

## ESCOAMENTO SECUNDÁRIO EM DUTOS DE SEÇÃO NÃO CIRCULAR USANDO UM MODELO DE TURBULÊNCIA $k-\varepsilon$ NÃO LINEAR

**Marcelo Assato** – e-mail: assato@mec.ita.br

**Marcelo J.S. de-Lemos** – e-mail: delemos@mec.ita.br

Departamento de Energia - IEME, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA  
12228-900 São José dos Campos - SP - Brasil

***Resumo.** Este trabalho apresenta um estudo numérico do escoamento turbulento completamente desenvolvido em dutos de seção não circular, envolvendo escoamento secundário, utilizando um modelo  $k-\varepsilon$  não linear. Este modelo mostra ser capaz de prever os escoamentos secundários em dutos de seção não circular, um fenômeno que o modelo  $k-\varepsilon$  padrão (linear) é incapaz de descrever. A discretização das equações é feita usando o método dos volumes finitos num sistema de coordenadas não-ortogonal. O algoritmo SIMPLE é empregado para correção do campo de pressão. Resultados dos cálculos, para o caso do escoamento completamente desenvolvido num duto de seção quadrada, são comparados com dados experimentais, com uma extensiva análise da estrutura turbulenta presente neste tipo de escoamento.*

***Palavras-chave:** Escoamento secundário, Turbulência, Anisotropia, Volumes finitos*

### 1. INTRODUÇÃO

Muitos escoamentos turbulentos encontrados no campo de engenharia ocorrem em dutos de seção não circular, por exemplo: sistemas de ar condicionado, trocadores de calor, canais de reatores nuclear, entre outros. Um escoamento tridimensional é encontrado em todas essas configurações. E tem sido conhecido desde os trabalhos experimentais de Nikuradse (1926) que um escoamento médio transversal existe dentro de dutos de seção não circular. As componentes da velocidade secundária resultantes nas seções transversais de dutos pode ser somente 1% da velocidade axial média, mas contabiliza uma forte influência no comportamento local e total do escoamento. Cálculos de queda de pressão e transferência de calor, por exemplo, tem que levar em conta a influência dos escoamentos secundários. Diversos trabalhos experimentais tem sido realizados, e um dos mais completos que descreve o escoamento turbulento em duto de seção retangular (na verdade, praticamente quadrada, 40x41 mm) foi fornecido por Melling & Whitelaw (1976), que utilizaram uma instrumentação com anemômetro laser-Doppler e foram os primeiros a quantificar o desenvolvimento axial da velocidade média, as intensidades turbulentas, as tensões cisalhantes de Reynolds, a energia cinética turbulenta, e a velocidade secundária média.

De outra forma, Nakayama *et al.* (1983), analisaram o escoamento completamente desenvolvido em dutos de seção retangular e trapezoidal usando o método de diferenças finitas baseado no modelo de tensões algébricas de Launder & Ying (1972). Outros trabalhos utilizando este tipo de modelo de turbulência foram realizados, e sempre apresentaram uma boa concordância aos dados experimentais. No entanto, estes modelos, apesar das simplificações realizadas em cima dos modelos de tensões de Reynolds, não havendo mais a necessidade de resolver a equação de transporte para cada componente individual do tensor tensão de Reynolds, reduzindo para expressões algébricas, continuam requerendo um maior esforço computacional para as equações de  $k$ ,  $\varepsilon$  e tensor das tensões de Reynolds, em vista aos modelo  $k$ - $\varepsilon$  de viscosidade turbulenta.

No presente trabalho é mostrado que uma simples implementação de um termo não linear no modelo  $k$ - $\varepsilon$  (padrão) de viscosidade turbulenta prediz de forma satisfatória o escoamento turbulento em duto de seção quadrada comparado com dados experimentais de Melling & Whitelaw (1976). Um tratamento especial para o problema do escoamento perto dos cantos (corners) também é apresentado.

