e sua interação com a vorticidade gerada à partir da pista, para o caso de vento lateral igual a 0,10.

8. Referências

- Alcântara Pereira, L.A., Hirata, M.H. e Silveira Neto, A., 2000, “ Simulação Numérica do escoamento de um Fluido Newtoniano Usando uma Nuvem de Vórtices e Modelagem Sub-Malha de Turbulência”, IV Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Uberlândia, MG, Brasil.
- Betz, A., 1932, “Verhalten von WirbelSystemen”, ZAMM, Vol.12, No. 3,pp 164-174.
- Chorin, A. J., 1973 “Numerical Study of Slightly Viscous Flow”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 57, pp. 785-796.

- Corjon, A. and Poinso, T., 1997, "Behavior of Wake Vortices Near Ground", AIAA Journal, Vol. 35, No. 5, pp. 849-855.
- Critchley, J. and Foot, P., 1991, "UK CAA Wake Vortex Database: Analysis of Incidents Reported Between 1982 and 1990" Civil Aviation Authority, CAA Paper 91.
- Doligalski, T.L., Smith, C.R. and Walker, J.D.A., 1994, "Vortex Interactions with Walls", Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 26, pp 573-616.
- Donaldson, C. D. and Bilanin, A., 1975, "Vortex Wakes of Conventional Aircraft", AGARDograph204.
- Hirata, M.H., 2000, "O Método de Vórtices com Modelagem da Turbulência", palestra apresentada no CONEM 2000, Natal, RN, Brasil.
- Kamemoto, K., 1994, "Development of the Vortex Methods for Grid-Free Lagrangian Direct Numerical Simulation", Proc. Third JSME-KSME, Sendai, Japan.
- Lamb, H., 1932, "Hydrodynamics", Dover Publication, NY.
- Lewis, R.I., 1991, "Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems" Cambridge University Press, Cambridge.
- Liu, H.T. and Srnsky, R.A., 1990, "Laboratory Investigation of Atmospheric Effects on Vortex Wakes", Flow Research Inc., Rept. No. 497, Bellville, WA.
- Machol, R., 1993, "Wake Vortices – A Primer", FAA Aviation Safety Journal, Vol. 3, No. 1, pp. 16-19.
- Zheng, Z.C., 1993 "The Influence of Reynolds Number and Atmospheric Effects on Aircraft Wake Vortices Near the Ground", Ph.D. Dissertation, Mechanical Engineering and Mechanics Dept., Old Dominion Univ., Norfolk, VA.
- Zheng, Z.C. and Ash, R.L., 1996, "Study of Aircraft Wake Vortex Behavior Near the Ground", AIAA Journal Vol. 34, No.3, pp. 580-588.

DYNAMIC BEHAVIOUR OF AIRCRAFT WAKE DURING LANDING AND TAKE OFF OPERATIONS

Miguel Hiroo Hirata

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – DME/IEM
Av. BPS, 1303, Pinheirinho, 37500-903 Itajubá, MG
hirata@iem.efei.br

José Eugênio Rios Ricci

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – DME/IEM
Av. BPS, 1303, Pinheirinho, 37500-903 Itajubá, MG
ricci@iem.efei.br

Waldir de Oliveira

Escola Federal de Engenharia de Itajubá – DME/IEM
Av. BPS, 1303, Pinheirinho, 37500-903 Itajubá, MG
waldir@iem.efei.br

Abstract. *Due to the increasing frequency of operations and the size of airplanes, the landing and take off operations are becoming critical in almost all the big sized airports. The reduction of the time between subsequent operations is of importance to increase the airport efficiency. To specify the minimum lag between operations it is necessary to understand the dynamics of the dissipating wake, on the airport ground. The objective of this paper is to utilize the Vortex Method to numerically study the airplane wake, simulating it by a cloud of discrete vortices.*

Keywords: *ground effect, airplane wake, vortex method, landing and take off operation, numerical simulation.*