SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM MODELO TRIDIMENSIONAL DE DISPERSÃO DE CONTAMINANTES NA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA CONVECTIVA: COEFICIENTES DE DIFUSÃO DEPENDENTES DA DISTÂNCIA DA FONTE E DA ALTURA

Angela B. D. Moura - angelabm@ufrgs.br
Marco T M. B. Vilhena - vilhena@cesup.ufrgs.br
Universidade Federal do Rio Grande do Sul , PROMEC
Sarmento Leite 425/ 3 andar- Cx. P. 17819 - 90035.972 - Porto Alegre, RS, Brasil
Gervásio Degrazia - degrazia@super.ufsm.br
Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Física.
Cyntia Cegatto- cynthia@cesup.ufrgs.br
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Depto. de Matemática.

Resumo.
O objetivo deste trabalho consiste na determinação de uma solução analítica para o problema de difusão e advecção tridimensional estacionário que representa a dispersão de contaminantes em uma camada limite planetária. Este modelo é válido para a dispersão de um contaminante passivo na camada limite atmosférica, emitido a partir de uma fonte pontual contnua, e sujeito a situações de turbulência homogênea e com velocidade de vento médio uniformes, ou seja, para abandonos elevados que ocorrem em condições de estabilidade intermediária e na ausência de fortes empuxos. A solução é alcançada com o uso do método da Transformada Integral Generalizada e são analíticas no sentido de que nenhuma aproximação foi feita ao longo de sua derivação. Simulações e comparações com resultados experimentais disponíveis na literatura são apresentadas. Nestas simulações os coeficientes de dispersão foram considerados dependentes da distância da fonte.

Palavras-chave: *solução analítica, GITT, dispersão atmosférica*

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, vem aumentando consideravelmente a preocupação mundial com os problemas ambientais, consequentes do rápido desenvolvimento industrial e tecnológico. Com isso, e devido também a problemas operacionais e aos grandes custos envolvidos na realização de experimentos de campo, as simulações numéricas e de laboratório são ferramentas importantes no estudo e na compreensão dos processos de dispersão. Assim são necessários novos modelos que forneçam resultados mais rápidos, reais e precisos, de forma que se possa estimar realisticamente as concentrações, e preventivamente manter o ar dentro de padrões adequados.

A modelagem completa da camada limite planetária (CLP) tanto do ponto de vista da meteorologia quanto do estudo da dispersão de contaminantes é um processo extremamente difícil, onde se deve levar em conta os forçantes atuantes, que podem ser: aquecimento solar, resfriamento radiativo, mudanças de fase da água, provocando expansão e concentração de massas de gás, e correntes convectivas, envolvendo também conversões de energia de uma forma para outra.

O objetivo deste trabalho consiste na obtenção de uma solução analítica para problemas de difusão turbulenta tridimensionais estacionários, em uma geometria cartesiana, com a aplicação da Tecnica da Transformada Integral Generalizada - GITT, e na simulação numérica do campo de concentração de poluentes na baixa atmosfera. Para tanto é considerado a emissão de um contaminante passivo a partir de uma fonte pontual contínua elevada, no interior de uma camada limite planetária. Os campos de concentração são reproduzidos como emprego de coeficientes de difusão turbulentos, derivados da teoria de similaridade e da teoria da difusão estatística da turbulência. Os resultados numéricos são comparados com dados observacionais disponíveis na literatura.

Quanto à soluções para problemas de dispersão de contaminantes, na literatura são encontrados muitos trabalhos relativos a problemas unidimensionais e bidimensionais. Em se tratando de problemas tridimensionais a pesquisa se restringe bastante. A primeira que se tem conhecimento é a de Chrysikopoulos, Hildemann and Roberts (1992). Esta solução desenvolvida para uma fonte área contínua a nível do solo, para velocidade do vento u e coeficientes de difusão do tipo funções de potência da altura e contém também um termo de deposição seca; é apresentada em termos de funções de Bessel e funções hipergeométricas, sendo recomendável para condições atmosféricas neutras ou estáveis.

(Sharan, Singh and Yadav, 1996), e Sharan, Yadav, Singh, Agarwal and Nigam (1996), desenvolveram modelos matemáticos para a dispersão tridimensional atmosférica, usando coeficientes de difusão constantes e parametrizadas em termos da distância da fonte respectivamente. A parametrização turbulenta envolve relações empíricas.