## 2. EQUAÇÕES DE TRANSPORTE E CONSTITUTIVA

As equações conservativas, de massa, de momento e escalar, para a determinação do escoamento secundário turbulento podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \operatorname{div}(\rho \vec{v} U_i - \vec{t}_i) = s_{u_i}, \quad \operatorname{div}(\rho \vec{v} \phi - \vec{q}_\phi) = s_\phi. \quad (1)$$

As equações de momento para o cálculo das componentes da velocidade secundária  $U$ ,  $V$  e da velocidade axial  $W$ , assumindo escoamento totalmente desenvolvido na direção axial ( $z$ ), podem ser expressas da seguinte forma:

$$\text{Momento em } x: \rho \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 U + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\text{Momento em } y: \rho \left( U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 V + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\text{Momento em } z: \rho \left( U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} \right) = G + \mu \nabla^2 W + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}, \quad (4)$$

onde  $G = -\frac{\partial P}{\partial z}$  é o gradiente de pressão axial constante que dirige o escoamento. As equações de transporte modeladas para a energia cinética turbulenta  $k$ , e taxa de dissipação turbulenta  $\varepsilon$  são respectivamente dadas por:

$$U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_t}{\rho \sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \varepsilon, \quad (5)$$

$$U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mu_t}{\rho \sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (6)$$

onde  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$ ,  $\sigma_k$  e  $\sigma_\varepsilon$  são constantes adimensionais tomados igual a 1.44, 1.92, 1.0 e 1.3, respectivamente. E  $\mu_t$  é a viscosidade turbulenta e  $P_k$  representa o termo de produção de turbulência dados respectivamente por:

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad P_k = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad (7)$$

No modelo  $k$ - $\varepsilon$  padrão de turbulência, o tensor da tensão de Reynolds é tomado ser da seguinte forma:

$$\tau_{ij} = (\mu_t S_{ij})^L, \quad (8)$$

onde  $S_{ij}$  representa o tensor de deformação, expresso por:

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (9)$$

A condição necessária para que modelos de turbulência possam simular escoamentos secundários, conforme Speziale (1984) demonstra, é que a velocidade média axial deve dar origem a uma diferença das tensões normais de Reynolds não nula, ou seja,  $\tau_{yy} - \tau_{xx} \neq 0$ . Conforme pode-se notar da equação (8), o modelo  $k$ - $\varepsilon$  padrão, por sua característica isotrópica, viola a condição necessária, demonstrando ser incapaz de descrever os escoamentos secundários.

Os modelos  $k$ - $\varepsilon$  não lineares corrigem este problema com a inclusão de termos não lineares. Diversos modelos foram apresentados como os de: Speziale (1987), Yoshizawa (1987), Rubinstein & Barton (1990), Shih *et al.* (1993), fornecendo desta forma um certo grau de anisotropia necessária para descrever os escoamentos secundários. Neste trabalho é incluído somente um termo que aparece em todos os modelos citados. Assim, acrescentando um termo não linear na equação (8), a expressão para as tensões de Reynolds é a seguinte:

$$\tau_{ij} = (\mu_t S_{ij})^L + \left( c_{INL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} [S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}] \right)^{NL}, \quad (10)$$

onde  $c_{INL}$  é uma constante resultante do processo de calibração do modelo. Logo, tem-se as seguintes tensões normais e cisalhantes de Reynolds:

$$\tau_{xx} = c_{INL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right], \quad \tau_{yy} = c_{INL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = c_{INL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right], \quad \tau_{xz} = \mu_t \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu_t \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (12)$$

Apresentando a seguinte diferença das tensões normais de Reynolds:

$$(\tau_{yy} - \tau_{xx}) = c_{INL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (13)$$

que em geral, é diferente de zero, conforme foi mostrado no trabalho realizado por Assato & de Lemos (2000), e desta forma satisfaz a condição necessária para a predição do escoamento secundário. Tem-se observado que para este tipo de escoamento, as derivadas das velocidades  $U$  e  $V$  são aproximadamente zero, portanto omitidas nas equações (11)-(13).

O termo de produção de turbulência possui a seguinte expressão:

$$P_k = \tau_{xz} \frac{\partial W}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (14)$$

### 3. TRATAMENTO NUMÉRICO

O processo de discretização das equações é feito usando o método dos volumes finitos num sistema de coordenadas não-ortogonal. O algoritmo SIMPLE é utilizado para correção do campo de pressão. A lei de parede hidrodinâmica aplicada é a standard (padrão) de duas camadas. A equação de momento axial é tratada como se fosse uma equação de um escalar, com o termo  $G$  presente na equação (4) tratado no termo fonte juntamente com os termos difusivos (linear e não linear). Todo o tratamento numérico e o processo de discretização são mostrados em detalhes em Assato & de Lemos (1998) e Assato & de Lemos(1999) para tratamento explícito e implícito, respectivamente.

