

## SOLUÇÕES SIMILARES EM ESCOAMENTOS HIPERSÔNICOS

**Marcos Eidi Hatori** - hatori@tecsis.com.br  
Divisão de Engenharia Aeronáutica - ITA  
**José B. Pessoa Filho** - jbp@iae.cta.br  
Divisão de Sistemas Espaciais - IAE  
Centro Técnico Aeroespacial  
12228-904 - São José dos Campos - SP - Brasil

***Resumo.** O presente trabalho utiliza o conceito de solução similar para a solução das equações de camada limite compressível na região de estagnação de veículos hipersônicos axissimétricos. Efeitos de dissociação e ionização do ar são considerados sob a hipótese de gás em equilíbrio químico e termodinâmico local. O método de solução é iterativo, uma vez que não se conhecem todas as condições iniciais do problema. Dois sistemas auxiliares de equações diferenciais ordinárias são definidos a fim de melhorar a convergência do procedimento numérico resultando num algoritmo computacionalmente eficiente. Baseados nos perfis de velocidade, de temperatura e de composição química ao longo da camada limite calculou-se o aquecimento aerodinâmico no ponto de estagnação. Uma excelente concordância foi observada entre os resultados obtidos neste trabalho com outros disponíveis na literatura.*

***Palavras-chave:** Solução Similar, escoamento hipersônico, Equações de Camada Limite, Equilíbrio, Aquecimento Cinético*

### 1. INTRODUÇÃO

O Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) do Centro Técnico Aeroespacial (CTA) efetua estudos que visam o projeto e desenvolvimento de um microsatélite recuperável denominado SARA (Sistema de Recuperação Aerodinâmica), para realização de experimentos em ambiente de microgravidade. O projeto SARA prevê a colocação de um microsatélite em uma órbita de 300 km em torno da Terra e a sua posterior recuperação em solo (Moraes e Pilchowski, 1997; Corrêa e Moraes, 1999). A fase de reentrada atmosférica é a fase mais crítica de toda a missão.

A Figura 1 mostra a variação da velocidade e da altitude ao longo da trajetória de reentrada do SARA. Observa-se que entre 100 km e a superfície terrestre o SARA tem sua velocidade reduzida em duas ordens de magnitude, ou seja, de 8000 m/s para 80 m/s. Considerando-se que o SARA é desprovido de qualquer sistema auxiliar de frenagem, essa redução de velocidade é causada única e exclusivamente pelo atrito entre o veículo e a atmosfera terrestre. Outro aspecto relevante ilustrado na Figura 1 relaciona-se ao fato de que

grande parte dessa desaceleração ocorre em um intervalo de tempo relativamente pequeno, da ordem de 5 minutos. Conseqüentemente, uma grande quantidade de energia cinética é transformada em calor, parte do qual, é transferido às paredes do SARA como, aliás, mostrado pela linha tracejada da Fig. 1. Observa-se que à desaceleração sofrida pelo SARA durante sua reentrada atmosférica corresponde uma significativa elevação do fluxo de calor no ponto de estagnação, o qual atinge seu valor máximo de  $2,1 \text{ MW/m}^2$  a cerca de 58 km de altitude.

A Figura 2 mostra a região de estagnação do escoamento em torno do SARA considerando-se ângulo de ataque nulo. Devido ao número de Mach do escoamento e à geometria do veículo, forma-se uma onda de choque destacada à sua frente. Ao passar através da parte central dessa onda, o escoamento sofre uma significativa redução de velocidade e um aumento de temperatura que, no caso do SARA, atinge valores da ordem de 6000 K.

A análise térmica da reentrada atmosférica constitui parte fundamental no projeto e desenvolvimento de sistemas aeroespaciais recuperáveis, nos quais busca-se uma solução de compromisso entre a necessidade de proteção de sistemas embarcados contra elevadas (ou baixas) temperaturas e a redução da massa embarcada. No caso do SARA, por exemplo, para uma massa total de 150 kg, cerca de 35 kg correspondem ao sistema de proteção térmica. Em tais situações, o aumento da quantidade de proteção térmica, causado por imprecisão na análise térmica, representa uma diminuição na capacidade de satelização do veículo lançador e/ou um aumento do combustível embarcado para colocá-lo em órbita, ambos os casos bastante críticos para missões desse tipo.

