

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR COMBINADA CONVECÇÃO-RADIAÇÃO EM DUTOS CIRCULARES

Fernando D. Foroni - e-mail: dalessio@h8.ita.br

Marcelo J.S. de-Lemos – e-mail: delemos@mec.ita.br

Departamento de Energia - IEME, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA
12228-900 São José dos Campos - SP - Brasil

***Resumo.** O presente trabalho apresenta soluções numéricas para a transferência de calor combinada radiação-convecção no interior de dutos circulares. O fluido é considerado transparente à radiação e as temperaturas do gás e da parede são calculadas. Foi desenvolvido um programa em plataforma C que calcula primeiramente os casos limites de transferência de calor por convecção e radiação. Posteriormente, o programa calcula iterativamente uma solução intermediária utilizando a regra de Simpson e adotando como critério de convergência a comparação da diferença entre as duas últimas tentativas com um erro pré-selecionado. Foram também calculados resultados para coeficientes de filme constantes e variáveis com a posição axial do tubo.*

***Palavras-chave:** Transferência de Calor, Radiação, Convecção, Combinada.*

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação

Os mecanismos de transferência de calor a altas temperaturas são freqüentemente associados a altos fluxos de calor, onde, nestes casos, pode haver a combinação de radiação e convecção térmica. O efeito de superposição da radiação é encontrado principalmente no resfriamento de regiões quentes, transportando o calor para regiões mais frias. Em algumas instâncias, esse transporte imporá uma carga adicional no local a ser mantido frio e, portanto, essa quantidade de energia deve ser estimada. Em outros casos, radiação irá ajudar a resfriar uma região aquecida indesejadamente.

Para resolver a equação integral de energia para o balanço de calor na parede, as integrais foram numericamente calculadas fazendo-se uso das soluções dos casos limites para a radiação pura e convecção pura como tentativas iniciais. Iterações subseqüentes utilizando os valores obtidos anteriormente foram produzidas até obtermos a convergência com uma tolerância pré-selecionada. Essa abordagem será explicada abaixo, e tem sido utilizada satisfatoriamente para resolver uma grande variedade de problemas, como em Sparrow *et al* (1962) e Sparrow & Jonsson (1963).

Outro procedimento comum para resolver equações integrais da radiação consiste no “*Separated Kernel Method (SKM)*”, que consiste basicamente na transformação da integral em uma equação diferencial através da aproximação do padrão radiativo como uma função separada.

1.2. Revisão da Literatura

Radiação pura (Usiskin & Siegel (1960)) bem como a combinação de radiação e convecção em tubos (Perlmutter & Siegel (1961), Siegel & Perlmutter (1961)) tem sido extensivamente estudados na literatura. Usiskin & Siegel (1960) obtiveram uma solução numérica para radiação em tubos curtos dividindo o tubo em seções isotérmicas. Um balanço de calor em cada região foi tomado, resultando em um conjunto de equações não-lineares algébricas resultantes da temperatura da parede em cada zona isotérmica.

Perlmutter & Siegel (1961), apresentaram uma análise de um problema similar ao presente, mas um fluxo de calor constante foi estudado. Neste trabalho, soluções numéricas para um corpo negro foram tomadas para mostrar o efeito de cada parâmetro independente, como o comportamento do gás e a temperatura do sistema. Dois métodos foram empregados, o SKM e a solução numérica direta das equações integrais. O primeiro promove a transformação do balanço de energia em uma equação diferencial de segunda ordem que, junto com a equação diferencial de primeira ordem para a temperatura do gás, foram integradas numericamente. No segundo método, a equação integral foi colocada em forma de diferenças finitas e transformadas em relações algébricas não-lineares resolvidas pelo Método de Newton-Raphson. Os resultados foram satisfatórios para tubos curtos e cálculos para tubos longos não foram realizados devido ao número de equações envolvidas. Siegel & Perlmutter (1961) usaram a mesma geometria de Perlmutter & Siegel (1961) e estenderam sua análise para uma superfície cinza. Em de Lemos (1985), soluções similares foram apresentadas considerando-se fixo o coeficiente de película h .

1.3. Objetivo

As substituições sucessivas para resolver equações integrais lineares podem ser mostradas por um número grande de métodos e é bem documentada na literatura. Sparrow *et al* (1962) e Sparrow & Jonsson (1963) obtiveram a solução para problemas em que as equações são lineares. No presente texto é apresentado uma extensão dos resultados em de Lemos (1985) considerando-se agora h variável. Busca-se, em última análise, uma avaliação da hipótese feita naquele trabalho sobre a constância do coeficiente de película.