Em coordenadas generalizadas, as derivadas para o ponto central  $P$  dos volumes de controle são expressas da seguinte forma:

$$\left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_P = \frac{(y_n - y_s)(W_e - W_w) - (y_e - y_w)(W_n - W_s)}{(y_n - y_s)(x_e - x_w) - (y_e - y_w)(x_n - x_s)} = \frac{\Delta y_\eta^P \cdot \Delta W_\xi^P - \Delta y_\xi^P \cdot \Delta W_\eta^P}{\Delta y_\eta^P \cdot \Delta x_\xi^P - \Delta y_\xi^P \cdot \Delta x_\eta^P} = \frac{\pi_e^P}{\Pi_P}, \quad (15)$$

$$\left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_P = \frac{(W_n - W_s)(x_e - x_w) - (W_e - W_w)(x_n - x_s)}{(y_n - y_s)(x_e - x_w) - (y_e - y_w)(x_n - x_s)} = \frac{\Delta W_\eta^P \cdot \Delta x_\xi^P - \Delta W_\xi^P \cdot \Delta x_\eta^P}{\Delta y_\eta^P \cdot \Delta x_\xi^P - \Delta y_\xi^P \cdot \Delta x_\eta^P} = \frac{\pi_f^P}{\Pi_P}$$

onde  $n, s, e, w$ , representam respectivamente os pontos nas faces norte, sul, leste e oeste de cada volume de controle. Os deltas envolvendo as variáveis independentes ( $\phi = x, y$ ) e variáveis dependentes ( $\phi = U, V, W, k, \varepsilon$ ) e outras demais, podem ser generalizadas da seguinte forma:

$$\Delta \phi_\xi^P = (\phi_e - \phi_w), \quad \Delta \phi_\eta^P = (\phi_n - \phi_s). \quad (16)$$

Assim, as tensões normais e cisalhantes de Reynolds na forma discretizada ficam:

$$\tau_{xx} = c_{INL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon (\Pi_P)^2} \left[ \frac{1}{3} (\pi_e^P)^2 - \frac{2}{3} (\pi_f^P)^2 \right], \quad \tau_{yy} = c_{INL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon (\Pi_P)^2} \left[ \frac{1}{3} (\pi_f^P)^2 - \frac{2}{3} (\pi_e^P)^2 \right], \quad (17)$$

$$\tau_{xy} = c_{INL} \mu_t \frac{k}{\varepsilon (\Pi_P)^2} [\pi_e^P \pi_f^P], \quad \tau_{xz} = \mu_t \frac{\pi_e^P}{\Pi_P}, \quad \tau_{yz} = \mu_t \frac{\pi_f^P}{\Pi_P}, \quad (18)$$

e o termo de produção na seguinte forma:

$$P_k = \tau_{xz} \frac{\pi_e^P}{\Pi_P} + \tau_{yz} \frac{\pi_f^P}{\Pi_P}. \quad (19)$$

A constante  $c_{INL}$  adotada no presente trabalho é a proposta por Speziale (1987), igual a  $-0.1524$ .

Em vista da complexidade dos efeitos dos cantos (corners) da geometria sobre o campo turbulento, diversos trabalhos como os de Nisizima (1990), Mompean et al. (1996), que utilizam do modelo  $k-\varepsilon$  inserem uma função  $f_\mu$  na definição da viscosidade turbulenta, afim de contabilizar melhor os efeitos difusivos viscosos na região perto dos cantos:

$$\mu_t = c_\mu \rho f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (20)$$

A função de amortecimento  $f_\mu$  apresentada por Nisizima (1990) é dada por:

$$f_\mu = \left(1 - \exp(-0.08y^+)\right)^2, \quad (21)$$

onde  $y^+$  é a distância adimensional expressa como:

$$y^+ = \frac{\rho c_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}} \delta n}{\mu}. \quad (22)$$

O trabalho de Mompean et al. (1996) apresenta a seguinte formulação:

$$f_\mu = \frac{1}{c_\mu} \frac{(\overline{uv})^2 + (\overline{uw})^2}{k^2} \frac{\varepsilon}{P_k}, \quad (23)$$

onde  $\overline{uv}$  e  $\overline{uw}$  são as tensões cisalhantes de Reynolds e  $P_k$  é o termo de produção de turbulência.

Segundo Mompean et al. (1996) a introdução de  $f_\mu$  é necessária para diminuir os valores da viscosidade turbulenta perto dos cantos.

