

## Simulação Numérica de Camadas de Mistura em Desenvolvimento Temporal e Espacial, Usando a Técnica Espectral da Colocação

**Fernandes, M. S.** – [mfernand@mecanica.ufu.br](mailto:mfernand@mecanica.ufu.br)

Universidade Federal de Uberlândia, MG, LEDIF

Faculdade de Engenharia Mecânica – João Naves de Ávila, SN

**Biage, M.** – [mbiage@mecanica.ufu.br](mailto:mbiage@mecanica.ufu.br)

Universidade Federal de Uberlândia, MG, LEDIF

Faculdade de Engenharia Mecânica – João Naves de Ávila, SN

**Resumo:** *O objetivo do presente trabalho foi o de desenvolver um código computacional, utilizando a técnica espectral da colocação, para simular camadas de mistura compressível e turbulenta, em desenvolvimento temporal e espacial, descritas pelas equações governantes completas, na forma conservativa. Para isto, implementou-se o método espectral da colocação de Chebyshev, aliado ao esquema de integração temporal de Runge-Kutta, utilizando uma formulação explícita. Para a discretização das derivadas parciais envolvidas no equacionamento, utilizou-se a Transformada Rápida de Chebyshev (TRC) que permitiu obter um significativo ganho na velocidade de processamento. O código computacional foi desenvolvido para simular escoamentos compressíveis, em altos e baixos números de Reynolds, com e sem efeitos de estratificação. Os resultados revelaram vários aspectos das estruturas dos escoamentos que, na sua grande maioria, concordam com as conclusões apresentadas por várias pesquisas sobre camadas de mistura. Em particular, são ilustrados os detalhes do comportamento do campo de densidade nas camadas de mistura espaciais e temporais, evidenciando os efeitos da taxa de densidade na camada turbulenta.*

**Palavras-chave:** *Camada de Mistura, Chebyshev, Colocação Espectral, Escoamento Compressível e Turbulento*

### INTRODUÇÃO

O sucesso do método espectral na solução de problemas físicos relacionados com a área da dinâmica dos fluidos tem sido apreciável (Cannuto *et al.*, 1988). Entretanto, esta técnica não foi ainda desenvolvida o suficiente para abranger, por completo, todos os tipos de problemas físicos relacionados à Dinâmica dos Fluidos.

O método espectral pode ser visto como o máximo de desenvolvimento da classe de esquemas de discretização de equações diferenciais, conhecido genericamente como Método dos Resíduos Ponderados (MWR) (Finlayson e Scriven, 1966). O Método dos Resíduos Ponderados caracteriza-se por estabelecer uma função tentativa, também conhecida como função peso. As funções tentativas são usadas como funções base para uma expansão em série truncada da solução. As funções teste são usadas para garantir que a equação diferencial seja satisfeita com uma precisão adequada pela expansão da série truncada. Isto é alcançado quando se minimiza o resíduo (erro produzido pelo truncamento da série). Um procedimento

equivalente é aquele em que o resíduo satisfaz uma condição de ortogonalidade entre as funções tentativas e as funções teste (Cannuto *et al.*, 1988).

A escolha das funções tentativas que distingue o método espectral em dos métodos de diferenças finitas e elementos finitos. As funções tentativas do método espectral são funções globais infinitamente diferenciáveis (tipicamente, elas são produtos tensoriais das auto-funções dos problemas singulares de Sturm-Liouville).

A escolha das funções teste caracteriza a distinção entre os principais esquemas espectrais: Galerkin, Colocação e Tau. Na técnica de Colocação, as funções teste são transladadas pelas funções delta de Dirac, centrada em pontos especiais, chamados de pontos de colocação. Contudo, um conjunto de equações suplementares é usado para aplicar às condições de contorno.

A técnica espectral aplicada no presente estudo foi a do método da colocação espectral de Chebyshev, que quando comparada com as outras técnicas, obtém as seguintes vantagens: maior facilidade de implementação computacional, maior facilidade de aplicação ao problema (Cannuto *et al.*, 1988) e não exigem periodicidade das condições de contorno.