2. ANÁLISE

2.1. Geometria

A superfície de um tubo circular com diâmetro D e comprimento L é submetida a um fluxo axi-simétrico de calor $q_w(x)$, onde x é a coordenada ao longo do tubo. O fluxo de calor tem distribuição senoidal e valor máximo em $x = L/2$. O gás entra no tubo com T_{gi} e velocidade média u_m , e sai com temperatura T_{ge} . A superfície interna é assumida cinza, com emissividade ε independente do nível de temperatura. Considerando $Pr \sim 0.7$ e as variações de temperatura esperadas, as demais propriedades do fluido podem ser mantidas constantes.

2.2. Balanço de Energia

O balanço de energia será derivado seguindo-se o método da radiosidade, também utilizado por Siegel & Perlmutter (1961). Nesse método, o fluxo radiante total deixando um elemento da superfície é a diferença entre o fluxo radiante de saída q_0 e o de entrada q_i . O fluxo q_0 é composto por uma parte emitida pelo próprio elemento, e uma parte refletida do fluxo de entrada, que representa o fluxo de saída de outro elemento. Portanto, o balanço de fluxo deixando a superfície por radiação, convecção e o fluxo vindo da parede podem ser representados como segue

$$q_w(X) + q_i = q_0 + h[T_w(X) - T_g(X)] \quad (1)$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor convectiva, q o calor por unidade de área da parede do tubo, w o subscrito indicando parede, g o subscrito indicando gás, i o subscrito indicando entrada do tubo, o subscrito indicando saída tubo, T a temperatura e X o comprimento axial medido a partir da entrada do tubo.

O fluxo radiativo deixando a superfície pode ser escrito como

$$q_0 = \varepsilon\sigma T_w^4 + (1 - \varepsilon)q_i \quad (2)$$

sendo ε a emissividade da superfície e σ a constante de Stefan-Boltzmann.

O fluxo radiante de entrada é composto por radiação vinda do fluxo proveniente de outros elementos da superfície e radiação das extremidades do tubo. Logo temos

$$q_i = \sigma T_{ri}^4 F(x) + \sigma T_{re}^4 F(\lambda - x) + \int_0^x q_0(\xi) K(x - \xi) d\xi + \int_x^\lambda q_0(\xi) K(\xi - x) d\xi \quad (3)$$

onde F é o fator de forma entre um elemento da parede e a abertura circular no fim do tubo, x a coordenada adimensional X/D , D o diâmetro do tubo, λ o comprimento adimensional L/D , K um fator de configuração e ξ a variável muda de integração.

O fator de configuração geométrica $F(x)$ de um elemento da superfície do tubo é dado em Sparrow & Cess (1978), como,

$$F(x) = \left[(x^2 + 1/2)/(x^2 + 1) \right]^{1/2} - x, \quad x \geq 0 \quad (4)$$

e o fator da configuração $K(x)$ entre dois anéis dentro do tubo é (Siegel & Perlmutter (1961))

$$K(x) = 1 - \left[(x^3 + 3x/2)/(x^2 + 1) \right]^{3/4}, \quad x \geq 0 \quad (5)$$

Substituindo as Eqs. (2) e (3) na Eq. (1), temos

$$q_w(X) + \sigma T_{ri}^4 F(x) + \sigma T_{re}^4 F(\lambda - x) + \int_0^x q_0(\xi) K(x - \xi) d\xi + \int_x^\lambda q_0(\xi) K(\xi - x) d\xi = q_0 + h[T_w(X) - T_g(X)] \quad (6)$$

Usando a Eqs. (1) e (2), podemos escrever

$$q_0 = \varepsilon\sigma T_w^4 + (1 - \varepsilon)[q_0 + h(T_w - T_g) - q_w(X)]$$

$$\text{ou } q_0 = \varepsilon\sigma T_w^4 + \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} [h(T_w - T_g) - q_w(X)] \quad (7)$$

Para introduzirmos outra equação para ser resolvida junto com a Eq. (6), necessitamos do balanço de energia de um elemento cilíndrico de fluido de comprimento dx . O incremento médio de energia interna para o fluido cruzando dx pode ser escrito como $\rho u_m c_p (\pi D^2 / 4) dT$

onde ρ é a densidade do gás, u_m a velocidade média do gás e c_p o calor específico do fluido.