Neste mesmo ano Lin and Hildemann (1996), apresentaram soluções analíticas para problemas de difusão atmosférica tridimensionais também em termos de funções de Bessel e suas obtenções são alcançadas através de combinações lineares de funções de Green, mas ainda com coeficientes de difusão do tipo função de potência da altura, aplicáveis unicamente em uma parte da camada limite.

2. O MODELO

A equação da difusão atmosférica, considerando-se um fluido incompressível e a teoria do transporte de gradiente,ou teoria K, em um sistema de coordenadas retangulares tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(K_x\frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y\frac{\partial c}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z\frac{\partial c}{\partial z}) + S + R. \qquad (1)$$

onde c é a concentração média de um poluente; S e R são os termos de fonte e remoção, respectivamente; u,v,w e K_x,K_y, K_z são as componentes da velocidade do vento e os coeficientes de difusão nas direções ortogonais x,y,z respectivamente, em um referencial Euleriano.

Como é usual na literatura as seguintes hipóteses são feitas:

a) condições são consideradas estacionárias, i.e. $\partial c/\partial t = 0$.

b) A magnitude da componente da velocidade vertical é muito menor que a da horizontal, assim o termo $w\frac{\partial C}{\partial z}$ pode ser negligenciado.

c) o eixo x está orientado na direção do vento médio ($u = U$ e $v = 0$).

d) A remoção (física/química) dos poluentes é ignorada de forma que $R = 0$

Desta forma a equação acima se reduz a :

$$U\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(K_x\frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y\frac{\partial c}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z\frac{\partial c}{\partial z}) + S. \tag{2}$$

Esta equação forma a base da maioria dos modelos de qualidade do ar (Sharan, Singh and Yadav, 1996). A natureza da solução desta equação depende da especificação de U, K e S. Normalmente U é considerado constante (Nieuwstadt, 1980), ou como uma função de potência dependente altura z (Pasquill and Smith, 1983). Da mesma forma os coeficientes de difusão K são também assumidos constantes (Sharan, Singh and Yadav, 1996), funções de potência da altura z ou tomadas como funções de coordenadas espaciais (Tirabassi, Tagliazucca and Galliani, 1987).

Nesse trabalho, para a dedução da solução analítica, U será tomado como uma função qualquer da altura z e os coeficientes de difusão são especificados como funções da distância da fonte (Degrazia, 1989).

Explicitando a dependência da concentração média c com a posição tridimensional e formulamos as hipóteses adicionais:

e) a magnitude da componente de difusão longitudinal é muito menor que a componente de advecção na mesma direção, ou seja $\mid \frac{\partial}{\partial x}(K_x\frac{\partial c}{\partial x}) \mid \ll \mid U\frac{\partial c}{\partial x} \mid$, e pode ser negligenciado,

f) o termo referente a fonte elevada será considerado nas condições de contorno,

Com isso o problema tridimensional estacionário pode ser reescrito da seguinte forma:

$$U\frac{\partial c(x,y,z)}{\partial x} = K_z(x)\frac{\partial^2 c(x,y,z)}{\partial z^2} + K_y(x)\frac{\partial^2 c(x,y,z)}{\partial y^2} \ . \tag{3}$$

Sujeito às condições de contorno do tipo:

1) Os poluentes não são absorvidos no solo ($z = 0$) e nem no topo da camada limite ($z = z_i$):

$$\frac{\partial c(x,y,z)}{\partial z} = 0 \qquad\qquad z = 0, z_i \ . \tag{4}$$

2) A fonte pontual contínua elevada representada por:

$$U\frac{c(x,y,z)}{Q} = \delta(z - H_s)\delta(y - y_0) \qquad\qquad x = 0. \tag{5}$$

Onde Q é a intensidade da fonte, δ é a função delta de Dirac e z_i é a altura da CLP. Neste trabalho a fonte foi posicionada na origem dos eixos coordenados (x,y) e a uma altura H_s, (0,0,H_s).

