

## SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO EM MEIO POROSO VIA TÉCNICA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

**Anatoli Leontiev** - anatoli@serv.com.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática – CT,  
21945 970, Rio de Janeiro-RJ, Brasil

**Wilma Huacasi** - wilma@uenf.br

Universidade Estadual do Norte Fluminense, Laboratório da Engenharia Civil – CCT,  
28015 620, Campos dos Goytacazes-RJ, Brasil

***Resumo.** Neste trabalho é apresentada uma nova técnica de análise numérica para o escoamento não confinado em meio poroso em regime permanente. O método proposto é baseado na transformação do problema com fronteira livre em um problema de otimização de forma. A técnica da programação matemática junto com a discretização via elementos de contorno é usada para a resolução do problema de otimização. O método mostra-se fácil de ser aplicado, permite considerar problemas bidimensionais e tridimensionais, necessita de razoáveis recursos computacionais para problemas reais e possui boa precisão numérica, entre outras vantagens. Mostram-se os resultados numéricos para um problema-teste do escoamento bi-dimensional não confinado numa barragem.*

***Palavras-chave:** Problemas com fronteira livre, Otimização de forma, Programação matemática, Método dos elementos de contorno.*

### 1. INTRODUÇÃO

O fenômeno de escoamento não confinado em regime permanente em meio poroso pertence à classe dos problemas de valor de contorno com fronteira livre. O problema é definido no domínio, onde uma parte do contorno, a fronteira livre, não é conhecida *a priori* e deve ser determinada como parte da solução. Entre os atuais métodos de resolução para este tipo de problema podem-se mencionar três principais: métodos analíticos, Polubarinova-Kochina (1962), métodos iterativos, Liggett (1977) e métodos de transformação, Kinderleher *et al* (1980).

A idéia principal do método proposto neste trabalho baseia-se na transformação do problema com fronteira livre em problema de otimização de forma de tipo "mínimos quadrados". Aplicando-se o método dos elementos de contorno, consideramos o problema de otimização discretizado como um problema de programação matemática não-linear. Em comparação com outros métodos de discretização, para o problema de otimização de forma, o

método dos elementos de contorno permite reduzir consideravelmente o número de variáveis e de restrições do problema, além de evitar as dificuldades de geração de malha.

A ligação entre os problemas com fronteira livre e os problemas de otimização de forma é evidente: ambos envolvem domínios desconhecidos como parte da solução. Existem duas maneiras principais para reformular o problema com fronteira livre como um problema de otimização de forma. Uma delas envolve como funcional-objetivo o funcional de energia total do sistema em consideração. A segunda alternativa é conhecida como de tipo "mínimos quadrados". O funcional-objetivo contém uma das condições da fronteira livre, quando a equação que define o estado do sistema junto com outras condições de contorno viram restrições do problema de otimização. Em ambas formulações procura-se o mínimo do funcional-objetivo com relação à forma da fronteira livre.

Na maioria dos casos, na resolução numérica dos problemas de otimização de forma são usados os métodos que envolvem o sistema de otimalidade. O estado do sistema é considerado como uma função da variável do projeto (que representa a forma do domínio). Uma vez que a derivada desta função é encontrada, o gradiente do funcional-objetivo com relação à forma do domínio, pode ser calculado. Isto permite obter certas condições de otimalidade para a solução ótima, chamadas de sistema de otimalidade. A forma ótima do domínio e o correspondente estado do sistema são encontrados ao mesmo tempo resolvendo-se este sistema. Uma das realizações desta técnica oferece um processo iterativo da resolução das condições de otimalidade, separando a busca da forma do domínio e o cálculo do estado do sistema. O procedimento que envolve em cada iteração o cálculo da derivada do estado para dada forma do domínio é conhecido como análise da sensibilidade de forma, Haslinger *et al* (1992).

A técnica de otimização via análise de sensibilidade junto com o método dos elementos de contorno é aplicada para simulação do escoamento em meio poroso nos trabalhos de Naji *et al* (1998,1999). O problema de otimização consiste na minimização, com relação às coordenadas dos nós da fronteira livre, de uma função-objetivo que contém o quadrado do fluxo nesta fronteira. As restrições do problema surgem das limitações geométricas. Porém, a informação analítica sobre a função-objetivo não está disponível, e o número dos sistemas a serem resolvidas para avaliação da sensibilidades do fluxo com relação às coordenadas dos nós da fronteira livre, é grande, Naji *et al* (1998).