Neste estudo a técnica espectral foi aplicada para simular escoamentos denominados Camadas de Mistura, que é caracterizado por uma região intensamente turbulenta formada no limite entre dois escoamentos paralelos com velocidades diferentes. A camada de mistura de um fluido newtoniano, não reativo e compressível é um dos escoamentos turbulentos mais simples. Contudo, apesar desta simplicidade relativa, este escoamento apresenta em sua estrutura um comportamento bastante complexo, possuindo todos os fenômenos característicos da turbulência. O comportamento da camada de mistura depende da condição inicial (escoamento inicial), da condição de contorno (geometria do escoamento), do número de Reynolds e do número de Mach. Considerando-se que a razão entre forças inerciais e forças viscosas é dada pelo número de Reynolds, esta razão é consideravelmente maior no escoamento turbulento. O princípio da similaridade do número de Reynolds indica que os escoamentos cisalhantes turbulentos deveriam alcançar um estado de equilíbrio universal. Em particular, em escoamentos de camada de mistura, a taxa de evolução da camada na direção axial é pequena e, conseqüentemente, o princípio de equilíbrio dinâmico sugere que esta camada deveria progressivamente alcançar a independência da condição inicial (Husain *et al.*, 1979).

É notável que em um escoamento constituído por estruturas organizadas, semelhante a uma camada de mistura instável, apresenta muitos aspectos associados com os escoamentos turbulentos (caracterizados por uma larga banda no espectro). Porém, as medidas de flutuação de densidade realizadas por Rebollo (1973) mostraram que as grandes estruturas presentes na camada de mistura têm um comportamento de auto-preservação.

## MODELO MATEMÁTICO

Com o objetivo de facilitar o tratamento computacional, as equações que modelam o problema são tratadas na sua forma conservativa, foram escritas na forma matricial, como segue:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{L_x}{L_y} \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

onde

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E_t \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ u(\rho E_t + p - \tau_{xx}) - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix} \quad (2,3)$$

e

$$F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ v(\rho E_t + p - \tau_{yy}) - u\tau_{xy} + q_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

Como condição inicial, para simulação do problema de camada de mistura com desenvolvimento tanto espacial quanto temporal, foi imposto um perfil inflexional do tipo tangente hiperbólica, como pode ser observado na figura 1.

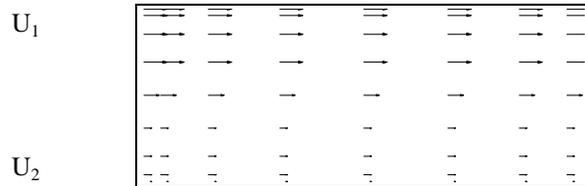


Figura 1. Perfil básico inicial para camada de mistura em desenvolvimento espacial.

As condições de contorno para camada de mistura em desenvolvimento temporal são periódicas ao longo da direção  $x$  e impostas na direção  $y$ , para todas as variáveis independentes. Para o problema desenvolvendo-se espacialmente todas as variáveis independentes foram impostas, sendo que: impôs-se um perfil inflexional na entrada e condição de Neuman nas outras laterais.

## APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS

No presente trabalho, as EDPs do problema foram discretizadas utilizando-se a técnica da Colocação Espectral, com distribuição de pontos de quadratura seguindo a formulação de Gauss-Lobatto. O método de colocação espectral de Chebyshev adapta-se melhor com este tipo de formulação (Cannuto *et al*, 1988).

Para obter-se uma solução estacionária estável, separam completamente as discretizações no tempo e no espaço. Primeiro discretizam os termos espaciais, obtendo-se uma equação diferencial ordinária (EDO), tendo como variável independente o tempo. Posteriormente, discretiza-se a EDO resultante no tempo. Para isto, neste trabalho foi aplicado o método de Runge-Kutta de ordem  $s$ , proposto por Jameson, Schmidt e Turkel (1981), onde a discretização no tempo é obtida por passo de tempo dividido em estágios.

Tomando-se as Equações matriciais 1 a 3, é possível definir uma função  $P(U)$  que caracteriza a projeção espectral no espaço, obtida a partir do cálculo das derivadas espaciais, tal como:

$$P(U) = -\frac{L_y}{L_x} \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \quad (5)$$

obtendo-se a seguinte EDOL:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = P(U) \quad (6)$$

Assim, pode-se aplicar uma discretização no tempo, seguindo o método de Jameson, Schimidt e Turkel (1981), descrito abaixo:

$$\begin{aligned} U_f &= U^n \\ \text{para } k &= s, (s-1), \dots, 1 \\ U_f &= U^n + \frac{1}{k} \Delta t P(U_f) \\ \text{fim - para} \\ U^{n+1} &= U_f \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $U^n$  é o vetor contendo os valores transitórios das equações de conservação no instante  $t = n$ , dados pela Eq. 1 (ver capítulo 3 de Cannuto *et al.*, 1988, para melhor entendimento do método).