3) A concentração dos poluentes é considerada nula para distâncias (transversais à direção do vento) suficientemente grandes da fonte, $\pm b$, onde esta condição é satisfeita:

$$c(x, y, z) = 0 \qquad\qquad y = \pm b. \tag{6}$$

Observe-se que a equação acima expressa a condição imposta na direção y. Em outros trabalhos (Sharan, Singh and Yadav, 1996) a concentração é suposta tendendo a zero a medida que y também tende a infinito, e por isso, na prática b deve ser suficientemente grande para que esta condição seja satisfeita.

Para a solução do problema dado pela Eq.(3), pelo método da Transformada Integral Generalizada (Cotta and Mikhaylov, 1997) supõe-se que a solução do problema tridimensional é descrita como uma série dupla com a seguinte forma:

$$c(x, y, z) = \sum_m \sum_n \phi_{n,m}(\varphi_{n,m}, x) \cdot Yn(\gamma_n, y) \cdot Zm(\beta_m, z), \tag{7}$$

onde as funções $Yn(\gamma_n, y)$ e $Zm(\beta_m, z)$ são obtidas da solução de problemas de Sturm-Liouville. Assim sendo, $Zm(\beta_m, z)$ é solução do problema:

$$\frac{d^2 Zm(\beta_m, z)}{dz^2} + \beta_m^2 Zm(\beta_m, z) = 0, \tag{8}$$

sujeito às condições de contorno:

$$\frac{dZm(\beta_m, z)}{dz} = 0 \qquad z = 0, z_i, \tag{9}$$

cuja solução é conhecida e dada por:

$$Zm(\beta_m, z) = \cos(\beta_m . z), \tag{10}$$

onde as autofunções $Zm(\beta_m, z)$ e os autovalores β_m , que são as raízes positivas de $\sin(\beta_m . z_i) = 0$ (Özisik, 1980).

Por outro lado, $Yn(\gamma_n, y)$ resulta da solução de:

$$\frac{\partial^2 Yn(\gamma_n, y)}{\partial y^2} + {\gamma_n}^2 \cdot Yn(\gamma_n, y) = 0 \qquad\qquad \forall y \in [-b, +b], \tag{11}$$

$$Yn(\gamma_n, y) = 0 \qquad\qquad y = \pm b, \tag{12}$$

que devido à simetria em y pode ser simplificado como o problema abaixo:

$$\frac{\partial^2 Yn(\gamma_n, y)}{\partial y^2} + {\gamma_n}^2 \cdot Yn(\gamma_n, y) = 0 \qquad\qquad \forall y \in [0, b] \ , \tag{13}$$

$$\frac{\partial Yn(\gamma_n, y)}{\partial y} = 0 \qquad\qquad y = 0 \ , \tag{14}$$

$$Yn(\gamma_n, y) = 0 \qquad\qquad y = b \ . \tag{15}$$

Cuja solução também é conhecida (Özisik, 1980) e descrita por:

$$Yn(\gamma_n, y) = \cos(\gamma_n \cdot y) \ . \tag{16}$$

E, γ_n são raízes positivas de $\cos(\gamma_n \cdot b) = 0$.

Substituindo-se as soluções (10) e (16) na Eq. (7) e observando que as funções $Yn(\gamma_n, y)$ e $Zm(\beta_m, z)$ constituem um conjunto de funções independentes, obtém-se a seguinte equação diferencial para $\phi_{n,m}(x)$:

$$\frac{\partial \phi_{n,m}(x)}{\partial x} + \frac{\beta_m^2 K_z(x) + \gamma_n^2 K_y(x)}{U} \cdot \phi_{n,m}(x) = 0 \qquad \forall n, m \ \in \mathbb{N} \ . \tag{17}$$

Cuja solução é apresentada abaixo:

$$\phi_{n,m}(x) = \varphi_{n,m} \, e^{-\int_0^x \frac{\beta_m^2 K_z(x) + \gamma_n^2 K_y(x)}{U} dx} \qquad \forall n, m \ \in \mathbb{N} \ . \tag{18}$$

Neste ponto confirma-se estar correta a suposição de solução inicial Eq.(7), pois a função $\phi_{n,m}(x)$ foi unicamente determinada, embora $\varphi_{n,m}$ ainda seja desconhecida. Para determiná-la aplica-se as condições de contorno em $x = 0$ na Eq.(7) e se faz uso das propriedades de ortogonalidade das funções $Zm(z, \beta_m)$ e $Yn(\gamma_n, y)$, chegando-se a seguinte expressão para $\varphi_{n,m}$:

$$\varphi_{n,m} = \frac{Q \ Zm(H_s) \ Yn(y0)}{N(\beta_m) \ N(\gamma_n)} \ , \tag{19}$$

onde $N(\beta_m) \ N(\gamma_n)$ são, respectivamente, as normas de β_m e γ_n.