Uma vez que o fluido é considerado transparente, esta quantidade deve ser igual ao fluxo de calor convectivo somente. Portanto temos,

$$h\pi D dx (T_w - T_g) = \rho u_m c_p (\pi D^2 / 4) dT$$

$$\text{ou } \frac{dT}{dx} = S (T_w - T_g) \quad (8)$$

onde $S = 4 \left(\frac{\mu}{\rho u_m D} \right) \left(\frac{k}{\mu c_p} \right) \left(\frac{hD}{k} \right)$ é o número de Stanton.

Integrando a Eq. (8) de 0 a x ,

$$T = T_{gi} + \int_0^x S (T_w - T_g) dx \quad (9)$$

O balanço de energia para a parede e o gás forma um sistema de duas equações e duas variáveis, $T_w(x)$ e $T_g(x)$ que pode ser resolvido numericamente.

O fluxo de calor da parede $q_w(x)$, agora pode ser introduzido uma vez que a Eq. (6) é escrita para qualquer distribuição de $q_w(x)$.

A função considerada é

$$q_w(x) = q^1 \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) + q^2$$

Finalmente, escrevendo equações para $T_w(x)$ e $T_g(x)$ e $q_w(x)$ introduzindo parâmetros não-dimensionais definidos como

$$H = \left(\frac{h}{q_*} \right) \left(\frac{q_*}{\sigma} \right)^{1/4}; t = \left(\frac{\sigma}{q_*} \right)^{1/4} T$$

$$q_*^1 = \frac{q^1}{q_*}; q_*^2 = \frac{q^2}{q_*}; q_w^+ = \frac{q_w}{q_*}; q_o^+ = \frac{q_o}{q_*}$$

onde q_* é o fluxo de referência para a não-dimensionalidade, H é o coeficiente de transferência de calor adimensional $(h/q_*)(q_*/\sigma)^{1/4}$, t é a temperatura adimensional $(\sigma/q_*)^{1/4} T$, temos

$$q_w^+(x) + t_{ri}^4 F(x) + t_{re}^4 F(\lambda - x) + \int_0^x q_o^+(\xi) K(x - \xi) d\xi + \int_x^\lambda q_o^+(\xi) K(\xi - x) d\xi = q_o^+ + H [t_w(x) - t_g(x)] \quad (10)$$

$$t_g(x) = t_{gi} + \int_0^x S [t_w(x) - t_g(x)] dx \quad (11)$$

$$\text{onde } q_w^*(x) = q_*^1 \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) + q_*^2 \quad (12)$$

$$q_o^* = t_w^4(x) + \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} [H [t_w(x) - t_g(x)] - q_w^+(x)] \quad (13)$$

Eqs. (10) e (11) são resolvidas numericamente para $q_*^1 = 0$ e $q_*^2 = 0$. Os casos limite (radiação pura e convecção pura), procedimento numérico e os resultados são apresentados abaixo.

2.3 Solução para Radiação Pura

Nesta solução, será assumida uma aproximação exponencial (SKM) que é conhecida por fornecer bons resultados em tubos curtos (Siegel & Perlmutter (1961)).

Desconsiderando o termo de convecção na Eq. (6) teremos

$$q_w(X) + \sigma T_{ri}^4 F(x) + \sigma T_{re}^4 F(\lambda - x) + \int_0^x q_0(\xi) K(x - \xi) d\xi + \int_x^\lambda q_0(\xi) K(\xi - x) d\xi = q_0 \quad (14)$$

Uma vez que a equação é linear em q_0 , podemos dividir o problema em três casos isolando os carregamentos. A solução final será a soma dos três casos.

Solução para I

A Eq. (14), usando a aproximação SKM, fica

$$q_0(x) = q_w(x) + \frac{1}{e^{2x}} \int_0^x q_0(\xi) e^{2\xi} d\xi + \int_x^\lambda q_0(\xi) \frac{1}{e^{2\xi}} d\xi \quad (15)$$

Diferenciando duas vezes e subtraindo da Eq. (15),

$$\frac{d^2 q_0}{dx^2} = -q^1 \left[\left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 + 4 \right] \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda} \right) - 4q^2$$

Integrando duas vezes,

$$q_0 = -q^1 \left[1 + \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^2 \right] \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda} \right) - 2q^2 x^2 = C_1 x + C_2.$$

Por simetria, $dq_0/dx = 0$ em $x = \lambda/2$, logo, a constante C_1 pode ser determinada como $2q^2 \lambda$. Para determinar C_2 , estimamos Eq. (4) nos pontos $x = 0$ e $x = \lambda$, e usamos a relação de simetria $T(0) = T_g(\lambda)$. Depois disso, C_2 é tomado como $q^2(\lambda + 1)$.