A técnica numérica empregada neste estudo foi o Método Espectral da Colocação, que se caracteriza na expansão em séries discretas das derivadas espaciais de primeira e segunda ordem, utilizando-se os polinômios ortogonais de Chebyshev. Estes polinômios apresentam as vantagens de não exigir periodicidade nas condições limites e são fáceis de serem implementados computacionalmente. Uma vasta literatura pode ser encontrada, tratando-se tanto da técnica espectral da colocação, como sobre as propriedades dos polinômios de Chebyshev (Cannuto *et al.*, 1988).

A série de Chebyshev referente a expansão de uma função  $f(x)$  é uma série de cossenos, a qual pode ser denominada de  $\tilde{f}(\theta)$ . Se  $f(x)$  é infinitamente diferenciável em  $[-1,1]$ , então  $\tilde{f}(\theta)$  é também infinitamente diferenciável e periódica, assim como todas suas derivadas de ordem superior, no intervalo  $[0,2\pi]$ . Contudo, o interesse é pelas séries de Chebyshev discretas finitas. Para isso usou-se a formula explícita de Chebyshev-Gauss-Lobatto para pontos discretos de quadratura e funções pesos discretas. Estes pontos discretos geram uma malha bidimensional que assumem a forma dada na Fig. 2.

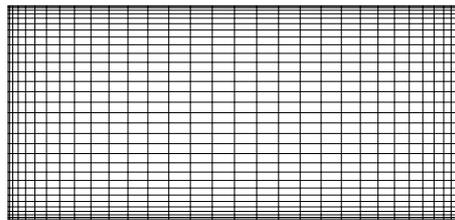


Figura 2 Malha poligonal com a distribuição de pontos utilizando a formulação de Gauss-Lobatto, com  $N=64$ .

Assim, aplicando-se a técnica da quadratura (Cannuto et al, 1988) a transformação discreta para o espaço de Chebyshev para uma dada distribuição de pontos de quadratura, fica

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\gamma_k} \sum_{j=0}^N f(x_j) T_k(x_j) w_j, \text{ onde } \gamma_k = \pi \quad (8,9)$$

e a inversa da Eq. 8 pode ser escrita como segue:

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k T_k(x_j) \quad (10)$$

A derivada de uma função  $f$  expandida em série de polinômios de Chebyshev pode formalmente ser escrita como:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k^{(1)} T_k(x) \quad (11)$$

onde  $\hat{f}_k^{(1)}$  são os coeficientes de expansão da primeira derivada da função  $f$  no espaço Chebyshev, os quais podem ser obtidos através de operações matemáticas com os coeficientes de expansão  $\hat{f}_k$ . Em outras palavras,  $\hat{f}_k^{(1)}$  é a diferenciação de  $\hat{f}_k$ . Isso pode ser calculado pelas seguintes expressões, iterativa e recursiva, respectivamente:

$$\hat{f}_k^{(1)} = \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ p+k \text{ ímpar}}}^{\infty} p \hat{f}_p, \text{ ou } \hat{f}_k^{(1)} = (\hat{f}_{k+2}^{(1)} + 2(k+1)\hat{f}_{k+1}) / c_k \quad (12,13)$$

A diferenciação de uma função pode ser obtida, usando-se tanto a Eq. 12 quanto a Eq. 13. Seguindo-se um destes procedimentos, uma eficiente maneira de obter rapidamente as derivadas é utilizando um código de Transformada Rápida de Chebyshev (TRC). Neste algoritmo, realiza-se uma TRC direta, onde se obtém os coeficientes discretos da expansão em série de Chebyshev,  $\hat{f}_k$ , como caracterizado pela Eq. 8. Posteriormente, aplica-se a Eq. 12 ou a Eq. 13, obtendo-se os coeficientes discretos da expansão em série de Chebyshev da derivada da função  $f$ . Em seguida, aplica-se uma TRC inversa, obtendo-se a derivada da função  $f$ , no espaço físico. O algoritmo usado para calcular a TRC é baseado no algoritmo da FFT. Neste caso, o número total de operações para obter-se tal resultado é da ordem de  $(5 \log_2 N + 8 + 2q)N$  (Cannuto *et al.*, 1988), onde  $q$  é a ordem da derivada. Tal algoritmo é apresentado nos parágrafos seguintes.