Em um trabalho anterior (Hatori e Pessoa-Filho, 1998) utilizou-se o conceito de soluções similares para obter os perfis de temperatura e velocidade na região de estagnação de veículos supersônicos. Para tanto, considerou-se o ar como um gás caloricamente perfeito. Devido aos efeitos de dissociação e ionização do ar, a hipótese de gás caloricamente perfeito é de pouca utilidade para a trajetória de reentrada do SARA. Portanto, o objetivo deste trabalho é o de estender a metodologia desenvolvida anteriormente (Hatori e Pessoa-Filho, 1998) para situações nas quais os efeitos de “gás real” estejam presentes. Nas seções que se seguem são apresentadas as hipóteses simplificadoras, a formulação, o método de solução e os resultados obtidos para solução do escoamento no ponto de estagnação de escoamentos hipersônicos.

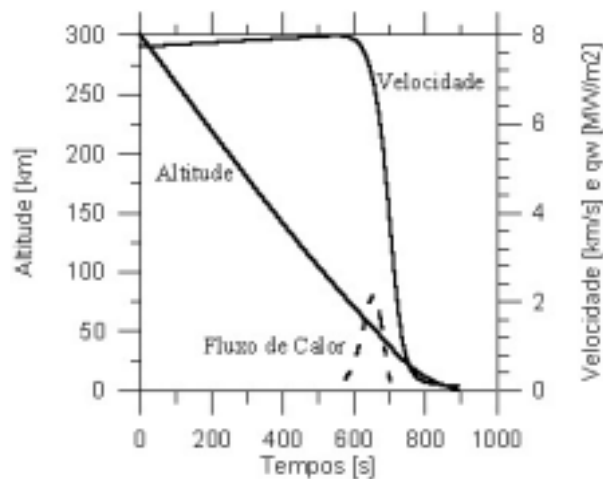


Figura 1 - Trajetória de reentrada do SARA.

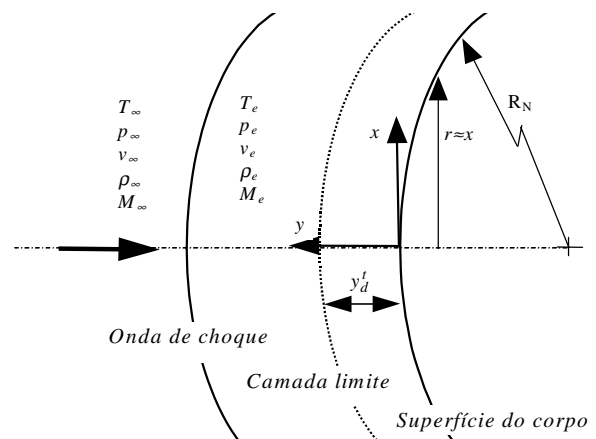


Figura 2 - Detalhe da região de estagnação.

## 2. FORMULAÇÃO

Assumindo as hipóteses de escoamento laminar, permanente, compressível, com equilíbrio termoquímico local e com simetria axial, obtêm-se as seguintes equações de conservação (Anderson Jr., 1989):

Equação da conservação de massa:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(r \rho v) = 0. \quad (1)$$

Equação da quantidade de movimento na direção  $x$ :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2)$$

Equação da quantidade de movimento na direção  $y$ :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Equação de conservação da energia:

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho \sum_{i=1}^M D_i \frac{\partial c_i}{\partial y} h_i \right]. \quad (4)$$

onde  $u$  e  $v$  são as velocidades nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.  $\rho$ ,  $p$ ,  $\mu$ ,  $k$ ,  $H$ ,  $T$ ,  $D_i$ ,  $c_i$  e  $h_i$  representam, respectivamente, a massa específica, a pressão, a viscosidade, a condutividade térmica, a entalpia total ( $H=h+u^2/2$ ), a temperatura, o coeficiente de difusão da espécie  $i$  na mistura, a fração em massa da espécie  $i$  e a entalpia da espécie  $i$ .  $r$  é ilustrado na Figura 2. As Eqs. (1)-(4) estão sujeitas às seguintes condições de contorno:

Condições de parede ( $y = 0$ ):

$$u(x,0)=0 \quad ; \quad v(x,0)=0 \quad ; \quad T = T_w = cte. \quad (5)$$

Condições de fronteira de camada limite ( $y=\delta$ ):

$$u(x,\delta)=u_e \quad ; \quad T(x,\delta)=T_e. \quad (6)$$

## 3. SOLUÇÃO SIMILAR

Para a solução das equações de camada limite utiliza-se o conceito de solução similar, o qual permite transformar o sistema de equações diferenciais parciais, Eqs. (1)-(4), em um sistema de equações diferenciais ordinárias, a partir da seguinte transformação de variáveis (Levy, 1954; Lees, 1956):

$$\xi = \int_0^x \rho_w \mu_w u_e r^2 dx \quad e \quad \eta = \frac{u_e r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy. \quad (7.a,b)$$