Logo a solução para o caso I é

$$q_0 = q_1 \left[1 + \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^2 \right] \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda} \right) + q^2 [\lambda + 1 + 2(x\lambda - x^2)] \quad (16)$$

Solução para II

Devido ao equilíbrio assumido pelo problema, a solução para esse caso é

$$q_0 = \varepsilon \sigma T_w^4 = \varepsilon \sigma T_{re}^4 \quad (17)$$

Solução para III

A equação de balanço de equilíbrio para esse caso é

$$q_0(x) = \sigma (T_{ri}^4 - T_{re}^4) F(x) + \int_0^x q_0(\xi) K(x - \xi) d\xi + \int_x^\lambda q_0(\xi) K(\xi - x) d\xi \quad (18)$$

Novamente, diferenciando duas vezes e subtraindo da Eq. (18), temos $d^2 q_0/dx^2 = 0$, logo $q_0 = C_3 x + C_4$. Como antes, as constantes podem ser encontradas aplicando a simetria no meio e no fim do tubo. A solução então será

$$q_0(x) = (0,5 + \lambda - x) \sigma (T_{ri}^4 - T_{re}^4) / (1 + \lambda) \quad (19)$$

A solução final é a soma das Eqs. (16), (17) e (19), e depois usando parâmetros não-dimensionais temos

$$q_0^+(x) = q_*^1 \left[1 + \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^2 \right] \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) + q_*^2 [\lambda + 1 + 2(x\lambda - x^2)] + t_{re}^4 (0.5 + \lambda - x)(t_{ri}^4 - t_{re}^4)/(1 + \lambda) \quad (20)$$

onde 1 corresponde ao índice referente ao termo senoidal e 2 ao termo constante e pela Eq. (7)

$$t_w^4(x) = \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} q_w^+(x) + q_0^+ \quad (21)$$

Para o caso de fluxo de calor constante, $q_*^1 = 0$ e para um fluxo de calor senoidal, $q_*^2 = 0$.

2.4 Solução para Convecção Pura

A solução para a convecção pura é trivial e somente será apresentada. Para um fluxo da parede descrito pela Eq. (10), usando h constante, temos após integrar a equação de balanço e não-dimensionalizando

$$t_g(x) - t_{gi} = \frac{\lambda S}{\pi H} q_*^1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \right] + \frac{S}{H} q_*^2 x \quad (22)$$

e

$$t_w(x) - t_{gi} = \frac{q_*^1}{H} \left\{ \frac{S\lambda}{H} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \right) + \sin\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \right\} + \frac{q_*^1}{H} (Sx + 1) \quad (23)$$

2.4 Procedimento Numérico

A solução das Eqs. (10) e (11) foram obtidas primeiramente admitindo os perfis para t_g e t_w . As integrais foram então calculadas de forma a obter uma estimativa improvável. Iterações subsequentes foram feitas usando os mais recentes resultados até variações significativas nas