E, finalmente, j determinados todos os termos da soluo dada pela Eq.(7), pode-se proceder a sua substituio e a construção da forma final solução do problema descrito pelas Eqs. (3), (4), (5), (6), que é:

$$\begin{aligned} c(x,y,z) \ = \ & \frac{2Q}{z_i \, bU} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \cos(\beta_m \cdot H_s) \cdot \cos(\beta_m \cdot z) \cdot \cos(\gamma_n \cdot y0) \cdot \cos(\gamma_n \cdot y) \cdot \\ & e^{-\int_0^x \frac{\beta_m^2 K_z(x) + \gamma_n^2 K_y(x)}{U} dx} + \frac{Q}{z_i \, bU} \sum_{n=1}^{N} \cos(\beta_0 \cdot z) \cdot \cos(\gamma_n \cdot y) \cdot e^{-\int_0^x \frac{\gamma_n^2 K_y(x)}{U} dx} \ . \end{aligned} \tag{20}$$

Convém ressaltar aqui o fato de que a solução obtida desta forma admite um perfil de U, não só constante mas também como função da altura, e é adequada para qualquer perfil de coeficiente de difusão dependente da distância da fonte. Além disso, a solução apresentada permite a vantagem adicional de se poder calcular o erro inerente ao método, ou seja, o erro relativo ao truncamento do somatório.A solução analítica (Eq.20) para o problema tridimensional é válida para abandonos elevados, onde a estrutura de turbulência vertical pode ser idealizada como próxima à homogênea.

Os coeficientes de difusão turbulenta aqui considerados, $K_z(x)$ e $K_y(x)$, incorporam em sua derivação os principais parâmetros de escala da turbulência envolvida no processo

(Degrazia, 1989) e são descritos pelas seguintes equações:

$$K_z(x) = 0.052 \; .w_* \, z_i \int_0^\infty \frac{\sin(4.57 \, X \, n'}{(1+n')^{5/3} n'} dn', \tag{21}$$

$$K_y(x) = 0.09 \; .w_* \, z_i \int_0^\infty \frac{\sin(3.48 \; X \, n'}{(1+n')^{5/3} n'} dn'. \tag{22}$$

Onde w_* é a escala de velocidade turbulenta e $X = x \, w_* \, / \, u \, z_i$.

E desta forma mostrou-se a obtenção da solução analítica de um modelo tridimensional para o problema de advecção e difusão na camada limite convectiva atmosférica descrito nas Eqs. (3) a (6).

Neste ponto, cumpre observar que a convergência da solução tridimensional apresentada para a concentração de poluentes é baseada no estudo da convergência da série de Fourier, devendo, portanto, satisfazer as condições de convergência da mesma, uma vez que essas soluções consistem, respectivamente, em séries simples e dupla de Fourier.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

São apresentados a seguir os resultados numéricos e a validação com resultados experimentais. O desempenho do modelo tridimensional (Eq.20) foi avaliado com os dados experimentais de concentrações a nível do solo. Estes experimentos de dispersão foram realizados ao norte de Copenhagen, onde foi utilizado como traçador o SF_6, e são descritos em (Gryning, Holtslag, Irwing and Silversten, 1987). O traçador foi abandonado sem empuxo a partir de uma torre com altura de 115m, e coletados em posições a nível do solo em unidades de amostragem localizadas em três arcos transversais. As unidades de amostragem foram posicionadas a uma distância de 2 a 6 Km a partir do ponto de abandono. Os abandonos do traçador iniciavam tipicamente 1h após o início da amostragem e terminavam no final do período de amostragem; o tempo de amostragem média foi de 1h. O local era principalmente residencial com um comprimento de rugosidade de 0.6m. A Tab. (1) mostra os dados meteorológicos de Copenhagen (Gryning et al., 1987), utilizados para a validação dos modelos propostos.