Utilizando-se as definições acima, definindo-se as variáveis adimensionais:

$$f' = \frac{u}{u_e} \quad e \quad g = \frac{h + \frac{u^2}{2}}{H_e}, \quad (8.a,b)$$

obtêm-se, após uma série de simplificações, o seguinte sistema de equações (Anderson Jr., 1989):

$$(l f'')' + f f'' = \frac{1}{2} \left[ (f')^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right], \quad (9.a)$$

$$\left( \frac{l}{Pr} g' \right)' + f g' + \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{l}{Pr} \sum_{i=1}^M \frac{c_{ie}}{H_e} h_i \frac{ds_i}{d\eta} (Le-1) \right] = 0, \quad (9.b)$$

onde  $l = \frac{\rho \mu}{\rho_w \mu_w}$ ,  $c_{ie}$  é fração em massa de cada espécie na fronteira da camada limite,  $h_i$  é a entalpia de cada espécie,  $H_e$  é a entalpia total da mistura fora da camada limite,  $Pr$  é o número de Prandtl e  $Le$  é o número de Lewis. Essas duas equações estão sujeitas as seguintes condições de contorno:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad g(0) = \frac{h_w}{H_e}, \quad (9.c,d,e)$$

$$f'(\eta \rightarrow \infty) = 1; \quad g(\eta \rightarrow \infty) = 1. \quad (9.f,g)$$

Através da mudança de variáveis estabelecidas pelas Eqs. (7), e algumas outras simplificações, foi possível transformar um conjunto de equações diferenciais parciais, Eqs. (1)-(4), em um conjunto de duas equações diferenciais ordinárias, não lineares, Eqs. (9), as quais podem ser ainda mais simplificadas definindo-se o seguinte conjunto de variáveis:

$$y(\eta) = f'(\eta), \quad z(\eta) = y'(\eta), \quad k(\eta) = g'(\eta), \quad (10.a, b,c)$$

que, substituídas nas Eqs. (9), fornecem:

$$\begin{aligned} f' &= y, \\ y' &= z, \\ (l z)' &= \frac{1}{2} \left( y^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right) - f z, \\ g' &= k, \\ \left( \frac{l}{Pr} k \right)' &= -f k - \text{termo}, \end{aligned} \quad (11.a,b,c,d,e)$$

onde

$$termo = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{l}{Pr} \sum_{i=1}^M \frac{c_{ie}}{H_e} h_i \frac{ds_i}{d\eta} (Le_i - 1) \right), \quad (12)$$

refere-se ao termo de difusão de massa causada por gradientes de concentração das espécies no interior da camada limite.

Com as funções  $y(\eta)$ ,  $z(\eta)$  e  $k(\eta)$ , definidas pelas Eqs. (10), foi possível transformar um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de terceira e segunda ordem, Eqs. (9.a) e (9.b), em um sistema de cinco equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, (Eqs. 11), cuja solução pode ser numericamente obtida através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem (Cheney e Kincaid, 1985).

A determinação das condições de iniciais é feita a partir da definição das variáveis transformadas sendo dadas por:

$$f(0) = 0, \quad (13.a)$$

$$f'(0) = y(0) = 0, \quad (13.b)$$

$$g(0) = g_w, \quad (13.c)$$

$$f'(0) = s, \quad g'(0) = t. \quad (13.d,e)$$

Vale observar que as Eqs. (13.d) e (13.e) relacionam-se, respectivamente, aos gradientes de velocidade e entalpia na parede, os quais, em realidade, somente são conhecidos a partir da solução do sistema de equações. Dessa forma, o método de solução das Eqs. (11) e (13) é iterativo consistindo em atribuir valores “arbitrários” a  $s$  e a  $t$ ; resolver numericamente o sistema de Eqs. (11) e (13) e; verificar a consistência física dos resultados utilizando-se, para tanto, os valores de  $f'(\eta \rightarrow \infty)$  e  $g(\eta \rightarrow \infty)$ , dados pelas Eqs. (9.f) e (9.g), respectivamente. Por esse procedimento, os valores de  $s$  e  $t$  são encontrados por tentativa e erro.

Trata-se, em realidade, do mesmo procedimento utilizado por Blasius para solução das equações de camada limite incompressível sobre uma placa plana. Naquele caso, entretanto, a equação da energia não era resolvida e, conseqüentemente, tinha-se um sistema de três equações diferenciais ordinárias e uma única condição inicial desconhecida, qual seja,  $f'(0)=s$ . Neste caso, além de cinco equações, Eqs. (11), e duas condições iniciais desconhecidas, Eqs. (13.d,e), tem-se a necessidade de resolver o sistema de equações para toda uma trajetória de reentrada. Em tais circunstâncias, o procedimento de tentativa e erro torna-se extremamente demorado e, portanto, inviável. Com o objetivo de tornar o procedimento de cálculo mais rápido e eficiente utilizou-se neste trabalho o procedimento desenvolvido por Hatori e Pessoa-Filho (1998).