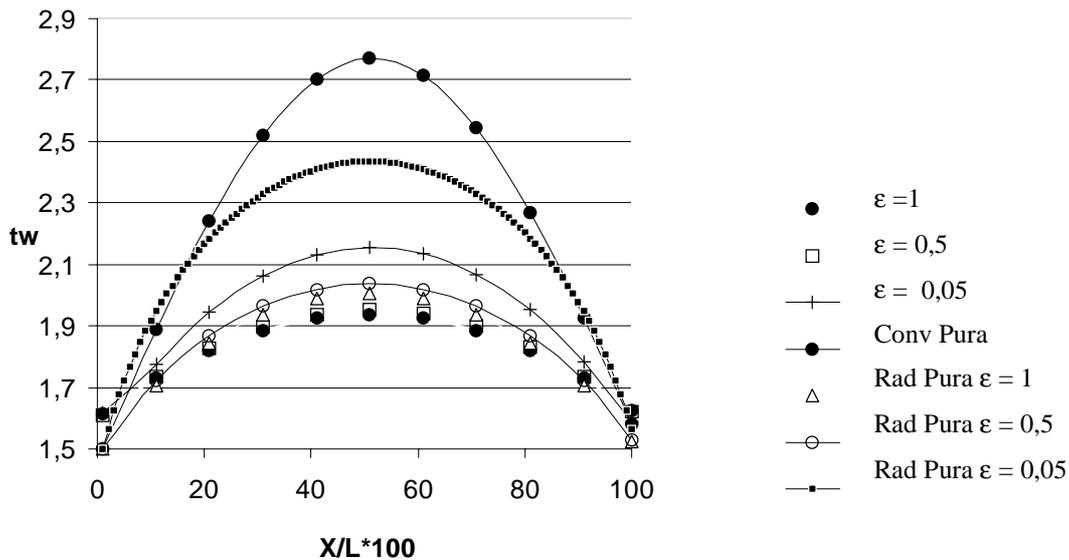


Figura 1 - Variação da temperatura da parede, t_w , $L/D=5$.

variáveis não serem detectadas.

Para a temperatura na parede, a primeira tentativa foi o caso limite de radiação pura, uma vez que é conhecido ser próximo à solução real. Para a temperatura do gás, um perfil inicial baseado na solução de convecção pura nos dá uma convergência rápida.

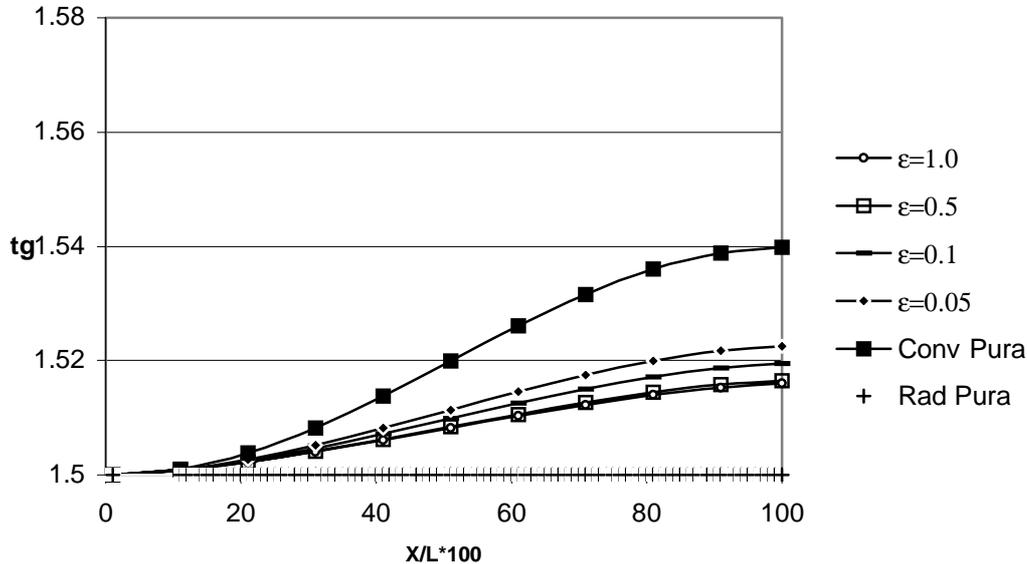


Figura 2 - Variação da temperatura do gás, t_g , $L/D=5$.

As integrais na Eq. (10), foram resolvidas utilizando-se a regra de Simpson. Um total de 50 segmentos axial foi usado para um tubo de comprimento de 5 e 10 diâmetros. O critério de convergência adotado consiste na comparação da diferença entre as duas últimas tentativas com um erro pré-selecionado. Esse erro estava na faixa de 0,0001 para os cálculos presentes.

Para casos de alta emissividade, um fator de sub-relaxação de 0,9 foi usado para multiplicar as soluções recém obtidas. Portanto, a solução anterior contribuía com apenas 10% para o valor atualizado após cada iteração. Para pequenas emissividades, a taxa de convergência foi ainda mais desacelerada. Neste caso, o fator foi menor que 0,7 para se evitar instabilidade numérica.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Coeficiente H fixo.