No presente trabalho assume-se uma abordagem diferente, utilizando para os volumes de controle próximos a parede o modelo não linear de Shih et al. (1993), que apresenta valores baixos para  $c_{1NL}$  nesta região. Assim, para estes volumes de controle a constante  $c_{1NL} = -0.1524$  adotado do trabalho de Speziale (1987) deixa de ser constante e passa a ser determinada da seguinte forma:

$$c_{1NL} = \frac{0.75/c_\mu}{1000 + s^3}, \quad (24)$$

$$\text{onde: } c_\mu = \frac{2/3}{1.25 + s + 0.9\Omega}, \quad (25)$$

e  $s$  e  $\Omega$  em suas formas discretizadas dadas, respectivamente como:

$$s = \Omega = \frac{k}{\varepsilon \Pi_p} \sqrt{(\pi_e^p)^2 + (\pi_f^p)^2}. \quad (26)$$

A viscosidade turbulenta para os volumes próximos a parede passam a ser determinadas utilizando o  $c_\mu$  fornecida pela equação (25).

#### 4. RESULTADOS

Esta seção descreve os resultados obtidos para o escoamento completamente desenvolvido em dutos de seção quadrada. Comparações entre os resultados obtidos pelo modelo  $k-\varepsilon$  não linear e experimental de Melling & Whitelaw (1976) são apresentados para número de Reynolds de 42000. Devido a simetria encontrada neste tipo de escoamento, os resultados encontram-se ilustrados somente em um quadrante do duto quadrado. A figura 1

mostra o campo da velocidade axial adimensionalizado pela velocidade axial máxima. Pode-se notar que, pelo fato do escoamento secundário encontrar-se associado com a turbulência, o campo da velocidade axial é distorcido. O modelo não linear sobreprediz os contornos da velocidade axial, mostrando um escoamento axial desenvolvido mais “achatado”.

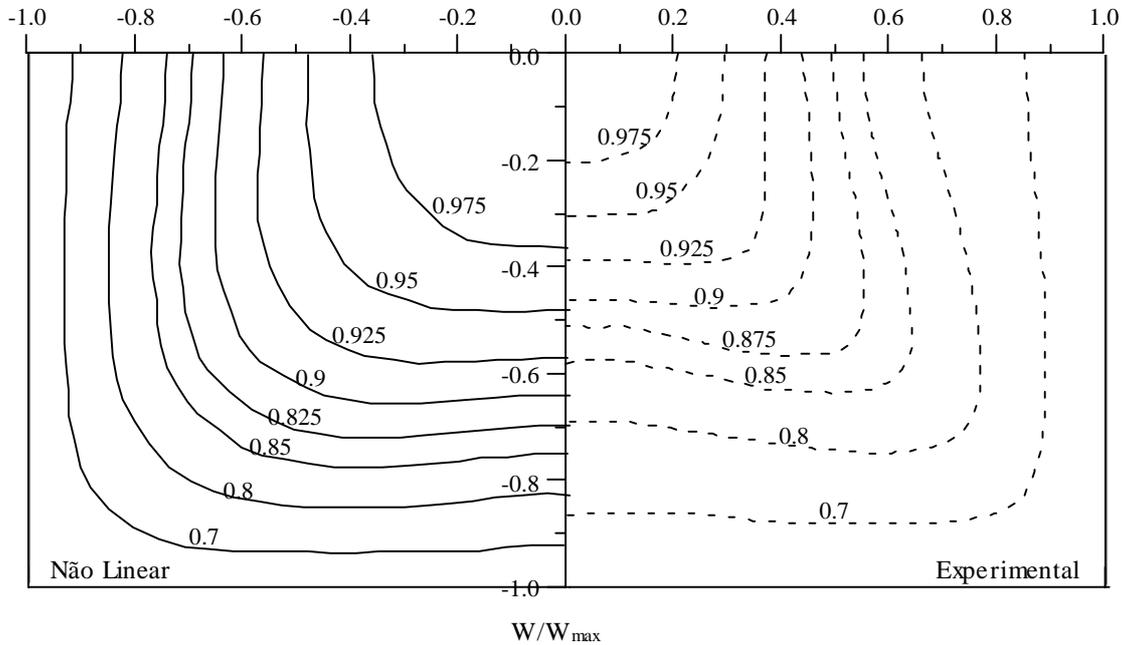


Figura 1 – Contorno da velocidade axial  $W/W_{max}$

As linhas de corrente do escoamento secundário é mostrado na figura 2. O sentido do escoamento ocorre do centro para o canto e retorna para o centro ao longo da parede, formando ao todo oito vórtices. É notado que Melling & Whitelaw (1976), não mostram as linhas de corrente do escoamento secundário, somente a distribuição do vetor da velocidade secundária, porém de forma não muito clara (sem simetria), tornando difícil comparações.