Uma outra maneira de calcular as derivadas, no Método da Colocação de Chebyshev é o método de multiplicação de matriz, baseado na técnica de interpolação de Lagrange (Cannuto et al., 1989).

Uma comparação da velocidade de processamento, utilizando-se os dois procedimentos para o cálculo das derivadas, (Transformada Rápida de Chebyshev, TRC, e Multiplicação de Matrizes, MxM) é apresentado na Tabela 1, isso para três tipos de processadores diferentes.

**Tabela 1:** Tempo de processamento utilizado no cálculo da derivada de uma senóide usando o método da colocação de Chebyshev, (Tempo em segundos).

$N$	Pentium 166Mhz		DEC3000		RISC6000	
	Matriz	FFT	Matriz	FFT	Matriz	FFT
8	$3,00 \times 10^{-5}$	$3,75 \times 10^{-5}$	$8,67 \times 10^{-6}$	$3,33 \times 10^{-5}$	$5,00 \times 10^{-6}$	$2,00 \times 10^{-5}$
16	$7,00 \times 10^{-5}$	$6,75 \times 10^{-5}$	$1,67 \times 10^{-5}$	$6,25 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-5}$	$3,50 \times 10^{-5}$
32	$1,73 \times 10^{-4}$	$1,38 \times 10^{-4}$	$6,67 \times 10^{-5}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$2,00 \times 10^{-5}$	$6,00 \times 10^{-5}$
64	$7,55 \times 10^{-4}$	$2,75 \times 10^{-4}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$2,25 \times 10^{-4}$	$3,20 \times 10^{-4}$	$1,30 \times 10^{-4}$
128	$3,00 \times 10^{-3}$	$6,18 \times 10^{-4}$	$1,10 \times 10^{-3}$	$5,00 \times 10^{-4}$	$1,42 \times 10^{-3}$	$2,70 \times 10^{-4}$
256	$1,26 \times 10^{-2}$	$1,38 \times 10^{-3}$	$1,06 \times 10^{-2}$	$1,07 \times 10^{-3}$	$7,80 \times 10^{-3}$	$6,10 \times 10^{-4}$
512	$5,24 \times 10^{-2}$	$4,33 \times 10^{-3}$	$4,38 \times 10^{-2}$	$3,62 \times 10^{-3}$	$3,73 \times 10^{-2}$	$1,65 \times 10^{-3}$
1024	$2,35 \times 10^{-1}$	$9,66 \times 10^{-3}$	$1,90 \times 10^{-1}$	$7,12 \times 10^{-3}$	$1,54 \times 10^{-1}$	$5,14 \times 10^{-3}$

A Fig. 3 mostra algumas comparações entre várias técnicas que permitem calcular derivadas a partir de um conjunto discreto de dados. Também, esta figura mostra um gráfico de erro obtido ao calcular-se a derivada de uma função senóide pelo número de pontos usados na malha. Faz-se uma comparação entre quatro métodos distintos, os quais são: método das diferenças finitas de primeira ordem (FD1O), método das diferenças finitas de quarta ordem (FD4O), método espectral usando um algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT) e método espectral usando multiplicação de matrizes (MxM). Observa-se nesta figura que para relativamente baixos números de pontos, os métodos espectrais apresentam um erro (erro  $\approx O(10^{-11})$ ) consideravelmente menor do que os métodos de diferenças finitas (FD1O erro  $\leq O(10^{-1})$  e FD4O erro  $\leq O(10^{-7})$ ).