Para facilitar os cálculos, em todos os casos aqui apresentados os valores para a temperatura do gás na entrada e do ambiente na entrada e saída foram os mesmos. Este procedimento reduziu o número de variáveis independentes do problema. As Figs. 1 e 2 apresentam os resultados para a temperatura adimensional t e para os parâmetros $S=0.01$ e $H=0.8$. Estes valores foram calculados com a correlação do número de Nusselt $Nu = h/Dk = 0,023Re^{0.8}Pr^{0.4}$ sendo k e μ a condutividade térmica e a viscosidade do gás, respectivamente. O número de Reynolds, Re , definido como $Re = u_m D \rho / \mu$, foi igual a 10^5 . Para o número de Prandtl, $Pr = c_p \mu / k$, adotou-se o valor de 0,7. Os resultados reproduzem exatamente aqueles em de Lemos (1985) para $L/D = 5$. Nota-se uma substancial redução na temperatura máxima t_w com o aumento de ϵ . Paralelamente, a temperatura t_g na saída aumenta à medida que ϵ diminui. Neste casos, mais calor é transferido para o gás. Resultados

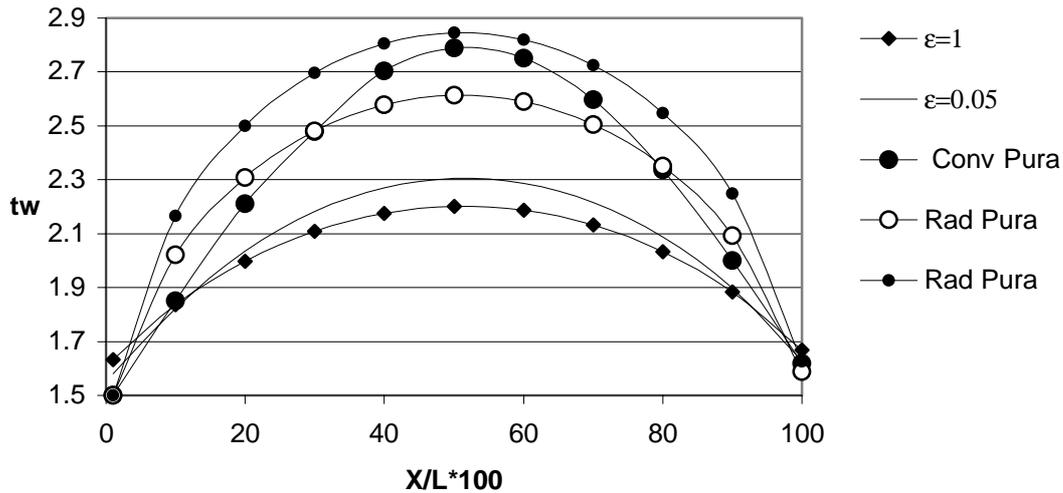


Figura 3 - Variação da temperatura da parede, t_w , $L/D=10$.

complementares para $L/D=10$ são apresentados nas Figs. 3 e 4 de onde observações similares podem ser extraídas.

3.2 Coeficiente H variável.

As Figs. 5 e 6 apresentam resultados para a temperatura adimensional da parede e do gás, variando-se agora o coeficiente de película de acordo com a e a expressão para Nusselt,

$$Nu_x = \left[\frac{1}{Nu} - \frac{1}{2} \sum \frac{\exp(-\gamma_m^2 x)}{A_m \gamma_m^4} \right]^{-1} \quad (24)$$

A Eq. (24) é apresentada em Kays (1966), e leva em consideração o desenvolvimento da camada limite térmica. Os coeficientes A_m e γ_m são tabelados em Kays (1966). Os valores de Nu na Eq. (24) são referentes à situação de escoamento desenvolvido e são calculados como no caso de h constante. Os valores da razão Nu_x/Nu para $X/D=0$ e $X/D=5$ valem 1,84738 e 1,17295, respectivamente. Desta forma, um incremento médio em h da ordem de 25% é obtido. Comparando-se as Figs. 1 e 5, nota-se que as temperaturas máximas da parede