## 4. PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

### 4.1 Determinação das Propriedades do Escoamento Após o Choque

Devido aos efeitos de dissociação e ionização do ar, este não pode mais ser considerado caloricamente perfeito. Conseqüentemente, não se pode mais utilizar as equações usuais de choque normal. Nesses casos, as propriedades do ar são calculadas utilizando-se os princípios de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia através da porção normal da onda de choque, quais sejam:

$$\rho_{\infty} u_{\infty} = \rho_e u_e, \quad p_{\infty} + \rho_{\infty} u_{\infty}^2 = p_e + \rho_e u_e^2, \quad h_{\infty} + \frac{u_{\infty}^2}{2} = h_e + \frac{u_e^2}{2}. \quad (14.a,b,c)$$

onde os subscritos  $\infty$  e  $e$  referem-se, respectivamente, às condições antes e depois da onda de choque, conforme ilustrado na Fig. 2. Substituindo-se a Eq. (14.a) nas Eqs. (14.b) e (14.c), obtêm-se:

$$p_e = p_{\infty} + \rho_{\infty} u_{\infty}^2 \left(1 - \frac{\rho_{\infty}}{\rho_e}\right), \quad h_e = h_{\infty} + \frac{u_{\infty}^2}{2} \left[1 - \left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho_e}\right)^2\right]. \quad (15.a,b)$$

Têm-se, portanto, duas equações para as três incógnitas  $p_e$ ,  $h_e$  e  $\rho_e$ . Uma terceira equação de estado relacionando essas incógnitas é obtida a partir do trabalho de Tannehill e Mugge (1974), qual seja

$$\rho_e = \frac{p_e}{h_e} \left( \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma} - 1} \right), \quad (16.a)$$

onde:

$$\tilde{\gamma} = d_1 + d_2 Y + d_3 Z + d_4 YZ + \frac{d_5 + d_6 Y + d_7 Z + d_8 YZ}{1 + \exp[d_9 (X + d_{10} Y + d_{11})]}, \quad (16.b)$$

$$Y = \log\left(\frac{\rho_e}{1,292}\right), \quad X = \log\left(\frac{p_e}{1,013 \times 10^5}\right), \quad Z = X - Y, \quad (16.c)$$

onde os coeficientes  $d_i$ ,  $i=1,2,\dots,11$ , foram tabelados por Tannehill e Mugge (1974) em função da densidade e da pressão. Esse sistema de três equações é resolvido iterativamente, arbitrando-se, inicialmente,  $\rho_{\infty}/\rho_e = 0,1$ , nas Eqs.(15). Obtidos  $p_e$  e  $h_e$ , calcula-se, a partir da Eq. (16.a), um novo valor de  $\rho_{\infty}/\rho_e$ . Esse processo é repetido até que um critério de convergência estipulado seja obedecido. A temperatura do escoamento após o choque também é calculada a partir de equações semelhantes às Eqs. (16), as quais podem ser encontradas em Tannehill e Mugge (1974) ou Anderson Jr. (1989).

## 4.2 Determinação da Composição Química do Ar Após o Choque

Além do cálculo das propriedades termodinâmicas do ar, é necessário conhecer-se sua composição química. Para tanto, utilizou-se o procedimento desenvolvido por Prabhu e Erickson (1988), o qual fornece a composição química do ar a partir da temperatura e da massa específica.

## 5. SOLUÇÃO NUMÉRICA

### 5.1 Procedimento de Solução Iterativa

O procedimento iterativo descrito anteriormente tem como única finalidade estabelecer as condições do escoamento após a onda de choque, as quais são as condições de contorno para solução das equações de camada limite. Para a obtenção dos perfis de velocidade,

temperatura e composição química ao longo da camada limite, é necessária a solução do sistema de equações formado pelas Eqs. (11). Entretanto, o terceiro termo à esquerda da Eq. (9.b), Eq. (12), é função da composição química do ar ao longo da camada limite, a qual é desconhecida. Consequentemente, o procedimento de solução é iterativo podendo ser resumido, para cada ponto da trajetória de reentrada, como segue:

- i.* Assume-se  $termo=0$ , Eq. (11.e); Resolve-se as Eqs. (11) até obter-se os valores de  $s$  e  $t$  que satisfaçam às Eqs. (9.f,g);
- ii.* A partir dos perfis de temperatura obtidos, calcula-se a composição química ao longo da camada limite (Prabhu e Erickson, 1988), bem como o valor de  $termo$ , Eq. (12);
- iii.* Resolvem-se as Eqs. (11) novamente considerando os valores de  $termo$  avaliados no item anterior.
- iv.* Repetem-se os procedimentos *ii* e *iii* até que os seguintes critérios de convergência estabelecidos para  $s$ ,  $t$  e  $termo$  sejam obtidos:

$$\left| \frac{s^{i+1} - s^i}{s^{i+1}} \right| \leq 10^{-10}, \quad \left| \frac{t^{i+1} - t^i}{t^{i+1}} \right| \leq 10^{-10}, \quad (17.a,b)$$

$$\left| \left[ \sum_{j=1}^{j=NP} [termo(\eta^j)]^2 \right]^{i+1} - \left[ \sum_{j=1}^{j=NP} [termo(\eta^j)]^2 \right]^i \right| \leq 10^{-10}, \quad (17.c)$$

onde  $NP$  é o número de pontos nodais ao longo da espessura da camada limite, ou seja,  $\eta^{NP} = \delta$ , sendo  $\delta$  a espessura da camada limite. Maiores detalhes sobre o procedimento de cálculo podem ser obtidos em Hatori (1999).

## 6. RESULTADOS

### 6.1 Gás caloricamente perfeito

A Tabela 1 mostra a temperatura, pressão e massa específica após a onda de choque, bem como a fração em massa (valor percentual) de cada uma das espécies consideradas na mistura. Pode-se observar que, para a trajetória de reentrada do SARA, os efeitos de ionização são desprezíveis. Os efeitos de dissociação são desprezíveis para altitudes abaixo de 30 km, aproximadamente. Nessas situações, os resultados obtidos através da metodologia apresentada neste trabalho devem ser similares àqueles obtidos considerando-se a hipótese de gás caloricamente perfeito. As Figuras 3 e 4 comparam os resultados obtidos neste trabalho com aqueles obtidos por Hatori e Pessoa-Filho (1998), que consideraram o ar caloricamente perfeito. Como esperado, observa-se uma excelente concordância entre os dois conjuntos de resultados.

### 6.1 Resultados da Literatura

Uma segunda validação do procedimento de cálculo desenvolvido neste trabalho, é efetuada comparando-se os resultados aqui obtidos com os de Fay e Riddell (1958), os quais são considerados clássicos na literatura. As Figuras 5 e 6 mostram os perfis de temperatura e de entalpia adimensionais para um dado ponto da trajetória de reentrada do SARA. Uma excelente concordância é observada entre os resultados obtidos neste trabalho e aqueles obtidos por Fay e Riddell (1958).

Tabela 1 – Propriedades do ar e composição química (fração em massa percentual) após a onda de choque para várias altitudes ao longo da trajetória de reentrada.

<i>Altitude [km]</i>	<b>90</b>	<b>80</b>	<b>70</b>	<b>60</b>	<b>50</b>	<b>40</b>	<b>30</b>	<b>20</b>
$T_e$ [K]	5.467	5.907	6.254	6.371	6.000	3.588	776	217
$p_e$ [atm]	0,002	0,010	0,045	0,153	0,342	0,455	0,182	0,054
$\rho_e$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$6,9 \times 10^{-5}$	$3,6 \times 10^{-4}$	$1,4 \times 10^{-3}$	$5,1 \times 10^{-3}$	$1,4 \times 10^{-2}$	$3,9 \times 10^{-2}$	$8,3 \times 10^{-2}$	$8,9 \times 10^{-2}$
$O_2$	0,0001	0,0004	0,0008	0,0025	0,0118	7,1347	23,1682	23,1683
$N_2$	18,0126	19,3587	23,0764	35,0053	57,2983	73,2494	75,5467	75,5468
$O$	23,1279	23,1068	23,0757	23,0077	22,8288	13,4331	0,0000	0,0000
$NO$	0,0307	0,0572	0,1050	0,2310	0,5775	4,8760	0,0001	0,0000
$N$	57,4937	56,1258	52,3802	40,3995	17,9619	0,0219	0,0000	0,0000
$NO^+$	0,0334	0,0420	0,0508	0,0560	0,0356	0,0001	0,0000	0,0000
$e^-$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$N^+$	0,0105	0,0160	0,0175	0,0081	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
$O^+$	0,0061	0,0082	0,0087	0,0051	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000
$Ar$	1,2815	1,2815	1,2815	1,2815	1,2816	1,2816	1,2816	1,2816
$Ar^+$	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