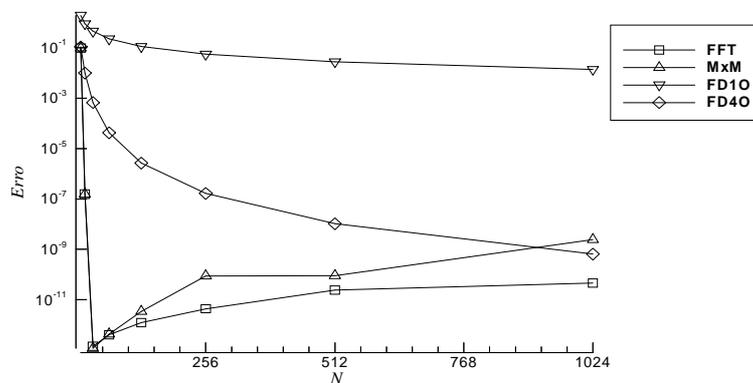


Figura. 3. Comparação entre os erros embutidos na derivada da função  $f(x) = \text{sen } x$ .

As funções ou derivadas de funções estimadas através de expansões em séries, como descrito acima, apresentam um comportamento oscilatório nos pontos vizinhos às discontinuidades. Este comportamento oscilatório é denominado fenômeno de Gibbs. Estas oscilações aumentam devido a dois fatores: truncamento da série e interpolação. Devido ao erro de interpolação, os valores das funções e de suas derivadas nos pontos extremos do domínio utilizado para o cálculo apresentam oscilações significativas. Estes fatos são evidenciados na Fig. 4. Observa-se quando se estima a derivada de uma função contínua, os erros relativos mantêm-se na mesma ordem de grandeza que os obtidos para a estimação da função, contudo, no cálculo de uma derivada de uma função descontínua, como uma função tangente hiperbólica, tende a uma função impulso no ponto de discontinuidade, os erros relativos na estimação destas derivadas são mais significativos. Estes fatos caracterizam o fenômeno de Gibbs estão evidenciados na Fig. 4a.

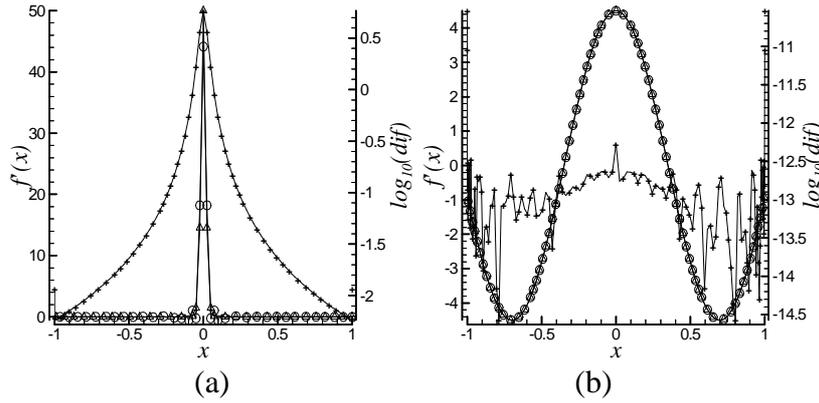


Figura 4 Comparação entre as derivadas analíticas e estimadas.(a) Função tangente hiperbólica (descontínua). (b) Função senóide (contínua); (os símbolos  $\Delta$  representa a curva da função analítica,  $\circ$  representa a curva aproximada da função e  $+$  representa o  $\log_{10}(dif)$  entre as duas curvas).

Para manter o controle das instabilidades na solução numérica do problema realiza-se em alguns momentos dos cálculos uma filtragem numérica, a fim de eliminar estas frequências espúrias presentes.

Devido ao motivo explicado acima existe uma tendência de uso de filtragem ou alisamento que atenuam os comprimentos de ondas de pequenas amplitudes, característicos dos ruídos, introduzidos nos cálculos devidos aos erros numéricos. Para tanto foram utilizadas funções de alisamento e filtragem,  $\sigma$ , (*Lanczo*, *Raised cosine*, *Sharpined raised cosine*, *Exponential cut-off*) (Fernandes, 1998).

Existem dois caminhos para amenizar as oscilações espúrias presentes nos cálculos. Um primeiro caminho, trata-se de obter um alisamento da função através de uma integração singular, como segue:

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x-y) f(y) dy \quad (14)$$

onde  $S_N f(x)$  representa a função alisada,  $K_N$  é uma matriz núcleo, dada por

$$K_N(\xi) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N/2} \sigma_k \cos k\xi \quad (15)$$

Um segundo caminho, trata-se em amenizar a presença do fenômeno de Gibbs através da execução de uma filtragem pura. Assim, considerando uma função  $f(x)$  qualquer, para se obter a filtragem da mesma, é suficiente aplicar uma das funções de filtragem sobre os coeficientes de expansão da função, como segue

$$F_N \hat{f}_k = \hat{f}_k \sigma_k \quad (16)$$

onde  $F_N \hat{f}_k$  representa a função alisada.

