

MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM SISTEMA PNEUMÁTICO DE POSICIONAMENTO

Kevin Mauricio Menon Ribeiro e Felipe Barreto Campelo Cruz

UTFPR, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curso de Engenharia Mecânica

Campus Ponta Grossa - Bairro Barauna - CEP 84016-210 – Ponta Grossa – Paraná

E-mail para correspondência: kevin_pg108@hotmail.com

1. Introdução

Os sistemas que possibilitam posicionar uma carga mecânica em uma dada localização, definida por um conjunto de coordenadas (x, y, z) , são chamados de sistemas de posicionamento. Esta localização pode ser fixa ou variável no tempo, ou seja, $(x(t), y(t), z(t))$, e nestes casos os sistemas de posicionamento são, algumas vezes, chamados de seguidores.

Os sistemas de posicionamento são utilizados em diversas aplicações dentre as quais pode-se citar laminadores, turbinas hidráulicas, máquinas agrícolas, lemes de aeronaves, antenas, telescópios, direcionadores de foguetes, máquinas de precisão e robôs manipuladores.

Descreve-se neste artigo os principais aspectos referentes a sistemas pneumáticos de posicionamento, procurando situá-lo no contexto geral de desenvolvimento de uma linha de pesquisa já existente, dando continuidade a trabalhos iniciados por outros pesquisadores tais como Cruz (2003), Dill (2009), Fracaro (2011), Perondi (2002), Santos (1996), Silva et al. (2010) e Vieira (1998). Trata-se de um artigo de revisão e diz respeito a uma parte integrante do trabalho de conclusão de curso (TCC) do aluno Kevin Mauricio Menon Ribeiro (1º autor), onde se refaz a modelagem matemática de um sistema pneumático de posicionamento (Figura 1 e Figura 2) com base em pesquisas desenvolvidas pelo 2º autor da presente obra (Cruz, 2003).



Figura 1 - Sistema pneumático de posicionamento (Cruz, 2003).

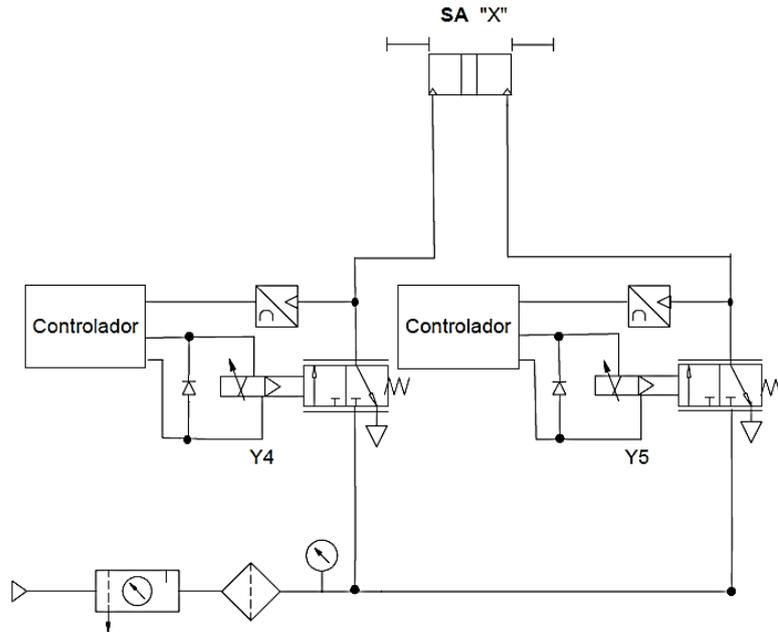


Figura 2 – Diagrama do circuito pneumático do sistema pneumático de posicionamento (Cruz, 2003).

2. Objetivos

Objetiva-se com este estudo, um entendimento do 1º autor quanto ao processo de modelagem matemática que lhe permita modelar um sistema pneumático, similar ao apresentado no decorrer deste artigo, presente no laboratório de sistemas hidráulicos e pneumáticos da UTFPR, campus Ponta Grossa.

3. Metodologia

Para obter o modelo matemático representativo do sistema pneumático de posicionamento, faz-se uma descrição literal de suas equações, as quais são baseadas nos conceitos de mecânica dos fluidos e nas leis de conservação de massa e energia. O processo de modelagem se dá em etapas, modelando-se primeiro as válvulas e posteriormente o cilindro.