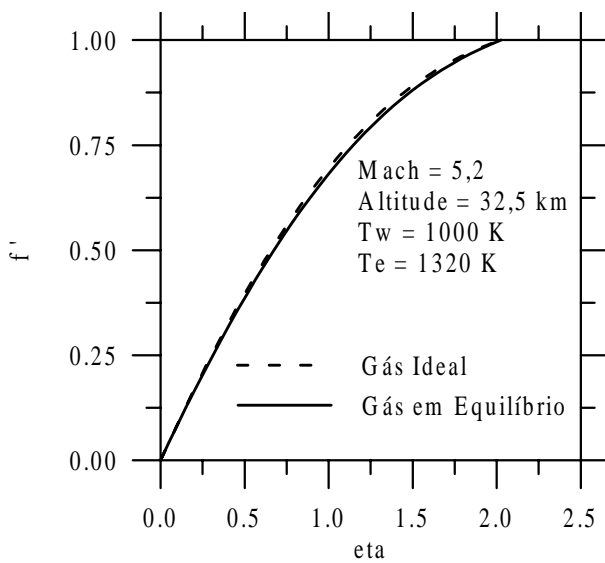


Figura 3 – Perfis de velocidade adimensional,  $f'$ , ao longo da camada limite.

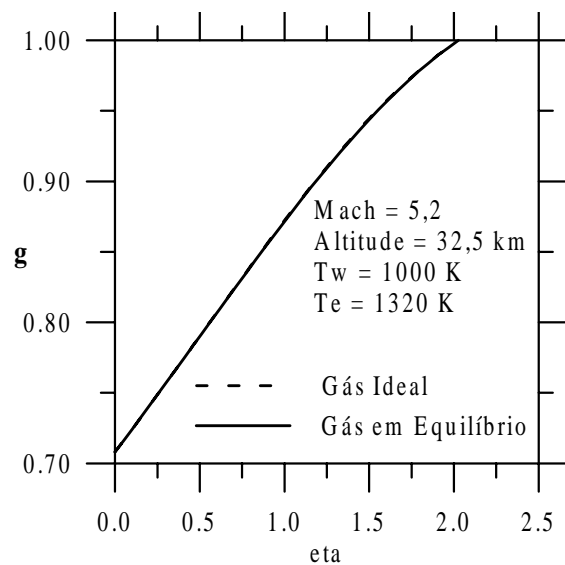


Figura 4 - Perfis de entalpia adimensional,  $g$ , ao longo da camada limite.



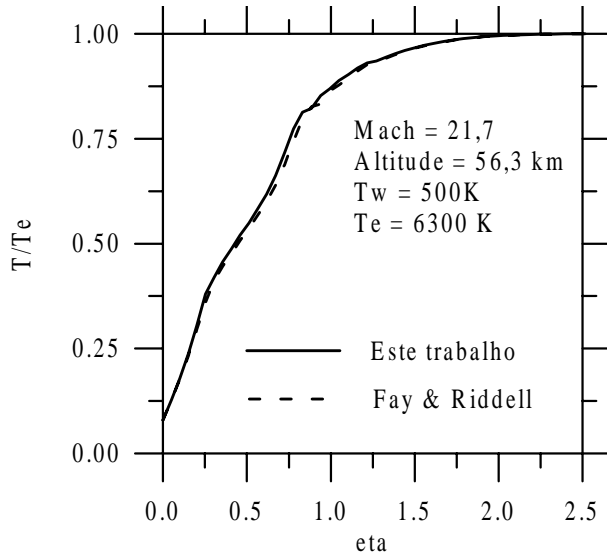


Figura 5 - Perfil de temperatura adimensional ao longo da camada limite.

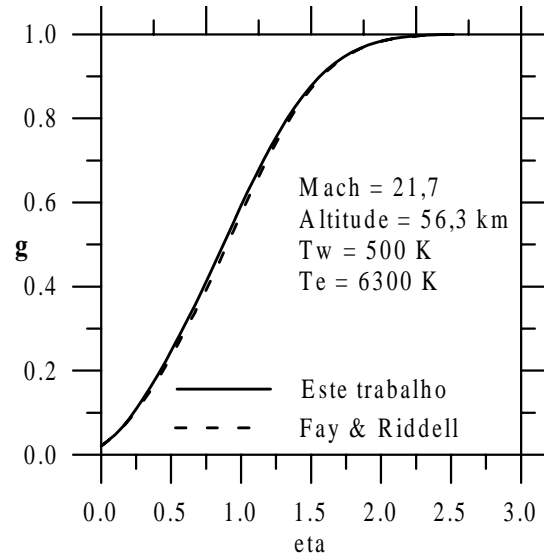


Figura 6 - Perfil de entalpia adimensional ao longo da camada limite.