O conjunto de dados de Copenhagen foi escolhido porque a maioria destes experimentos ocorreram sob condições de estabilidade intermediária, e sem grande empuxo, de forma que a concentração tridimensional pode ser simulada pela equação de difusão e advecção. Por outro lado, neste conjunto de dados experimental os abandonos foram realizados a partir de uma fonte elevada, que é escopo do modelo proposto neste trabalho.

O parâmetro de estabilidade z_i/L , onde L é o comprimento de Monin-Obukhov, indica casos onde a camada limite atmosférica instável apresenta convecção de fraca a moderada.

Como um teste para o modelo aqui proposto(Eqs. (20), (21), (22)) são simuladas as concentrações a nível do solo. Estes resultados são mostrados na Tab.(2), onde estão apresentados conjuntamente com as concentrações dos experimentos.

As simulações foram feitas em um equipamento AMD-K6, 32 Mb RAM. Para estas simulações U foi tomado constante, embora as soluções admitam uma variação do mesmo com a altura. O tempo médio para cada simulação foi inferior a 10s. Todos os resultados apresentados tem uma precisão de 10 dígitos significativos. O número de termos conside-

Tabela 1: Condições Meteorológicas dos experimentos de Copenhagen. (Gryning et al., 1987)

Exp No.	U (ms^{-1})	u^* (ms^{-1})	L (m)	w^* (ms^{-1})	z_i (m)	H_s/z_i	z_i/L
1	3.40	0.37	-46	1.76	1980	0.058	-43
2	10.60	0.74	-384	1.72	1920	0.060	-5
3	5.00	0.39	-108	1.15	1120	0.103	-10
4	4.60	0.39	-173	0.69	390	0.295	-2.3
5	6.70	0.46	-577	0.70	820	0.140	-1.42
6	13.20	1.07	-569	1.91	1300	0.088	-2.3
7	7.60	0.65	-136	2.11	1850	0.062	-14
8	9.40	0.70	-72	2.13	810	0.142	-11
9	10.50	0.77	-382	1.84	2090	0.055	-5.5

rados nos somatórios da solução, para garantir essa precisão, foi de $M = 200$ e $N = 400$ para o caso tridimensional.

O valor do parâmetro b usado, escolhido de forma a que a condição de contorno de concentração nula na fronteira se verificasse em todos os experimentos simulados, é de 2000 m.

Analisando a Tab.(2) pode-se ver que os resultados descrevem muito bem a dispersão ocorrida nestes experimentos.

Nestes conjuntos de dados simulados e experimentais, foram aplicados ainda os índices estatísticos descritos abaixo (Hanna, 1989).

$$\text{nmse (normalized mean square error)} = \frac{\overline{(c_0 - c_p)^2}}{\overline{c_0}\,\overline{c_p}},$$

que fornece informações sobre todos os desvios entre concentrações observadas e as previstas pelo modelo(simuladas). É uma estatística adimensional e seu valor deve ser tão pequeno quanto possível para um bom modelo.

$$\text{cor (correlation)} = \frac{\overline{(c_0 - \overline{c_0})(c_p - \overline{c_p})}}{\sigma_0\,\sigma_p},$$

onde, σ_0 e σ_p são os desvios padrões das concentrações observadas e simuladas, respectivamente.Seu valor situa-se entre 0 e 1 e para um bom desempenho seu valor deve estar próximo à unidade.

$$\text{fb (fractional bias)} = \frac{\overline{c_0} - \overline{c_p}}{0.5(\overline{c_0} + \overline{c_p})}\ .$$

Um bom modelo deve ter um valor de fb próximo a zero ((Sharan and Yadav, 1998)).

$$\text{fs (fractional standard deviation)} = 2\frac{\sigma_0 - \sigma_p}{\sigma_0 + \sigma_p}\ ,$$

onde, σ_0 e σ_p são os desvios padrões das concentrações observadas e simuladas, respectivamente. Seus valores variam de -2 a +2 com valor ideal zero.

fa2 = fração de dados para os quais $0.5 \leq c_p/c_0 \leq 2$c.