O método exposto em nosso trabalho permite evitar estas dificuldades, visto que não se baseia na análise de sensibilidade mas na técnica da programação matemática. O estado do sistema é considerado com uma variável independente da variável do projeto. Discretizando se chega a um problema de programação matemática: achar o mínimo da função-objetivo com relação a variável de projeto, sujeito às restrições de igualdade e/ou de desigualdade. As restrições representam a discretização da equação do estado e definem a ligação entre a variável de projeto e a variável de estado. A técnica de programação matemática é usada com frequência para os problemas clássicos de otimização, Defourny (1988).

## 2. ESCOAMENTO NÃO CONFINADO E PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Considera-se um problema bidimensional de escoamento não confinado do fluido numa barragem de seção transversal  $ABCD$  que separa dois reservatórios de níveis  $h_1$  e  $h_2$ , (Fig.1). Procura-se a posição da superfície freática (fronteira livre  $\Gamma_\lambda$ ) e, dependendo disto, da superfície de percolação ( $\Gamma_\sigma$ ) junto com as características do escoamento (campo  $u$  do potencial de velocidade) dentro da área  $\Omega$  com fronteira  $\Gamma = \Gamma_\lambda \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . São feitas

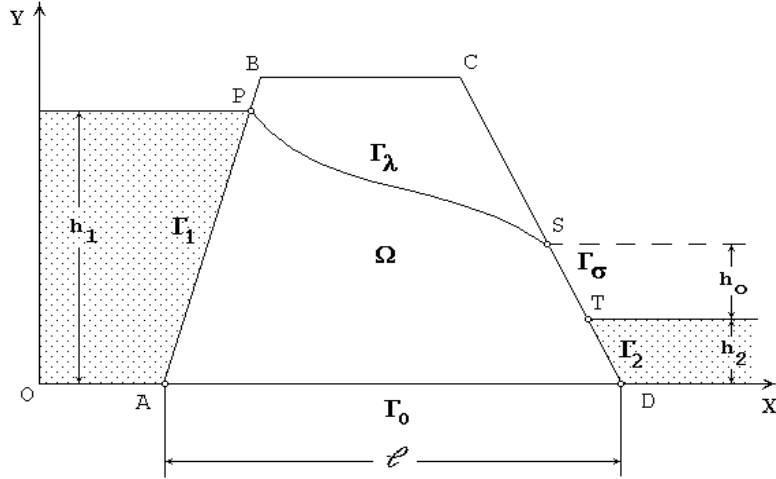


Fig. 1

as seguintes considerações: fluido ideal, regime permanente, material da barragem homogêneo com coeficiente de permeabilidade  $k = 1$ , sendo o fundo  $\Gamma_0$  da barragem impermeável e a vaporização através da superfície freática ignorada; a formulação matemática do problema é dada por:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Achar } \Gamma_\lambda \text{ e } u(x, y) \text{ tais que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega \\ u = h_1 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ u = h_2 \quad \text{na } \Gamma_2, \\ u = y \quad \text{na } \Gamma_\sigma \cup \Gamma_\lambda, \\ q = 0 \quad \text{na } \Gamma_0 \cup \Gamma_\lambda. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

onde  $q \equiv \partial u / \partial n$  é o fluxo normal do potencial. No contorno  $\Gamma_\lambda$ , parte desconhecida do contorno  $\Gamma_\lambda$ , na função  $u$  são impostas duas condições de Cauchy, então,  $\Gamma_\lambda$  é uma fronteira livre. O problema admite uma única solução  $\Gamma_\lambda$  tal que  $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e  $\Gamma_\lambda$  é uma curva suave, Kinderlehrer *et al* (1980). Uma das formulações equivalentes a (P) pode ser dada em termos do problema de otimização de forma para o sistema governado pela equação de Laplace. Seja  $\Phi = \{\psi(x, y) = 0\}$  um conjunto de todas as formas permissíveis da fronteira  $\Gamma_\lambda$ , formado pela curvas suaves. Então, o problema de otimização consiste em achar  $\varphi \in \Phi$  e  $u$  tais que:

$$(P_1^s) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\varphi \in \Phi} (q)_{\Gamma_\lambda}^2 \\ \text{onde } q = \partial u / \partial n \text{ e } u(x, y) \text{ é solução do problema :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = h_1 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ u = h_2 \quad \text{na } \Gamma_2, \\ u = y \quad \text{na } \Gamma_\sigma \cup \Gamma_\lambda, \\ q = 0 \quad \text{na } \Gamma_0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1)$$