Executando-se a função dada pela Eq. 15 ocorre uma gradual redução das amplitudes dos comprimentos de ondas de pequenos valores, tanto os comprimentos de ondas referentes ao problema físico quanto àqueles originados pelos erros numéricos. Assim, para que haja uma redução sistemática dos erros numéricos, torna-se necessário ter um conhecimento prévio

da faixa de número de ondas característicos dos erros numéricos embutidos na função. A partir deste dado, pode-se adequar a banda de passagem do filtro para eliminar somente os ruídos.

## RESULTADOS E ANÁLISES

O domínio ideal para simular camadas de mistura deve conter um número inteiro de vórtices fundamentais (a periodicidade dimensional do comprimento de onda fundamental é  $\lambda_a=14.13\delta_0$ , como sugerido na literatura), satisfazendo a seguinte relação  $L_i^* = m_i \lambda_a$ , com  $i=x$  ou  $y$  (Comte et al. 1989). Este estabelecimento é pertinente porque se fixa, com antecedência, o comportamento da estrutura do escoamento. Fixando-se  $m_y = (1/2)m_x$ , para camada de mistura em desenvolvimento temporal, é imposta a periodicidade na direção  $x$ , sem bloquear a difusão lateral da camada de mistura antes desta atingir um longo período de crescimento. Para a camada de mistura em desenvolvimento espacial foi imposta uma condição de escoamento dos vórtices na saída do domínio. Executou-se a simulação do problema, na maioria dos casos, usando-se uma malha de média resolução (128x128), para uma camada de mistura completamente turbulenta.

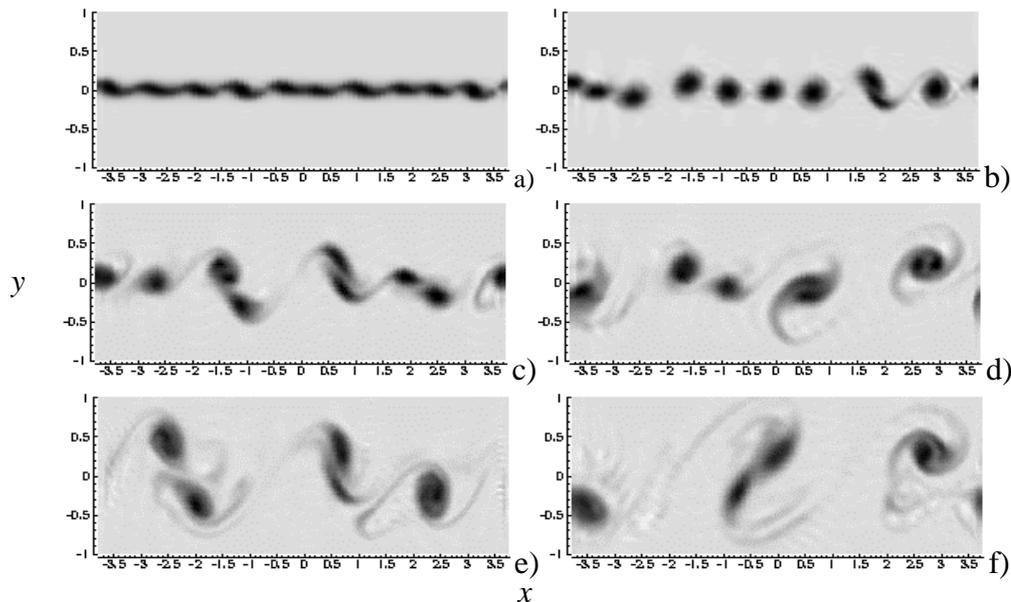


Figura 5. Evolução do campo de vorticidade em uma camada de mistura temporal ( $Re_\infty=3,94 \times 10^5$ ,  $M_\infty=0,29$ ,  $Pr_\infty=0,72$ ,  $\eta_v=0,5$  e  $\eta_T=0$ ). (a)  $t^*=0,075s$ ; (b)  $t^*=0,094s$ ; (c)  $t^*=0,113s$ ; (d)  $t^*=0,131s$ ; (e)  $t^*=0,151s$  e (f)  $t^*=0,169s$ .