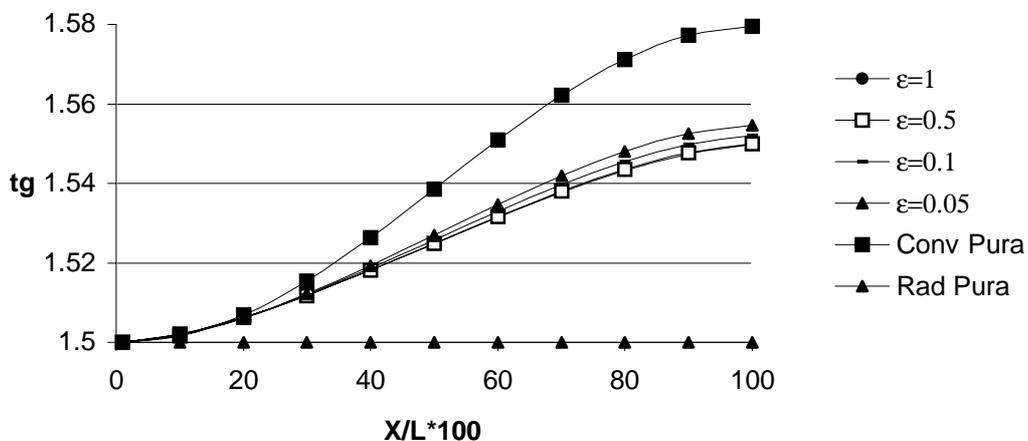


Figura 4 - Variação da temperatura do gás, t_g , $L/D=10$.

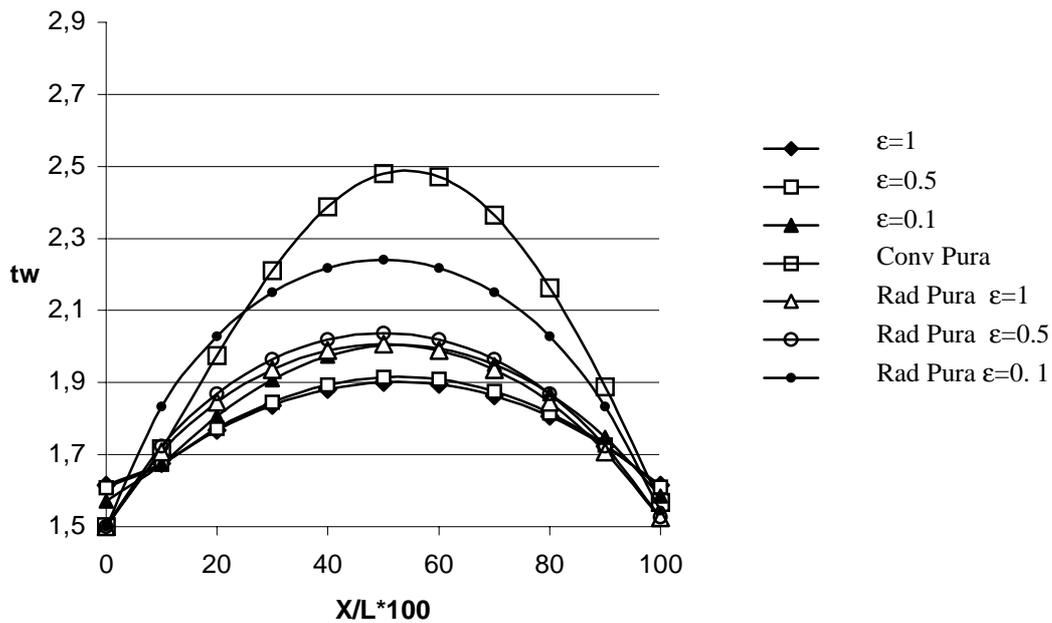


Figura 5 - Variação da temperatura da parede, t_w , $L/D=5$, H variável.

diminuem para o caso de H variável. Com o aumento do coeficiente de película para um fluxo de calor constante, a diferença de temperatura é reduzida. Esta queda é mais acentuada na primeira metade do tubo, onde os h são localmente maiores. Comparando-se também as Figs. 2 e 6, nota-se a correspondente diminuição na temperatura de saída do gás. Para um fluxo de calor constante, um aumento de h é acompanhado por uma diminuição em ambas as temperaturas da parede e do gás. Esta diminuição em t_g , entretanto, não parece ser apreciável. Esta observação está coerente com a literatura uma vez que se trata do escoamento de um gás tendo o número de Pr da ordem de 1.