Outra possível formulação equivalente a (P) usa a condição sobre valor do potencial na fronteira livre como critério de otimalidade. Procuramos por  $\varphi \in \Phi$  e  $u$ , tais que:

$$(P_2^s) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\varphi \in \Phi} (u - y)_{\Gamma_\lambda}^2, \\ \text{onde } u(x, y) \text{ é solução do problema :} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = h_1 & \text{na } \Gamma_1, \\ u = h_2 & \text{na } \Gamma_2, \\ u = y & \text{na } \Gamma_\sigma, \\ q = 0 & \text{na } \Gamma_0 \cup \Gamma_\lambda. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2)$$

Observa-se que estas duas formulações interpretam a fronteira livre  $\Gamma_\lambda$  como uma fronteira ótima. A definição da fronteira ótima envolve os valores do fluxo (problema  $(P_1^s)$ ) e do potencial (problema  $(P_2^s)$ ) só no contorno. Porém, para achá-la não é necessário resolver o problema completo em todo  $\Omega$ . Por outro lado, depois de achar  $\Gamma_\lambda$ , pode-se reconstruir  $u(x, y)$  em  $\Omega$  resolvendo-se (1) ou (2) neste domínio. Por esta razão vamos nos concentrar adiante, na busca da posição da fronteira livre.

Para problemas governados pela equação de Laplace, no caso 2D os valores do fluxo e do potencial verificam no contorno  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$  a equação integral, Brebbia *et al* (1984):

$$0,5u(\xi) + \int_{\Gamma} q^*(\xi, \chi)u(\chi)d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(\xi, \chi)q(\chi)d\Gamma \quad (3)$$

onde  $\chi \equiv (x, y) \in \Gamma$ ,  $u^*(\xi, \chi)$  é a solução fundamental da equação de Laplace,  $q^*(\xi, \chi)$  sua derivada e  $\xi \in \Gamma$  é o ponto de colocação.

Desta maneira, para definir a posição da fronteira livre do problema  $(P_1^s)$  (ou  $(P_2^s)$ ) temos que resolver:

$$(P^b) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\varphi \in \Phi} F(u, q), \\ \text{onde } q \text{ e } u \text{ verificam no } \Gamma \text{ a equação:} \\ 0,5u(\xi) + \int_{\Gamma} q^*(\xi, \chi)u(\chi)d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(\xi, \chi)q(\chi)d\Gamma \end{array} \right.$$

Onde  $F(u, q) = (q)_{\Gamma_\lambda}^2$  (problema  $(P_1^s)$ ) ou  $F(u, q) = (u - y)_{\Gamma_\lambda}^2$  (problema  $(P_2^s)$ ) e os valores definidos na fronteira correspondem aos valores de contorno dos problemas (1) ou (2) respectivamente.

Como os algoritmos numéricos de otimização são iterativos, considerar o problema  $(P^i)$  para encontrar a posição da fronteira livre  $\Gamma_\lambda$  e logo após resolver (1) ou (2) para obter  $u(x, y)$  em  $\Omega$  é uma maneira mais econômica e eficaz do que resolver (1) ou (2) em cada iteração, o que seria necessário fazer para obter a solução do (P) usando-se formulações  $(P_1^s)$  ou  $(P_2^s)$ .

### 3. DISCRETIZAÇÃO E PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

A formulação ( $P^i$ ) permite a discretização via método dos elementos de contorno.

Introduzindo-se  $E$  nós geométricos, divide-se o contorno  $\Gamma$  em  $E$  elementos  $\Gamma = \sum_{e=1}^E \Gamma_e$ . Considerando-se o potencial e o fluxo com aproximações funcionais constantes sobre cada elemento  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, E$  obtém-se a forma discretizada da equação integral:

$$0,5u_i + \sum_{j=1}^E \left( \int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j \right) u_j = \sum_{j=1}^E \left( \int_{\Gamma_j} u_i^* d\Gamma_j \right) q_j, \quad i = 1, \dots, E,$$

onde  $u_i = u(\xi_i)$ ,  $u_i^* = u^*(\xi_i, \chi)$ ,  $q_i^* = q^*(\xi_i, \chi)$ ,  $\xi_i \in \Gamma_i$  e  $u(\chi) \equiv u_j$ ,  $q(\chi) \equiv q_j$ ,  $\chi \in \Gamma_j$ ,  $j=1, \dots, E$ . Usando as notações  $H_{ij} = \left( \int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j \right)$  para  $i \neq j$ ,  $H_{ii} = 0.5$  e  $G_{ij} = \left( \int_{\Gamma_j} u_i^* d\Gamma_j \right)$ , pode-se escrever a equação discretizada na forma matricial:

$$[H]u = [G]q.$$

Sejam  $(x_i, y_i)$  as coordenadas nodais,  $i = 1, \dots, E$  e  $x_{E+1} = x_1$ ,  $y_{E+1} = y_1$ .