Tabela 2: Concentrações a nível do solo $c(x,0,0)/Q$ observadas e simuladas nas diferentes distâncias da fonte dos experimentos de Copenhagen

Exp. No.	Distance $(.10^3 m)$	$X = xw_*/uz_i$	Data $(.10^{-7} sm^{-3})$	Model Eqs (20 ,21, 22) $(.10^{-7} sm^{-3})$
1	1.9	0.496	10.50	5.29
	3.7	0.967	2.14	2.06
2	2.1	0.177	9.85	7.73
	4.2	0.355	2.83	2.94
3	1.9	0.39	16.33	13.82
	3.7	0.76	7.95	5.80
	5.4	1.11	3.76	3.52
4	4.0	1.54	15.71	16.55
5	2.1	0.27	12.11	21.06
	4.2	0.53	7.24	11.43
	6.1	0.78	4.75	7.32
6	2.0	0.22	7.44	8.10
	4.2	0.47	3.37	3.22
	5.9	0.66	1.74	2.03
7	2.0	0.3	9.48	5.58
	4.1	0.62	2.62	1.98
	5.3	0.79	1.15	1.38
8	1.9	0.53	9.76	8.36
	3.6	1.01	2.64	3.87
	5.3	1.48	0.98	2.39
9	2.1	0.18	8.52	6.934
	4.2	0.35	2.66	2.57
	6.0	0.52	1.98	1.52

Nas expressões acima o subscrito 0 e p se referem a quantidades observadas e previstas (simuladas) respectivamente, e a barra sobreposta indica uma média. Estes resultados, são mostrados na Tab. (3).

Tabela 3: Avaliação estatística dos resultados dos modelos

	NMSE	COR	FB	FS	Fa2
$c(x,0,0)$ - Eqs.(20 ,21, 22)	0.19	0.842	0.00	-0.112	0.957

Estes índices confirmam o bom comportamento dos resultados previstos pelo modelo, já observado na Tab. (2).

4. CONCLUSÕES

A vantagem da solução analítica, afora a possibilidade de controle do erro computacional, consiste na dependência explícita da solução com os parâmetros envolvidos, permitindo desse modo a investigação de suas influências. Além disso soluções analíticas também são usadas para testar e dar confiabilidade a modelos numéricos. Pode-se citar ainda que, atualmente, muitos modelos operacionais de qualidade do ar incorporam soluções analíticas, entre outros, os modelos KAPPAG, KAPPA-LT, CISP e MAOC na Itália (Tirabassi, 1997,).

Neste trabalho é descrito o desenvolvimento e teste de um modelo tridimensional analítico que simula a dispersão de contaminantes passivos na camada limite planetária, abandonados a partir de uma fonte pontual contínua elevada. O modelo é baseado na equação de difusão advecção e a solução é obtidas pelo método da Transformada Integral Generalizada. É importante ressaltar que a solução encontrada é analítica, uma vez que nenhuma aproximação foi feita ao longo de sua derivação. Por isso, devido a forma analítica desta solução, é possível controlar a precisão dos resultados aumentando-se o número de termos das séries truncadas. Todos os resultados apresentados tem uma precisão de 10 dígitos significativos. A solução também é válida para perfis da velocidade do vento dependentes da altura ou constantes.

O modelo proposto considera coeficientes de difusão turbulenta que variam com a distância da fonte em condições de turbulência homogênea com velocidades médias de vento uniformes e foi validado com dados dos experimentos de Copenhagen.

A análise dos resultados estatísticos mostrou uma boa relação entre os dados experimentais e os simulados para Copenhagen.Os resultados sugerem que a inclusão do efeito de memória, como é modelado pela teoria de Taylor, melhora a descrição do processo de transporte turbulento de um contaminante atmosférico passivo abandonado a partir de uma fonte pontual contínua. Estes resultados melhores, mostrados na Tab. (3) (Nmse, cor, Fb, Fs, Fa2), são uma consequência dos coeficientes de difusão turbulentos descritos em termos dos turbilhões energéticos e isto é uma função da distância, a juzante, da fonte.

Pode-se apontar que os resultados derivados aqui, sugerem que, para abandonos elevados em condições de convecção fraca à moderada (sem empuxo), as propriedades da turbulência na altura da fonte são as mais representativas do campo ambiental.