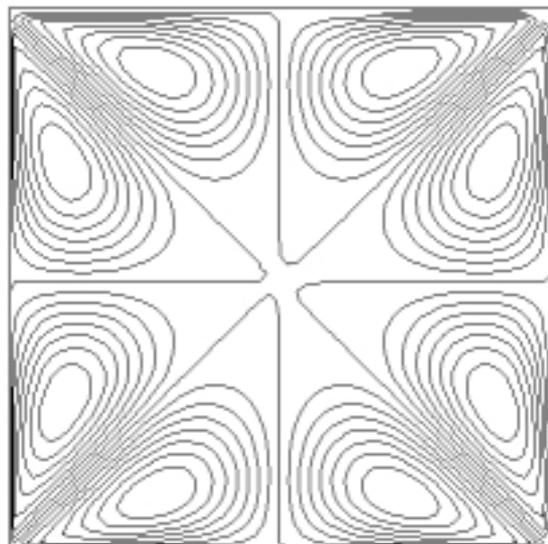


Figura 2 – linhas de corrente do escoamento secundário

As figuras 3 e 4 mostram respectivamente os contornos das tensões normais de Reynolds (as vezes referenciadas como intensidades turbulentas transversais) em  $x$  e  $y$ . As figuras mostram uma boa concordância em alguns regiões, principalmente mais no centro, onde não sofrem muito a interferência da parede.