Para os coeficientes das matrizes G e H temos as seguintes fórmulas explícitas:

$\forall i, j = 1, \dots, E, \quad i \neq j:$

$$G_{ij} = -\sum_{k=1}^4 0.5\omega_k (a_x^2 + a_y^2)^{0.5} \ln \left( (x_c - a_x \gamma_k - b_x)^2 + (y_c - a_y \gamma_k - b_y)^2 \right) \quad (4)$$

$$H_{ij} = -\sum_{k=1}^4 \frac{\omega_k (a_y (a_x \gamma_k + b_x - x_c) - a_x (a_y \gamma_k + b_y - y_c))}{(x_c - a_x \gamma_k - b_x)^2 + (y_c - a_y \gamma_k - b_y)^2} \quad (5)$$

$\forall i, j = 1, \dots, E, \quad i = j:$

$$G_{ii} = 2(a_x^2 + a_y^2) \left( 1 - \ln(a_x^2 + a_y^2)^{1/2} \right); \quad (6)$$

$$H_{ii} = \pi, \quad (7)$$

onde  $a_x = 0,5(x_{j+1} - x_j)$ ,  $b_x = 0,5(x_{j+1} + x_j)$ ,  $a_y = 0,5(y_{j+1} - y_j)$ ,  $b_y = 0,5(y_{j+1} + y_j)$ ,  $x_c = 0,5(x_i + x_{i+1})$ ,  $y_c = 0,5(y_i + y_{i+1})$ , e  $\gamma_k, \omega_k$  são as abscissas e os pesos da quadratura de Gauss.

Sejam  $n, m, l, r$  e  $k$  os números dos elementos de contorno colocados respectivamente nas partes  $\Gamma_\sigma, \Gamma_\lambda, \Gamma_1, \Gamma_0, \Gamma_2$  do contorno  $\Gamma$ . Para facilitar a apresentação, supomos que as coordenadas  $x$  dos nós da fronteira livre são dadas e fixas e a parte da percolação  $\Gamma_\sigma$  é vertical. Introduzimos também as seguintes notações:  $L \equiv l, R \equiv L + r, K \equiv R + k, N \equiv K + n$ , então  $N + m \equiv E$ .

Para problema discreto relacionado ao  $(P_1^b)$ , vamos considerar como variáveis independentes o valor do fluxo nos elementos do contorno  $\Gamma_1$ :  $X_1 \dots X_L$ , o valor do potencial nos elementos da parte impermeável  $\Gamma_0$ :  $X_{L+1} \dots X_R$ , o valor do fluxo nos elementos dos contornos  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_\sigma$  e  $\Gamma_\lambda$ :  $X_{R+1} \dots X_K$ ,  $X_{K+1} \dots X_N$ ,  $X_{N+1} \dots X_E$  respectivamente, as  $y$ -coordenadas dos nós geométricos (se  $n \geq 2$ ), na parte da percolação  $\Gamma_\sigma$ :  $X_{E+1} \dots X_{E+n-1}$  e as  $y$ -coordenadas dos nós geométricos do contorno livre  $\Gamma_\lambda$ :  $X_{E+n} \dots X_{E+n+m-1}$ .

Sejam:

$$\begin{aligned} X &= (X_1 \dots X_{E+n+m-1}), \\ U &= (u_1 \dots u_L, X_{L+1} \dots X_R, u_{R+1} \dots u_K, U_{K+1} \dots U_N, U_{N+1} \dots U_E), \\ Q &= (X_1 \dots X_L, q_{L+1} \dots q_R, X_{R+1} \dots X_K, X_{K+1} \dots X_N, X_{N+1} \dots X_E), \end{aligned}$$

onde os valores do potencial nas partes  $\Gamma_\sigma$  e  $\Gamma_\lambda$  são definidos pelas condições de contorno do problema (1):

$$\begin{aligned} U_{K+i} &= 0,5(X_{E+i} - X_{E+i-1}), \quad i = 2, \dots, m+n-2, \\ U_{K+1} &= 0,5(X_{E+1} - h_2), \quad U_E = 0,5(h_1 - X_{E+m+n-1}) \end{aligned}$$

e demais valores do  $u$  e  $q$  são dados do problema (1).