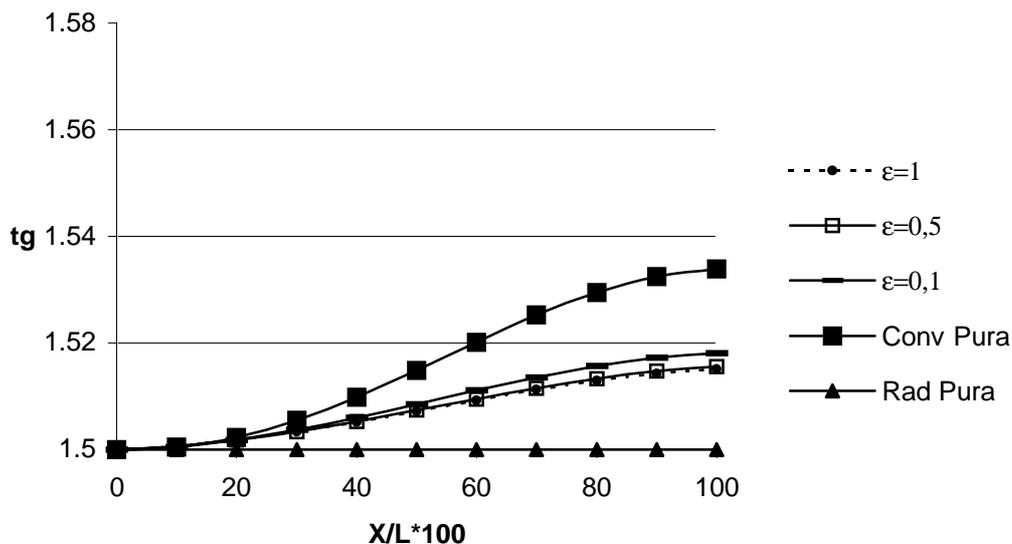


Figura 6 - Variação da temperatura do gás, t_g , $L/D=5$, H variável.

4.0 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou soluções numéricas para o caso da radiação combinada convecção-radiação no interior de tubos circulares. Os resultados numéricos, calculados para diferentes emissividades ε , se concentraram entre os casos limite para radiação e convecção pura. A consideração do coeficiente de película h variável não alterou substancialmente os resultados para a temperatura do gás, embora ambas as temperaturas da parede e do fluido tenham diminuído. Este fato, de certa forma, já era previsto para o caso de fluido com $Pr \sim 1$, conforme comentado no trabalho de de Lemos (1985).

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro durante a preparação desse trabalho.

REFERÊNCIAS

- de Lemos, M.J.S., 1985, Radiant and Convective Heat Transfer for Flow of a Transparent Gas in a Short Tube With Sinusoidal Wall Heat Flux, *International Communications in Heat & Mass Transfer*, vol. 12 (5), pp. 505-520.
- Kays, W.M., 1966, Convective Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York.
- Perlmutter, M., Siegel, R., 1961, Effect of Thermal Radiation Exchange in a Tube on Convection Heat Transfer to a Transparent Gas, *Amer. Soc. Mec. Engrs.*, Paper 61-WA-169.
- Siegel, R., Perlmutter, M., 1961, Convective and Radiant Heat Transfer for Flow in a Transparent Gas in a Tube with a Gray Wall.
- Sparrow, E.M., Cess, R.D., 1978, Radiation Heat Transfer, Augmented Edition, McGraw-Hill, New York.
- Sparrow, E.M., Jonsson, V.K., 1963, Radiant Emission Characteristics of Diffusive Conical Cavities, *J. Opt. Soc. Am.*, 53, 816.
- Sparrow, E.M. *et al.*, 1962, Thermal Radiation Characteristics of Cylindrical Enclosures, *J. Heat Transfer*, CB4, 73.
- Usiskin, C.M., Siegel, R., 1960, Thermal Radiation from a Cylindrical Enclosure with Specified Wall Heat Flux, *Trans. ASME J. Heat Transfer*, vol. 82, pp. 369.

Abstract: *The present analysis accounts for combined convective and radiant heat transfer to a fluid flowing in a short tube with prescribed wall heat flux. The heat flux distribution used was of sine shape with maximum at the middle of the tube. This solution is known to represent the axial power variation in a nuclear reactor core. The tube wall and gas bulk temperatures were obtained by successive substitutions for the wall and gas energy balance equations. The integrals were approximated by Simpson's rule and initial guesses for the iterative process were based upon limiting cases for pure radiation and pure convection. Results were presented for the cases of constant and variable film coefficient along the tube.*