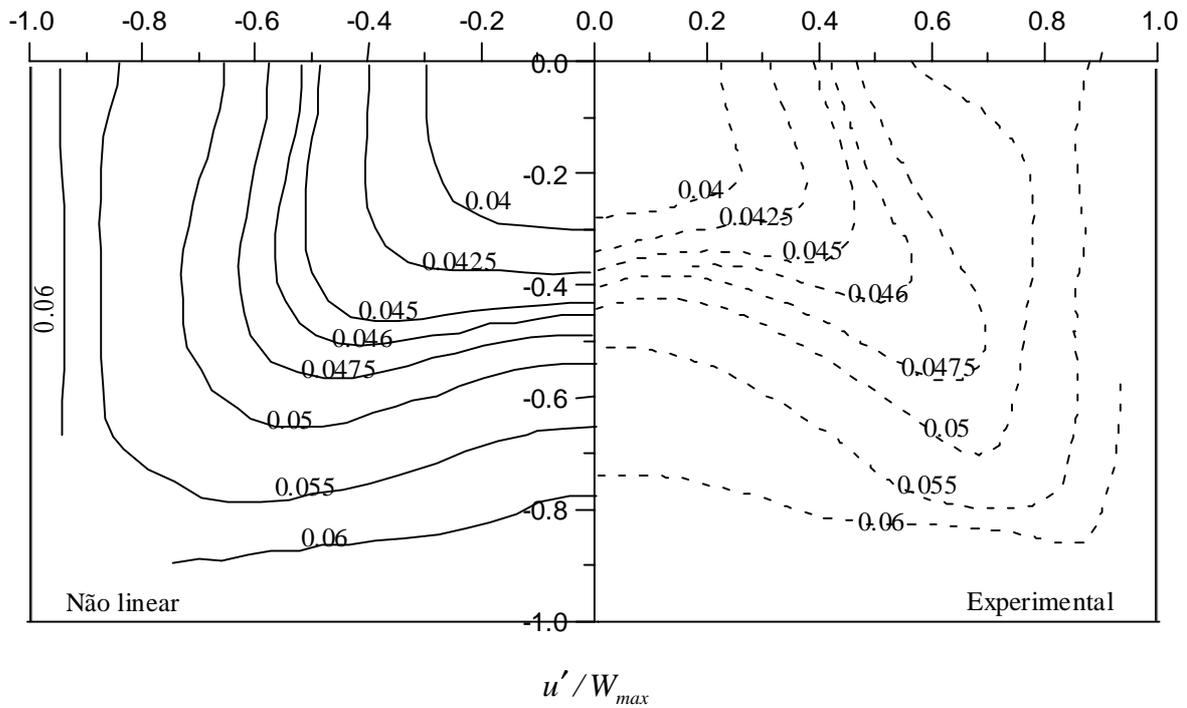


Figura 3 – Contorno da intensidade turbulenta  $u' / W_{max}$

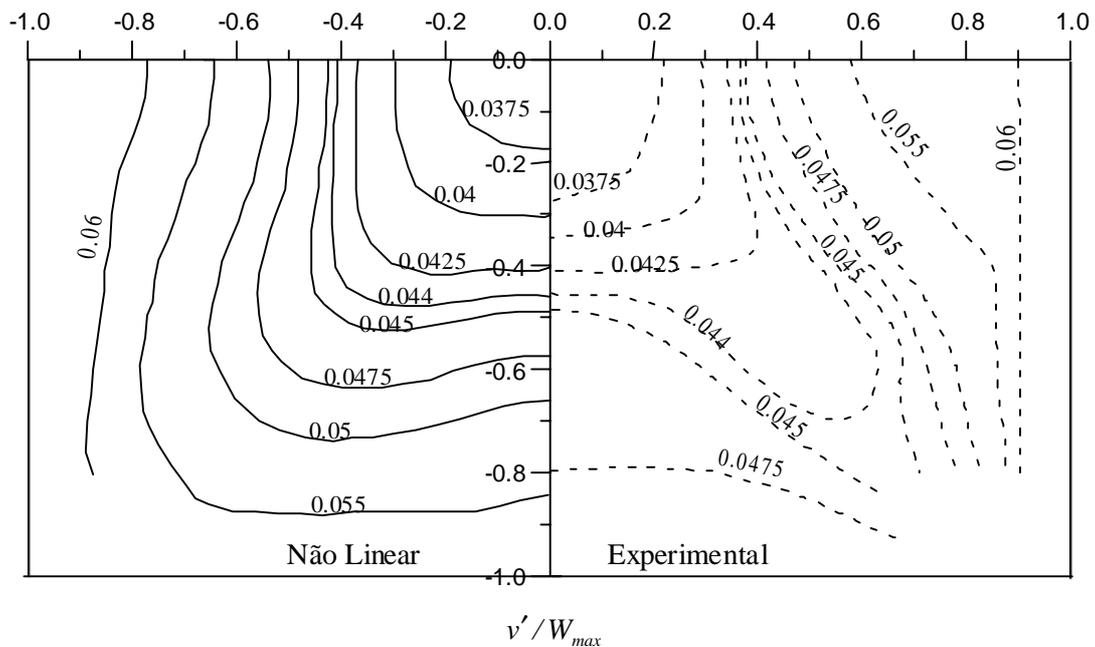


Figura 4 – Contorno da intensidade turbulenta  $v' / W_{max}$

Os contornos das tensões cisalhantes de Reynolds  $\overline{uw}$  e  $\overline{vw}$  são ilustrados, respectivamente, nas figuras 5 e 6. Também são adimensionalizadas em função da velocidade axial máxima. O modelo não linear, a exemplo das figuras 3 e 4, reproduzem qualitativamente bem os contornos das quantidades turbulentas. Apresentando concordância para algumas isolinhas. Em algumas localidades o modelo não linear não consegue descrever determinados efeitos observados experimentalmente, conforme pode-se notar das figuras abaixo.