Se existem os pontos geométricos na parte da percolação  $\Gamma_\sigma$  (ou seja,  $n \geq 2$ ), temos as restrições lineares para as coordenadas destes pontos:  $X_i - X_{i+1} \leq 0$ ,  $i = E+1, \dots, E+n-1$ .

A função-objetivo discretizada  $F(X) = \sum_{i=N+1}^E X_i^2$ . Os coeficientes das matrizes  $H$  e  $G$ , segundo (4) - (7), são funções de  $X$ , precisamente, das coordenadas  $y$  dos nós geométricos da fronteira livre e da parte da percolação:

$$H(X) \equiv H(X_{E+1} \dots X_{E+n+m-1}), \quad G(X) \equiv G(X_{E+1} \dots X_{E+n+m-1}).$$

Discretizando desta maneira  $(P_1^b)$ , obtemos um problema de programação matemática não-linear:

$$(P_1^d) \quad \begin{cases} \min_X F(X) \\ H(X)U - G(X)Q = 0, \\ X_i - X_{i+1} \leq 0, \quad i = E+1, \dots, E+n-1, \\ LOW \leq X_i \leq UPP, \quad i = E+1, E+n, \dots, E+n+m-1. \end{cases}$$

O problema têm  $E + m + n - 1$  variáveis, função-objetivo quadrática,  $E$  restrições não-lineares de igualdade,  $n-1$  restrições lineares de desigualdade e  $m+1$  restrições de tipo "box", onde  $LOW$  e  $UPP$  definem os limites para as coordenadas dos nós do contorno livre.

Discretizando da mesma maneira  $(P_2^b)$ , obtemos o problema  $(P_2^d)$ . Neste caso os vetores  $U$ ,  $Q$  e  $F$  tornam-se:

$$\begin{aligned} U &= (u_1 \dots u_L, X_{L+1} \dots X_R, u_{R+1} \dots u_K, U_{K+1} \dots U_N, X_{N+1} \dots X_E), \\ Q &= (X_1 \dots X_L, q_{L+1} \dots q_R, X_{R+1} \dots X_K, X_{K+1} \dots X_N, q_{N+1} \dots q_E), \end{aligned}$$

e a função-objetivo fica:  $F(X) = \sum_{i=N+1}^E (X_i - h_i)^2$ ,

onde  $h_{N+i} = 0,5(X_{E+n+i} - X_{E+n+i-1})$ ,  $i = 0, \dots, m-1$ ,  $h_E = 0,5(h_1 + X_{E+n+m-1})$ .

#### 4. TESTES NUMÉRICOS

Como um exemplo-teste considera-se o problema da infiltração em barragem retangular. Neste caso a posição da fronteira livre pode ser procurada na forma analítica, Polubarinova-Kochina (1962):

$$x = l - \int_0^{\chi} \frac{\kappa(\sin^2 \chi) \sin \chi d\chi}{\sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \chi)(1 - \beta \sin^2 \chi)}}, 0 \leq \chi \leq \pi/2, \quad (8)$$

$$y = h_2 + h_0 + \int_0^{\chi} \frac{\kappa(\cos^2 \chi) \sin \chi d\chi}{\sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \chi)(1 - \beta \sin^2 \chi)}}, 0 \leq \chi \leq \pi/2, \quad (9)$$

Aqui  $\kappa(\chi)$  é a integral elíptica completa de primeiro tipo;  $\alpha, \beta \in (0,1)$  são os parâmetros que definem o problema, ou seja, estão relacionados com os valores do  $h_1, h_2$  e  $l$ :

$$h_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\kappa(\alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \chi) d\chi}{\sqrt{\beta - \alpha + (1 - \beta) \sin^2 \chi}}, \quad h_2 = \sqrt{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\kappa(\alpha \sin^2 \chi) \sin \chi d\chi}{\sqrt{(1 - \alpha \sin^2 \chi)(\beta - \alpha \sin^2 \chi)}},$$

$$l = \int_0^{\pi/2} \frac{\kappa(\alpha + (1 - \beta) \sin^2 \chi) d\chi}{\sqrt{1 - \alpha - (\beta - \alpha) \sin^2 \chi}}.$$