## 6.2 Fluxo de Calor no Ponto de Estagnação

Validado o procedimento de cálculo, este foi utilizado para a determinação do fluxo de calor no ponto de estagnação do *SARA*, o qual é dado por (Anderson Jr., 1989):

$$q_w = - \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} - \left( \rho \sum_{i=1}^M D_i h_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (18)$$

O primeiro termo à direita na Eq. (18) representa o transporte de energia por condução, enquanto o segundo, corresponde ao transporte de energia por difusão das espécies na mistura. A Eq. (18) pode ser reescrita como:

$$q_w = - \sqrt{2 \frac{\rho_w}{\mu_w} \frac{d u_e}{d x} \frac{k_w H_e}{c_{pw}}} [g'(0) + G], \quad (19.a)$$

$$\frac{d u_e}{d x} = \frac{1}{R_N} \sqrt{\frac{(p_e - p_\infty)}{\rho_e}}, \quad G = \sum_{i=1}^M \left( c_{ie} (Le_i - 1) \frac{h_i}{H_e} \frac{d s_i}{d \eta} \right)_{\eta=0}, \quad s_i = \frac{c_i}{c_{ie}} \quad (19.b,c,d)$$

$R_N$  representa o raio de curvatura da região de estagnação, Fig. 2. Para o *SARA*  $R_N = 0,276$  m. Os valores das variáveis nas Eqs. (19) são obtidos da solução do sistema de equações, Eqs. (11). Um valor negativo de  $q_w$ , indica transferência de calor à parede do *SARA*. Os resultados a partir das Eqs. (19), foram comparados com as relações propostas por Fay e Riddell (1958).

A Figura 7 mostra os resultados obtidos, considerando-se temperaturas de parede de 1000 K e 1500 K, típicas de sistemas de proteção térmica de veículos espaciais. Conforme mostrado, os resultados obtidos pela metodologia proposta neste trabalho estão em excelente concordância com os de Fay e Riddell (1958). Além disso, o procedimento numérico (Hatori e Pessoa-Filho, 1998; Hatori, 1999) mostrou-se computacionalmente eficiente no sentido de que permitiu resolver as equações de camada limite para cerca de 370 pontos de uma trajetória em cerca de 2 minutos, utilizando um microcomputador *Pentium II 400 MHz*.

### 6.3 Contribuição dos Termos de Condução de Calor e Difusão de Massa

A Figura 8 mostra a contribuição do fluxo de calor difusivo, segundo termo à direita da Eq. (18), sobre o fluxo de calor total, ao longo da trajetória de reentrada. Pode-se concluir que a contribuição do termo difusivo é desprezível quando comparada à contribuição do termo condutivo. Conforme mostrado por Hatori e Pessoa-Filho (2000), tal resultado decorre do fato de que sob a hipótese de equilíbrio químico e para as temperaturas de parede aqui investigadas, o ar não se encontra dissociado próximo à parede.

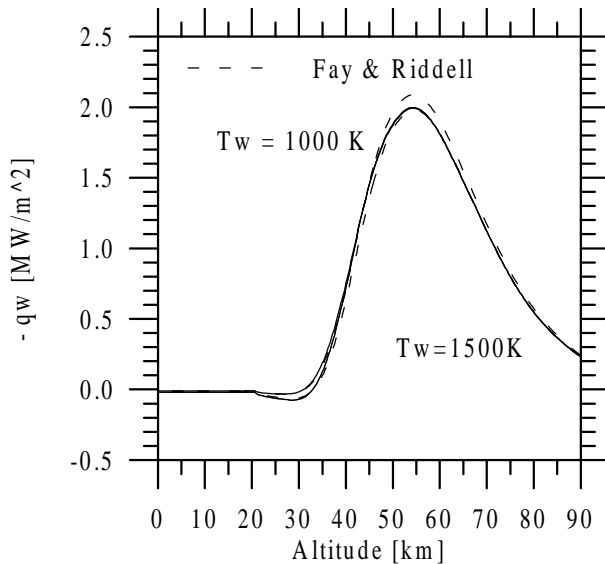


Figura 7 - Fluxo de calor no ponto de estagnação ao longo da trajetória de reentrada do SARA para duas temperatura de parede.

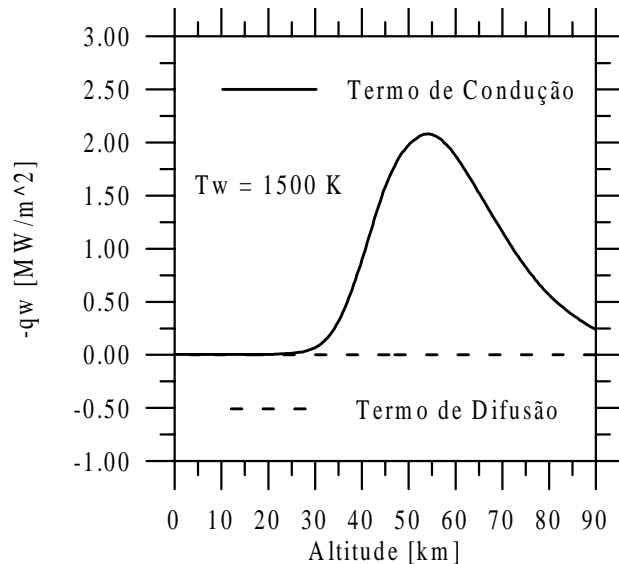


Figura 8 - Contribuição dos termos de condução e de difusão de massa no fluxo de calor total.