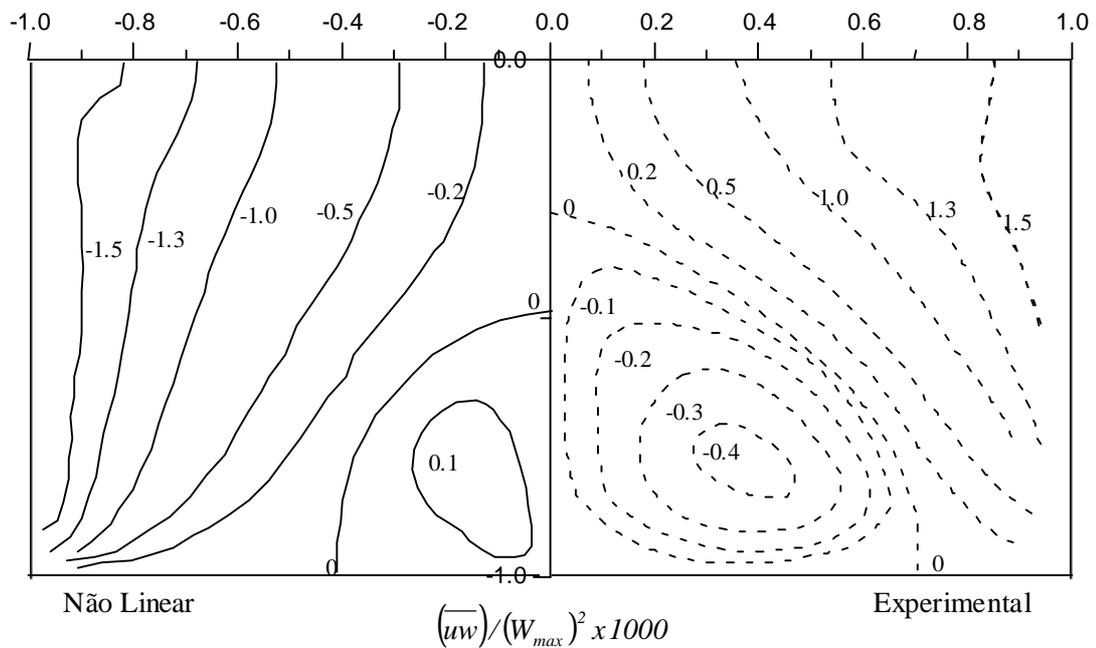


Figura 5 – Contorno da tensão cisalhante de Reynolds  $(\overline{uw})/(W_{max})^2 \times 1000$

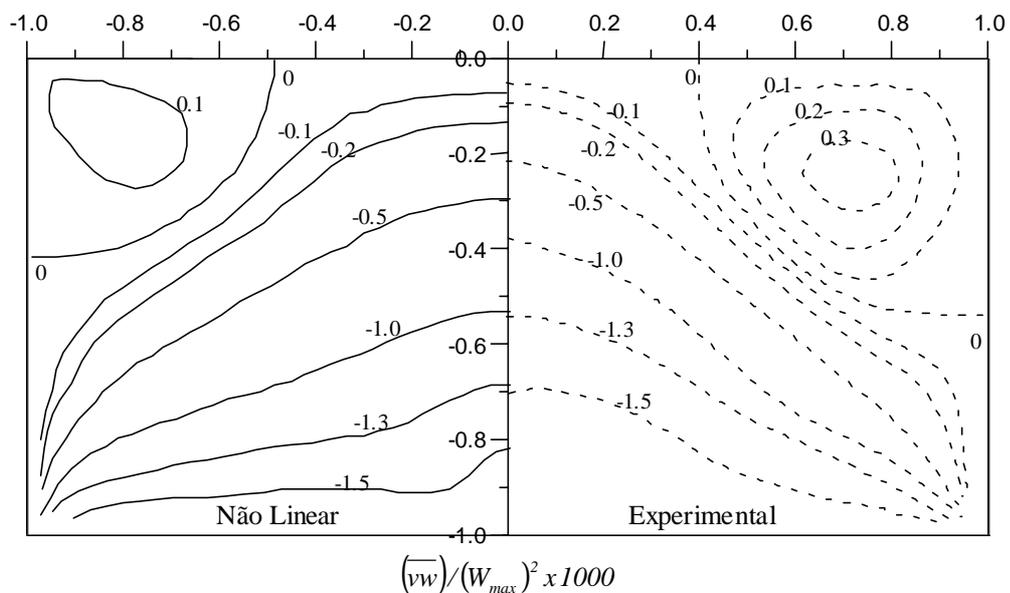


Figura 6 – Contorno da tensão cisalhante de Reynolds  $(\overline{vw})/(W_{max})^2 \times 1000$

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi demonstrado que uma simples inclusão de um termo não linear (quadrático nos gradientes da velocidade média) no modelo  $k$ - $\varepsilon$  padrão de viscosidade turbulenta prediz de forma satisfatória o escoamento turbulento em duto de seção quadrada. Uma pequena implementação nos termos difusivos nas equações de momento devido ao termo não linear foi necessária. E para as equações de  $k$  e  $\varepsilon$ , somente o termo de produção de turbulência  $P_k$  sofreu uma pequena modificação. A determinação das componentes do tensor da tensão de Reynolds é bem simples, como pode ser notado nas equações (11) e (12).