4. Modelagem Matemática

Conforme mencionado, a análise teórica apresentada a seguir é fundamentada nos conceitos de mecânica dos fluidos e nas leis de conservação de massa e energia (Andersen, 1967; Fox e MacDonald, 1995; Streeter, 1981). Vale salientar que algumas simplificações são sugeridas ao longo do processo de modelagem, mostrando-se adequadas para uma correta caracterização deste tipo de sistema. Estas são: (1) gás ideal; (2) processo de compressão adiabático e reversível ocorrendo a uma velocidade bastante alta e uniforme, o que caracteriza um processo isentrópico e (3) escoamento unidirecional do fluido de trabalho.

4.1. Modelo matemático representativo das válvulas reguladoras de pressão

Para modelar o comportamento dinâmico das válvulas reguladoras de pressão faz-se referência a três equações: equação da continuidade para um escoamento compressível, Eq. (1); equação da vazão mássica para um escoamento compressível, Eq. (5), e equação do movimento referente ao deslocamento do carretel da válvula, Eq. (6). Estas são descritas a seguir:

$$\int_{SC} \rho^v \cdot v^v \cdot dA^v + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho^v \cdot dV^v = 0 \quad (1)$$

onde, após feitas as considerações de um processo isentrópico, dada pela Eq. (2), e de um gás ideal, dada pela Eq. (3):

$$C_p^v \cdot dT^v = \frac{V^v}{m_f^v} \cdot dp^v \quad (2)$$

$$C_p^v = \frac{\gamma^v \cdot R}{\gamma^v - 1} \quad (3)$$

resulta na Eq. (4) que aparece definida no domínio de Laplace:

$$p^v = \frac{1}{s} \cdot (q_{m1}^v - q_{m2}^v) \cdot \frac{R \cdot T^v \cdot \gamma^v}{V^v} \quad (4)$$

$$q_{m1}^v = \frac{A_o \cdot p_{sup}}{\sqrt{T_{sup}}} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \gamma^v}{(\gamma^v - 1) \cdot R} \cdot \left[\left(\frac{p^v}{p_{sup}} \right)^{2/\gamma^v} - \left(\frac{p^v}{p_{sup}} \right)^{(\gamma^v + 1)/\gamma^v} \right] \right\}^{1/2} \quad (5)$$

e

$$-F_e + F_s - F_B - F_k = m_c \frac{d^2 x_c}{dt^2} \quad (6)$$

onde, após feitas as considerações dadas pela Eqs. (7) a (10):

$$F_e = A_e \cdot (p^v - p_{atm}) \quad (7)$$

$$F_s = K_s \cdot U \quad (8)$$

$$F_B = B \cdot \frac{dx_c}{dt} \quad (9)$$

$$F_k = k_m \cdot x_c \quad (10)$$

resulta na Eq. (11) que também aparece definida no domínio de Laplace:

$$x_c = \frac{K_s \cdot U - A_e \cdot (p^v - p_{atm})}{B \cdot s + k_m} \quad (11)$$

Os termos que aparecem nas Eqs. (1) a (11) representam: a superfície de controle (A^v) e o volume de controle (V^v) da câmara considerada da válvula reguladora de pressão; a massa específica do fluido (ρ^v) em " V^v "; a velocidade do fluido (v^v) em " A^v "; o calor específico à pressão constante (C_p^v), a temperatura absoluta (T^v), a massa do fluido (m_f^v) e a pressão absoluta regulada (p^v), todos medidos em " V^v "; a pressão atmosférica (p_{atm}); a constante universal dos gases (R); a razão dos calores específicos (γ^v) medidos em " V^v "; as vazões mássicas a montante (q_{m1}^v) e a jusante (q_{m2}^v) de " V^v "; a pressão (p_{sup}) e a temperatura (T_{sup}) de suprimento; a área da seção transversal do orifício de controle (A_o); a força atuando sobre o diafragma, resultante da pressão regulada (F_e); a área da seção transversal efetiva do diafragma (A_e); a força de amortecimento viscoso (F_B); o coeficiente de amortecimento viscoso (B); a força exercida pela mola de retorno (F_k); o coeficiente de rigidez elástica da mola de retorno (k_m); a força exercida pelo solenoide (F_s); o ganho do solenoide (K_s); a massa do carretel (m_c); o deslocamento do carretel (x_c) e o sinal de controle dado em tensão (U).