A Fig. 5 apresenta a evolução do campo de vorticidade para uma camada de mistura temporal, simulada para um perfil hiperbólico inicial, com uma velocidade  $U_1=150m/s$  e  $U_2=50m/s$ , e sem estratificação; isto é, perfis de temperatura e densidade iniciais constantes. A mudança básica a ser analisada nestes cálculos é interferência da distribuição do campo de densidade no acoplamento de todos os campos do escoamento. Em estudos com escoamentos estratificados aparecem flutuações de pequenas escalas nos campos de velocidades (estudos não apresentados no presente trabalho). Este fato concorda com as conclusões apresentadas sobre os experimentos de Brown e Roshko, (1974). Observa-se nesta figura que o escoamento apresenta estruturas de um escoamento compressível, onde os vórtices coerentes de grandes escalas podem ser observados de forma bem definida.

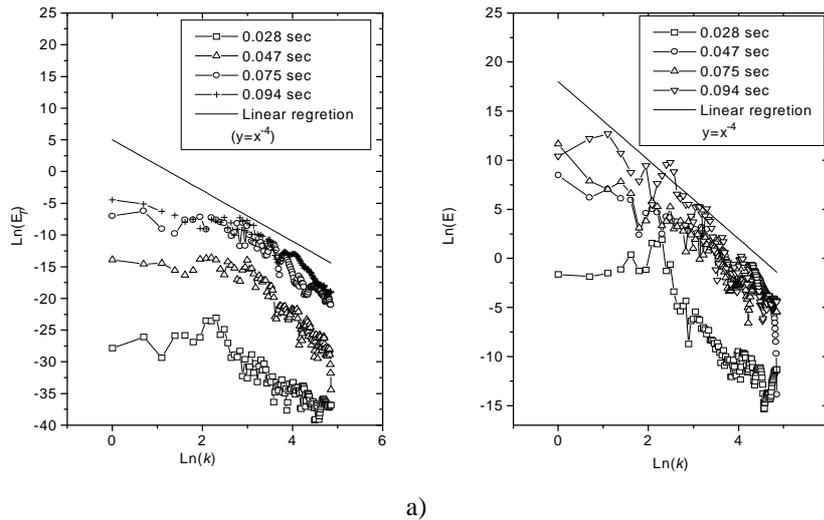


Figura 6. Espectros da camada de mistura em desenvolvimento temporal ( $Re_{\infty}=3.5 \times 10^5$ ,  $M=0,27$ ,  $Pr = 0,72$ ,  $\eta_v = \infty$  e  $\eta_T = 0,285$ ). (a) Espectro de energia térmica para várias tomadas de tempo e (b) Espectro de energia cinética para várias tomadas de tempo.

Na Fig. 5 os processos de coalescência, rotação e emparelhamento aparecem de forma evidente, podendo ser observados com muita clareza. Porém, nota-se que estes processos dinâmicos para as estruturas coerentes de grandes escalas, acontecem de maneira semelhante aos casos estratificados

Os espectros de energia cinética e de energia térmica adimensionais estão mostrados nas Figs. 6.a e 6.b, respectivamente, como uma função do número de onda adimensional, para várias tomadas de tempo, entre os quais encontra-se inclusive o tempo referente à camada de mistura completamente desenvolvida. Os cálculos destes espectros de energia, usando as propriedades nas formas adimensionais não afetam a característica do espectro. Os resultados referente a estas figuras foram obtidos, a partir dos cálculos da simulação de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal, com número de Reynolds  $3,5 \times 10^5$ , com uma taxa de velocidade de  $\eta_v = \infty$  e com uma taxa de temperatura de  $\eta_T = 0,285$ , estes resultados estão de acordo com as conclusões de Winant e Browand (1974).