TABELA 1: HISTÓRIA DAS ITERAÇÕES

ITER	TESTE-1		TESTE-2	
	$(q)_{\Gamma_\lambda}^2$	IGUALDADES	$(u - y)_{\Gamma_\lambda}^2$	IGUALDADES
1	3.37194E-01	5.03771E-01	1.48585E-00	1.02268E-00
2	1.02268E-00	6.33027E-02	1.10771E-00	6.46476E-01
3	1.71622E-02	2.19568E-02	9.98802E-01	5.63024E-01
4	2.28813E-03	6.84466E-03	4.15933E-02	5.35975E-01
5	4.12717E-04	2.28845E-03	3.37926E-02	4.78287E-02
6	2.44679E-04	6.74048E-04	2.96099E-02	4.35380E-02
7	1.56776E-04	2.03719E-04	1.62319E-02	4.12751E-02
8	9.55952E-05	6.18224E-05	9.03622E-03	3.27559E-02
9	1.03441E-05	1.88899E-05	1.61429E-03	2.61451E-02
10	7.08184E-07	6.59762E-06	1.36841E-03	1.09630E-02
11	3.23122E-08	2.01167E-06	1.36036E-03	1.00562E-02
12	2.03752E-10	6.10359E-07	5.39097E-04	1.00261E-02
13	3.74040E-12	1.83436E-07	1.75161E-04	5.80856E-03
14	9.23356E-14	3.98771E-10	7.85880E-05	1.43914E-03
15	*	*	4.86981E-05	3.20677E-04

Para o ponto S temos: 
$$h_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{\kappa(\cos^2 \chi) \sin \chi \cos \chi d\chi}{\sqrt{(1 - (1 - \alpha) \sin^2 \chi)(1 - (1 - \beta) \sin^2 \chi)}}.$$

Considerando-se  $\alpha = 0.3$  e  $\beta = 0.9$  e usando-se a integração numérica, achamos os parâmetros físicos do problema:  $h_1 \approx 6.3014$ ,  $h_2 \approx 1.2359$ ,  $l \approx 6.1592$ . As coordenadas dos pontos da fronteira livre escolhidos como os nós geométricos a serem procurados foram calculadas aproximadamente pela formulas (8), (9) e são mostrados na Tabela 2, colunas 2 e 3. Para a altura de ressurgência então, achamos:  $h_0 \approx 1.2868$ .

A discretização inclui 22 elementos de contorno ( $l = 4$ ,  $r = 4$ ,  $k = 2$ ,  $n = 3$ ,  $m = 9$ ), Fig 2. Procuramos por y-coordenadas dos nove nós geométricos da fronteira livre B-S e dois na parte da percolação S-T, as demais coordenados dos nós geométricos são fixos. A posição inicial da fronteira livre é definida pela linha B-S na Fig 2. Para o exemplo considerado, a fronteira livre é uma curva suave estritamente decrescente, Kinderlehrer *et al* (1980), assim para as restrições de tipo "box" podemos definir:  $UPP \equiv h_1$ ,  $LOW \equiv h_2$ .

TABELA 2: COORDENADAS E VALORES CALCULADOS

Nó	x	y (ANALÍTICO)	TESTE-1		TESTE-2	
			y	q	y	u
14	6.1592	2.5227	2.5132	1.79516E-07	2.5052	2.6590
15	5.9969	2.8000	2.7951	1.13290E-07	2.8007	2.9584
16	5.7453	3.1096	3.1103	5.59923E-08	3.1140	3.2460
17	5.4906	3.3735	3.3773	3.84825E-08	3.3796	3.6033
18	4.9928	3.8145	3.8533	8.15999E-08	3.8226	4.3345
19	3.4922	4.8432	4.8560	1.38587E-07	4.8664	5.2314
20	2.0780	5.5762	5.5976	3.44851E-08	5.5978	5.8287
21	0.8861	6.0554	6.0570	5.42339E-08	6.0574	6.1337
22	0.5051	6.1790	6.2080	1.12533E-07	6.2093	6.2549

Foram testadas ambas as formulações,  $(P_1^d)$  - TESTE 1, e  $(P_2^d)$  - TESTE 2. Os problemas de programação matemática tem 32 variáveis, 22 restrições-igualdades não lineares, 9 de tipo "box" e 2 desigualdades lineares. Para resolvê-los usamos o algoritmo de ponto interior de Herskovits, que se mostra bem eficiente para os problemas não lineares. A descrição do algoritmo, demonstração da convergência e análise da sensibilidade com relação aos parâmetros, são dados em Herskovits (1998). Foi adotado o critério de parada de algoritmo com precisão de  $10E-6$ . Com diferentes dados iniciais, o algoritmo precisava no máximo de 15 iterações para conseguir a convergência (veja a história das iterações na Tabela 1).