Uma vez estabelecidas as equações que descrevem o comportamento dinâmico da válvula (Eqs. (4), (5) e (11)), estas são agrupadas de forma a fornecer um modelo matemático representativo da mesma dado por:

$$q_{m2}^v = \varepsilon \cdot K_o \cdot \frac{(K_s \cdot U - A_e \cdot (p^v - p_{am}))}{(B \cdot s + k_m)} \cdot \sqrt{2 \cdot \rho^v \cdot (p_{sup} - p^v)} - \frac{V^v}{R \cdot T^v} \cdot s \cdot p^v \quad (12)$$

onde

$$\varepsilon = \left[\frac{1 - \frac{3}{2 \cdot \gamma^v} \cdot \frac{(p_{sup} - p^v)}{p_{sup}} - \frac{(3 \cdot \gamma^v - 5)}{2 \cdot (\gamma^v)^2} \cdot \left(\frac{(p_{sup} - p^v)}{p_{sup}} \right)^2}{1 - \frac{1}{\gamma^v} \cdot \frac{(p_{sup} - p^v)}{p_{sup}} + \frac{(1 - \gamma^v)}{2 \cdot (\gamma^v)^2} \cdot \left(\frac{(p_{sup} - p^v)}{p_{sup}} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (13)$$

e K_o representa a constante de proporcionalidade entre A_o e x_c , ou seja:

$$K_o = \frac{A_o}{x_c} \quad (14)$$

Vale destacar que para uma completa descrição da Eq. (12), fez-se uso ainda da Eq. (16), definida com base em um processo isentrópico, dado pela expressão geral segundo a Eq. (15):

$$pV^\gamma = cte \quad (15)$$

$$\frac{\rho^v}{\rho_{sup}} = \left(\frac{p^v}{p_{sup}} \right)^{1/\gamma^v} \quad (16)$$

e da Eq. (17), que descreve a lei dos gases ideais:

$$p^v = \rho^v \cdot R \cdot T^v \quad (17)$$

O modelo matemático descrito pela Eq. (12) é representativo do comportamento dinâmico de ambas as válvulas responsáveis pelo acionamento do cilindro, cuja resposta dinâmica é dada pela diferença de pressão gerada por estas válvulas.

A Figura 3 fornece, respectivamente, uma foto e um desenho esquemático da servoválvula pneumática reguladora de pressão presente no sistema pneumático de posicionamento analisado:

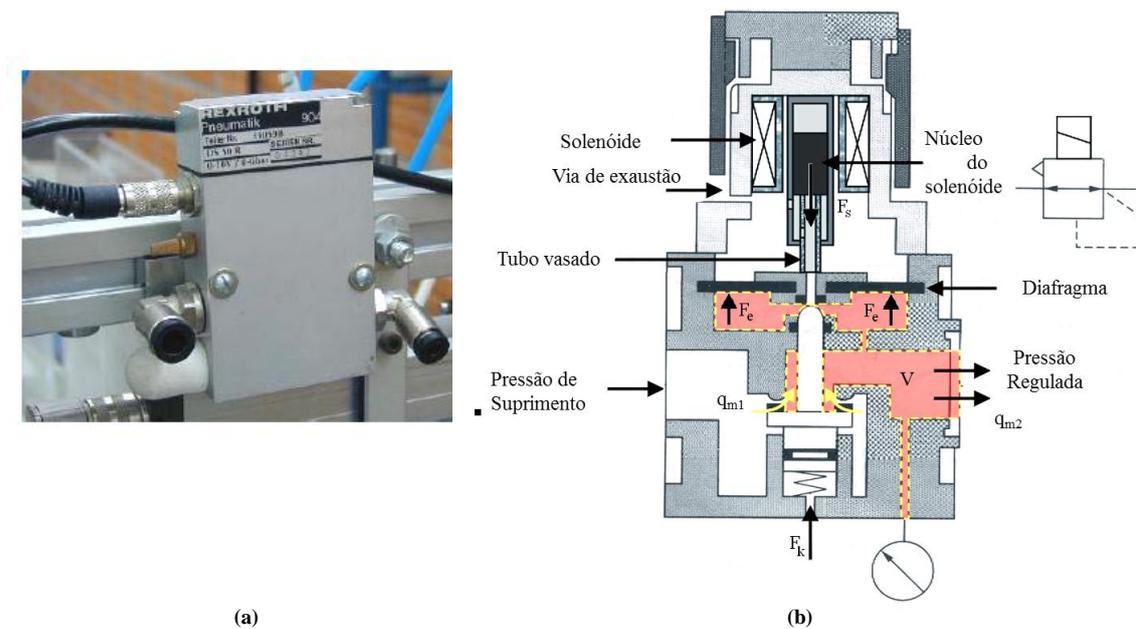


Figura 3 – (a) Servoválvula elétrica de pressão DS 50 R; (b) Desenho esquemático da servoválvula pneumática reguladora de pressão (Cruz, 2003).