Finalmente é importante observar que esta formulação também é aplicável a problemas de dispersão de contaminantes, em que o coeficiente de difusão dependa da distância da fonte e da altura, bastando para tal proceder como (Moura, Vilhena and Degrazia, 1995). Onde a altura é discretizada em n intervalos e em cada intervalo é tomado o valor médio dos parâmetros envolvidos.

Referências

Chrysikopoulos, C., Hildemann, L. and Roberts, P. (1992). A three-dimensional steady-state atmospheric dispersion-deposition model for emissions from a ground area source, *Atmospheric Environment - Part A* **26A**(5): 747–757.

Cotta, R. and Mikhaylov, M. (1997). *Heat Conduction Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*, John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chinchester, England. 352p.

Degrazia, G. (1989). *Anwendung von Ahnlichkeitsverfahren auf die Turbulent Diffusion* *in den Konvektiven und Stabilen Grenzschicht*, PhD thesis, Institut F. Meteorologie und Klimaforshung, Univ. Karlsruhe. 98pp.

Gryning, S., Holtslag, A., Irwing, J. and Silversten, B. (1987). Applied dispersion modelling based on meteorological scaling parameters, *Atmospheric Environment* **21**(1): 79–89.

Hanna, S. (1989). Confidence limit for air quality models as estimated by bootstrap and jacknife resampling methods, *Atmospheric Environment* **23**: 1385–1395.

Lin, J. and Hildemann, L. (1996). Analytical solutions of the atmospheric diffusion equation with multiple sources and height-dependent wind speed and eddy diffusivities, *Atmospheric Environment* **30**(2): 239–254.

Moura, A., Vilhena, M. and Degrazia, G. (1995). Solução analítica para a dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável, *Proceedings - XIII COBEM/II CIDIM - Congresso Bras. Eng. Mecânica*.

Nieuwstadt, F. (1980). An analytic solution of the time-dependent, one-dimensional diffusion equation in the atmospheric boundary layer, *Atmospheric Environment* **14**: 1361–1364.

Özisik, M. (1980). *Heat Conduction*, John Wiley & Sons, Inc. 692p.

Pasquill, F. and Smith, F. (1983). *Atmospheric Diffusion*, Ellis Horwood Ltda, Chinchester. 473p.

Sharan, M. and Yadav, A. (1998). Simulation of diffusion experiments under light wind stable conditions by variable k-theory model, *Atmospheric Environment* **38**(20): 3481–3492.

Sharan, M., Singh, M. and Yadav, A. (1996). Mathematical model for atmospheric dispersion in low winds with eddy diffusivities as a linear functions of downwind distance., *Atmospheric Environment* **30**(7): 1137–1145.

Sharan, M., Yadav, A., Singh, M., Agarwal, P. and Nigam, S. (1996). A mathematical model for the dispersion of air pollutants in low wind conditions, *Atmospheric Environment* **30**(8): 1209–1220.

Tirabassi, T. (1997). Solutions of the advection-diffusion equation, *Air Pollution V - Modelling, Monitoring and Management Computational Mechanics Publications*. Editores: H Power, T. Tirabassi, C.A. Brebbia.

Tirabassi, T., Tagliazucca, M. and Galliani, G. (1987). Easy to use air pollution model for turbulent shear flow, *Environmental Software* **2**(1): 37–44.

ANALYTICAL SOLUTION OF A TRIDIMENSIONAL DISPERSION CONTAMINANT MODEL IN THE UNSTABLE PLANETARY BOUNDARY LAYER: EDDY DIFFUSIVITIES DEPENDING ON THE HEIGHT AND SOURCE DISTANCE.

Abstract. The objective of this work consist of the determination of the closed form solution for the stationary three-dimensional advection diffusion contaminant dispersion model. This model is valid for the dispersion of passive pollutants and for physical conditions of homogeneous turbulence and uniform wind speed, that means, for elevated contaminant releases that occur in intermediate stability conditions without strong buoyancy in the Planetary Boundary Layer. The solution is obtained using the Generalized Integral Transform Technique and is analytical in the sense that no approximation is made along its derivation. Simulations and comparisons with literature experimental results are made. In these simulations the dispersion coefficient were assumed to be dependent on the distance of the source.

Keywords: analytic solution, GITT, atmospheric dispersion, advection diffusion model.