As coordenadas dos pontos geométricos de contorno livre e os valores do fluxo (para o TESTE 1) e do potencial (para o TESTE 2) calculadas para os correspondentes elementos de contorno são dados na Tabela 2. Nas Fig. 3 e Fig. 4 são mostradas a posição da fronteira livre calculada com base na solução analítica (linha contínua), pontos da fronteira livre (14-22) e da parte da percolação (12-13) calculados e valores do contorno achados (do fluxo nas partes A-B, D-T e T-S e do potencial na parte A-D) para TESTE 1 e TESTE 2, respectivamente. A vazão  $Q$  média calculada fica 3.0446 para o TESTE 1 e 3.0310 para o TESTE 2. Pela



fórmula de Dupuit temos o valor de referência  $Q \approx 3.0995$ . O campo da velocidade do escoamento, calculado usando-se o método dos elementos finitos, está apresentado na Fig. 5 (valor absoluto da velocidade).

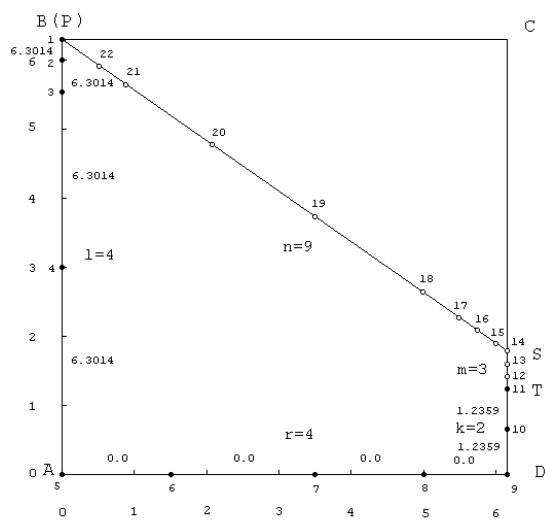


Fig. 2

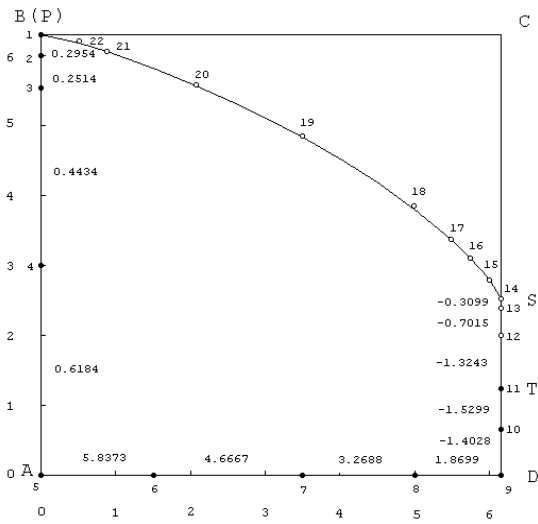


Fig. 3

Testes realizados levam à observação de que o refinamento da malha da fronteira livre não influi tanto na precisão da solução numérica quanto o refinamento da malha nas partes  $A-B$  e  $S-T$  próximo aos pontos  $B$  e  $S$  do contorno livre. Por esta mesma razão nós colocamos três elementos ( $11$ ,  $12$  e  $13$ ) na parte da percolação. A comparação dos resultados numéricos com os analíticos mostra boa aproximação da solução obtida, para a adotada discretização com elementos constantes.