## CONCLUSÃO

A metodologia espectral, apesar de ser extremamente precisa, tem sido pouco empregada para a solução de problemas modelados por equações diferenciais parciais complexas, principalmente aqueles relacionados com a dinâmica dos fluidos. Um fator primário que tem contribuído para este fato é a complexidade de implementação computacional envolvida. Outros fatores a serem evidenciados, os quais, com certeza, limitam a aplicação da técnica espectral, são a inviabilidade do uso desta técnica, quando considerada sobre um único domínio, em soluções implícitas, devido ela gerar matrizes cheias, de grandes dimensões, tornando a velocidade de cálculo bastante baixa. Com relação ao uso da técnica em soluções explícitas existem inconvenientes, tais como: a técnica é bastante instável, se utilizada em um procedimento de cálculo explícito, por se tratar de uma técnica de alta precisão, livre de dissipação numérica, gerando flutuações numéricas indesejáveis, que são amplificadas ao longo do tempo, causando divergência na solução.

Neste estudo utilizou-se o método espectral da colocação de Chebyshev aliado ao esquema de integração temporal de Runge-Kutta, utilizando uma formulação discreta completamente explícita. Para a discretização das derivadas parciais envolvidas no equacionamento foram desenvolvidos e testados dois métodos de cálculo para as mesmas,

sendo um deles a técnica de multiplicação de matrizes e um outro utilizando a transformada rápida de Chebyshev (TRC).

Contudo este método apresenta instabilidades de cálculo para a formulação explícita nos cálculos das derivadas de funções descontínuas denominadas fenômeno de Gibbs, isso próximo das descontinuidades. Para minimizar este efeito e estabilizar a solução, foram aplicados procedimentos de filtragem e alisamento nos cálculos computacionais.

## REFERÊNCIAS

- Anderson, J. D. R., *Computational fluid dynamics*, , McGraw-Hill, New-York 1995
- Bernal, L. P., The coherent structure of turbulent mixing-layers: I. Similarity of the primary vortex structure, II. Secondary streamwise vortex structure, *CAITECH Report*, 1981.
- Breidenthal, R. E., A chemically reacting turbulent shear layer, *Ph. D. Thesis*, California Institute of Technology, 1978.
- Brown, G. L. & Roshko, A., On density effects and large structures in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 64, pp. 775-816, 1974.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A., *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- Comte, P., Lesieur, M., Laroche, H. and Normand, X., Numerical simulations of turbulent plane shear layers, *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg, pp. 360-380, 1989.
- Dimotakis, P. And Brown, G. L., The mixing layer at high Reynolds number: Large-structure dynamics and entrainment, *J. Fluid Mech.*, 78, pp. 535-560, 1976.
- Jameson, A., Schmidt, H. and Turkel, E., Numerical solutions of the Euler equation by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes, *AIAA Pap. 81-1259*.
- Jimenez, J., On the visual growth of a turbulent mixing layer, *J. Fluid Mech.*, 96, pp. 447-460, 1980.
- Konrad, J. H., An experimental investigation of mixing in two-dimensional turbulent shear flow with applications to diffusion-limited chemical reactions, *Project SQUID Report CIT-8-PU*, 1976.
- Orlanski, I., A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows, *J. Comp. Phys.*, 21, pp. 251-269, 1976.
- Roshko, A., *The plane mixing layer flow visualization results and three-dimensional effects*, Lectures Notes in Physics Springer Pub. Co., 1980.
- White, F. M., *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill, New-York, 1974.
- Winant, C. D. & Browand, F. K., Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, 63, pp. 237-255, 1974.

**Abstract.** *The objective of the present work was the development of a computational code, using the Collocation Spectral Technique to simulate the compressible and turbulent mixing layers, in temporal and spatial developments, described by the complete conservative governing equations. An explicit formulation for the Chebyshev Collocation Spectral Technique was implemented using the Runge-Kutta scheme for the time-stepping integration. The partial derivatives in the governing equations were evaluated using Fast Chebyshev Transform (FCT) that allowed to reduce significantly the processing time. The computational code was developed to simulate compressible flows under high and low Reynolds numbers, either with or without stratified effect. The results revealed several aspects of the flow structures, agreeing with previous conclusions about the mixing layers. Particularly, it was illustrated the details of density field behavior in temporal and spatial mixing layers, enhanced the density rate effect in the turbulent mixing layers..*

**Keyword:** *Mixing Layer, Chebyshev, Spectral Collocation, Compressible flow e Turbulence.*