O modelo não linear produziu o campo da velocidade axial totalmente simétrico, e como pode ser observado na figura 1, devido a presença do escoamento secundário, o campo apresenta distorcido. O modelo não consegue prever com precisão a velocidade axial, mostrando um escoamento axial desenvolvido mais “achatado”. As linhas de corrente apresentadas na figura 2 encontram-se simétricas, com a formação de oito vórtices, em concordância as observadas em literatura. As quantidades turbulentas mostradas nas figuras 3-6 reproduzem qualitativamente bem os contornos, mostrando certa concordância em algumas isolinhas, porém em algumas regiões, o modelo encontra dificuldades, divergindo dos resultados experimentais de Melling & Whitelaw (1976). Essas divergências possivelmente podem ser reduzidas com uma melhora do campo da velocidade axial através de um melhor tratamento junto a parede. A lei de parede de duas camadas utilizadas no presente trabalho, calcula altos valores da viscosidade turbulenta nos volumes de controle próximos a parede. Foi observado que, se o programa computacional for executado sem nenhum tratamento para estes volumes próximos a parede, depois de algumas iterações o programa começa a divergir, apresentando resultados incoerentes. O tratamento junto a parede apresentado por Mompean et al. (1996) dado pela equação (23) foi testado e apresentou boa estabilidade ao código computacional, porém foi notado que a viscosidade turbulenta calculada para os volumes de controle próximos a parede praticamente zeravam, apresentando uma incoerência na análise do escoamento turbulento. O tratamento junto a parede proposto neste trabalho, não tenta diminuir os valores das viscosidades turbulenta próximo a parede através da inclusão da função  $f_\mu$ , o tratamento ocorre por uma melhor calibração de  $c_{INL}$  e  $\mu_t$  apresentadas pelas equações (24)-(26), e tem proporcionado boa convergência e viscosidades turbulenta coerentes junto a parede.

### *Agradecimentos*

Os autores agradecem ao CNPq pela ajuda financeira durante preparação deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- Assato, M., de Lemos, M.J.S., 1998 , Development of a non-linear turbulence model for recirculating flows using generalized coordinates, *7<sup>th</sup> Encit – Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences*, vol. 2, Rio de Janeiro, pp. 1386-1391.
- Assato, M., de Lemos, M.J.S., 1999, Tratamento Numérico Implícito para a Implementação de um Modelo Não Linear de Turbulência em Coordenadas Generalizadas (em CD-ROM), *XV COBEM - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Águas de Lindóia, SP.

- Assato, M., de Lemos, M.J.S., 2000, Simulação numérica aplicando um modelo de turbulência k- $\epsilon$  não linear em coordenadas generalizadas, *CONEM2000 – Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, Natal, Rio Grande do Norte.
- Launder, B.E., Ying, W.M., 1972, Secondary flows in ducts of square cross-section, *J. Fluid Mech.*, vol. 54, pp. 289-295.
- Melling, A., Whitelaw, J.H., 1976, Turbulent flow in a rectangular duct, *J. Fluid Mech.*, vol. 78, pp. 289-315.
- Mompean, G., Gavrilakis, S., Machiels, L., Deville, M.O., 1996, On predicting the turbulence-induced secondary flows using nonlinear k- $\epsilon$  models, *Phys. Fluids* 8 (7), pp. 1856-1868.
- Nakayama, A., Chow, W.L., Sharma, D., 1983, Calculation of fully development turbulent flows in ducts of arbitrary cross-section, *J. Fluid Mech.*, vol. 128, pp. 199-217.
- Nikuradse, J., 1926, Untersuchung uber die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Stromungen, *Diss. Gottingen*, VDI-forschungsheft 281.
- Nisizima, S., 1990, A numerical study of turbulent square-duct flow using an anisotropic k- $\epsilon$  model, *Theoretical and Computational of Fluid Dynamics*, 2, pp. 61-72.
- Rubinstein, R., Barton, J.M., 1990, Renormalization group analysis of the stress transport equation, *Phys Fluids A* 2, pp. 1472.
- Shih, T.H., Zhu, J., Lumley, J.L., 1993, A realisable Reynolds stress algebraic equation model, NASA TM-105993.
- Speziale, C.G., 1984, On the origin of turbulent secondary flows in non-circular ducts, *In Computation of Internal Flows: Methods and Applications*, ASME FED 14, p.101.
- Speziale, C.G., 1987, On nonlinear k-l and k-  $\epsilon$  models of turbulence, *J. Fluid Mech.*, vol. 176, pp. 459-475.
- Yoshizawa, A., 1987, Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation, *Phys. Fluids*, 27, pp. 1377-1387.

**Abstract.** *This work deals with numerical predictions of turbulence-driven secondary flow that appear in ducts of non-circular cross section. These small currents are caused by differences between normal stresses. Fully developed flow was calculated making use of a non-linear k- $\epsilon$  turbulence model. Governing equation for the mean and turbulent fields were discretized with the help of the control-volume method. A non-orthogonal grid mapped the computational domain. The SIMPLE method was employed for relaxing the dependent variables. Results for the fully developed flow field in a square duct were compared with experiments. An extensive analysis of the turbulence structure in such flow was carried out.*