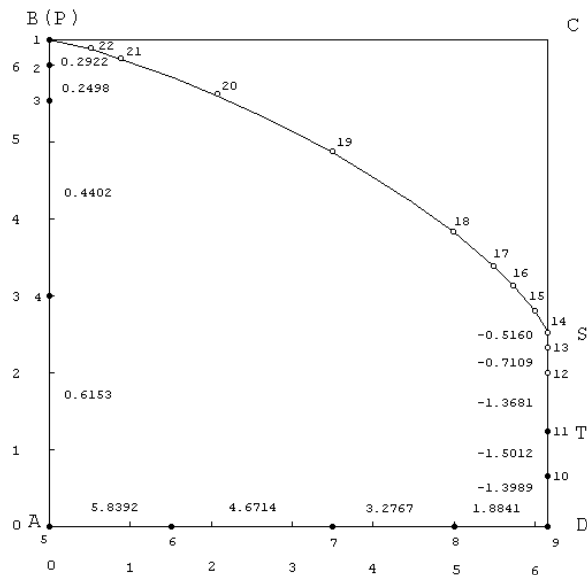


Fig. 4

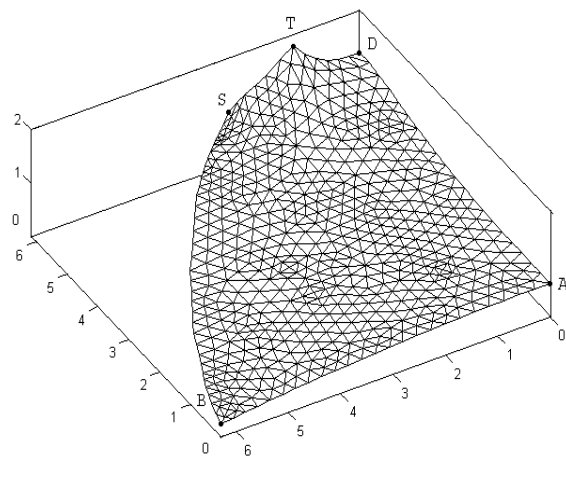


Fig. 5

## 5. CONCLUSÕES

A técnica para simulação numérica do escoamento em meio poroso proposto neste artigo reúne três aspectos principais: reformulação do problema como um problema de otimização

de forma, discretização via método dos elementos de contorno e resolução do problema discreto usando-se método da programação matemática.

A proposta técnica se mostra simples de ser aplicada, permite considerar problemas em 2D e 3D, necessita razoáveis recursos computacionais para problemas reais e possui boa precisão numérica, entre outras vantagens, e pode ser adaptada e utilizada para problemas com fronteira livre e móvel (de tipo Stefan com uma ou múltiplas fases) em diferentes áreas de aplicações.

### ***Agradecimentos***

Ao CNPq e FENORTE pelo apoio financeiro.

### **REFERÊNCIAS**

- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. e Wrobel, L.C.,1984, Boundary Elements Techniques Theory and Applications in Engineering, Springer, Berlin.
- Defourny, M.,1988, Optimization Techniques and Boundary Element Method. In: Boundary Elements X, Vol.3, Stress Analysis. Ed. C.A.Brebbia, Springer, 479-490.
- Haslinger, J. e Neittaanmaaki, P.,1992, Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications. Wiley, Chichester.
- Herskovits, J.,1998, Feasible Direction Interior-Point Technique for Nonlinear Optimization. Journal of Optimization Theory and Applications, 99, 121-146.
- Kinderlehrer, D. e Stampacchia, G.1980, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic Press, Inc., New York.
- Liggett, J.A.,1977, Location of the Free Surface in Porous Media. Journal of Hydraulics Div. ASCE, 103, 353-365.
- Naji, A., Ouazar, D. e Cheng, A.H.-D.,1998, Locating the Saltwater-Freshwater Interface Using Nonlinear Programming and h-adaptive BEM. Engineering Analysis with Boundary Elements, 21, 253-259.
- Naji, A., Cheng, A.H.-D e Ouazar, D.,1999, BEM Solution of Stochastic Seawater Intrusion Problem. Engineering Analysis with Boundary Elements, 23, 529-537.
- Polubarinova-Kochina, P.Ya.,1962, Theory of Ground Water Movement. Princeton University Press, Princeton.

### **MATHEMATICAL PROGRAMMING APPROACH FOR SIMULATION OF THE FLOW THROUGH POROUS MEDIA**

**Abstract.** In this paper an innovative simple technique for numerical simulation of unconfined flow through porous media is presented. The proposed approach treats the original free boundary problem as a shape optimization problem. A boundary elements discretization combined to nonlinear mathematical programming techniques is used to solve the optimization problem. This simple, accurate and computational efficient technique can be easily applied to 2D real size problems and extended to 3D problems. Numerical results for an illustrative 2D test problem of an earth dam are discussed.

***Kew words:*** Free boundary problems, Shape optimization, Mathematical Programming, Boundary elements method.