## 7. CONCLUSÕES

O presente trabalho utilizou o conceito de soluções similares para resolver as equações de camada limite na região de estagnação de escoamentos hipersônicos. Efeitos de dissociação do ar foram considerados, sob a hipótese de equilíbrio termoquímico local. O sistema de equações resultante foi resolvido numericamente utilizando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem. A metodologia foi aplicada à trajetória de reentrada atmosférica de um microsatélite. Os resultados obtidos para os perfis de entalpia, velocidade e composição química, permitiram avaliar o fluxo de calor no ponto de estagnação. Os resultados obtidos foram comparados com outros disponíveis na literatura tendo-se observado uma excelente concordância. Adicionalmente, utilizou-se um procedimento para automatizar o processo de convergência da solução. Tal permitiu obter a solução das equações de camada limite para uma trajetória composta de 370 pontos, em cerca de 2 minutos, utilizando-se um microcomputador *Pentium II*, 400 MHz.

### Agradecimentos

Os autores gostariam de registrar seus agradecimentos ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)* pelo suporte fornecido durante a execução deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- Anderson Jr., J. D., 1989, Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics, McGraw-Hill.
- Cheney, W., and Kincaid, D., 1985, Numerical Mathematics and Computing, Brooks/Cole Publishing Company.
- Corrêa Jr., F. A., e Moraes Jr., P., 1999, "Experimentos Científicos e Tecnológicos em Ambiente de Baixa Gravidade," Proceedings of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Artigo AAAJJI, Águas de Lindóia, SP.
- Fay, J. A., and Riddell, F. R., 1958, "Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air," Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 2, pp.73-85, 121.
- Hatori, M. E., e Pessoa-Filho, J. B., 2000, "Similarity Solution for the Equilibrium Compressible Boundary Layer Equations," Proceedings of the 34<sup>th</sup> National Heat Transfer Conference, paper # 12059, Pittsburgh, EUA.
- Hatori, M. E., 1999, "Soluções Similares em Escoamentos Hipersônicos," Trabalho de Graduação, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- Hatori, M. E., e Pessoa-Filho, J. B., 1998, "Soluções Similares em Escoamentos Supersônicos," Anais do VII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, ENCIT 98, Rio de Janeiro, Novembro.
- Lees, L., 1956, "Laminar Heat Transfer Over Blunt-Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds," Jet Propulsion, Vol. 26, pp. 259-269.
- Levy, S., 1954, "Effect of Large Temperature Changes (Including Viscous Heating) upon Laminar Boundary Layer with Variable Free-Stream Velocity, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 21, No. 7, pp. 459-474.
- Moraes Jr., P. e Pilchowski, H., 1997, "Plataforma Orbital Recuperável para Experimentação em Ambiente de Microgravidade," Proceedings of the 14th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Artigo COB254, Bauru, SP.
- Prabhu, R. K., and Erickson, W. D., 1988, "A Rapid Method for the Computation of Equilibrium Chemical Composition of Air to 15000 K," NASA Technical Paper 2792.
- Tannehill, J. C., and Mugge, P. H., 1974, "Improved Curve Fits for the Thermodynamic Properties of Equilibrium Air Suitable for Numerical Computation Using Time-Dependent or Shock Capturing Methods," NASA Contractor Report 2470.

## SIMILARITY SOLUTION FOR HYPERSONIC FLOWS

**Abstract.** *Aerodynamic heating at the stagnation point of a microsatellite moving at hypersonic speed through the earth's atmosphere is calculated by solving the laminar, compressible, axisymmetric boundary layer equations. Air is assumed to be in local thermochemical equilibrium. The boundary layer equations are solved by using the similarity concept. Since some initial conditions of the similar equations are unknown, the solution procedure is iterative. To improve the convergence of the numerical procedure, two auxiliary systems of ordinary differential equations are defined leading to a computationally efficient algorithm. Based upon the calculated velocity, temperature and species concentration profiles along the boundary layer, it is possible to evaluate aerodynamic heating at the stagnation point. An excellent agreement was observed between the results obtained in this work and others available in the literature.*

**Key-words:** *Similarity Solution, Hypersonic Flow, Boundary Layer Equations, Equilibrium, Aerodynamic Heating.*