4.2. Modelo matemático representativo do cilindro sem haste

Para modelar o comportamento dinâmico do cilindro sem haste faz-se referência a duas equações: equação da continuidade para um escoamento compressível, Eq. (18), e equação do movimento referente à dinâmica do êmbolo do cilindro, Eq. (23). Estas são descritas a seguir:

$$\int_{SC} \rho^c \cdot v^c \cdot dA^c + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho^c \cdot dV^c = 0 \quad (18)$$

onde, após feitas as considerações de um processo isentrópico, dada pela Eq. (19), e de um gás ideal, dada pela Eq. (20):

$$C_p^c \cdot dT^c = \frac{V^c}{m_f^c} \cdot dp^c \quad (19)$$

$$C_p^c = \frac{\gamma^c \cdot R}{\gamma^c - 1} \quad (20)$$

e considerando ainda que a vazão mássica (q_{m2}^c), tomada a jusante do volume de controle variável sendo analisado (V^c), é inexistente, resulta como expressão final para a equação da continuidade de um escoamento compressível a Eq. (21) ou a Eq. (22), dependendo da câmara considerada do cilindro:

$$p^{c1} = \frac{1}{s} \cdot \left(-\frac{A^e \cdot \gamma^{c1} \cdot \dot{X}^e}{A^e \cdot X^e + V_{o1}} \cdot p^{c1} + \frac{R \cdot \gamma^{c1} \cdot T^{c1}}{A^e \cdot X^e + V_{o1}} \cdot q_{m1}^{c1} \right) \quad (21)$$

ou

$$p^{c2} = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{A^e \cdot \gamma^{c2} \cdot \dot{X}^e}{A^e \cdot (L - X^e) + V_{o2}} \cdot p^{c2} + \frac{R \cdot \gamma^{c2} \cdot T^{c2}}{A^e \cdot (L - X^e) + V_{o2}} \cdot q_{m1}^{c2} \right) \quad (22)$$

As Eqs. (21) e (22) aparecem definidas no domínio de Laplace.

Quanto à equação que descreve o movimento referente à dinâmica do êmbolo do cilindro sem haste, está é dada por:

$$M^e \cdot \ddot{X}^e = (p^{c1} - p^{c2}) \cdot A^e - F_A \quad (23)$$

Os termos que aparecem nas Eqs. (18) a (23) representam: a superfície de controle variável (A^c) e o volume de controle variável (V^c) da câmara considerada do cilindro sem haste; a massa específica do fluido (ρ^c) em “ V^c ”; a velocidade do fluido (v^c) em “ A^c ”; o calor específico à pressão constante (C_p^c), a temperatura absoluta (T^c) e a massa do fluido (m_f^c), todos medidos em “ V^c ”; a razão dos calores específicos (γ^c) medidos em “ V^c ”; as vazões mássicas a montante (q_{m1}^c) e a jusante (q_{m2}^c) de “ V^c ”; a área útil (A^e) e a posição (X^e) do êmbolo do cilindro sem haste; o volume morto (V_o) da câmara considerada do cilindro sem haste; a massa do embolo (M^e); a força de atrito (F_A) e a pressão absoluta do ar medida no volume de controle variável da câmara considerada do cilindro sem haste (p^c). Vale mencionar que a modelagem de F_A é uma modelagem complexa e pode se dá de diferentes formas, fugindo do escopo do presente artigo. Análises de seu comportamento serão realizadas no decorrer do trabalho de conclusão de curso do 1º autor. Quanto à p^c , vale destacar que esta assume valores diferentes de p^v em virtude de uma perda de carga que ocorre nas tubulações (mangueiras) que ligam as válvulas a respectiva câmara do cilindro sem haste. Esta perda de carga é dada por:

$$\Delta p = p^v - p^c = \frac{q_{m2}^v}{C} \quad (24)$$

onde C é uma constante referente à uma perda de carga nas tubulações.

Por fim, destaca-se a presença dos índices 1 e 2 acompanhando alguns dos parâmetros recém definidos. Estes dizem respeito às duas câmaras do cilindro sem haste.

5. Conclusões

Dando sequência a este estudo, será realizada uma nova modelagem, análoga a esta, onde as válvulas reguladoras de pressão serão substituídas por válvulas reguladoras de vazão, o que está de acordo com o sistema pneumático de posicionamento presente no laboratório de sistemas hidráulicos e pneumáticos da UTFPR, campus Ponta Grossa.

Uma vez obtido esse novo modelo, pretende-se implementá-lo via simulação para efeito de sua comparação com o comportamento dinâmico real do sistema pneumático de posicionamento em questão. Constatada a equivalência dos resultados, o modelo é validado.

Uma parte considerável dos parâmetros presentes no modelo matemático obtido pode ser encontrada em catálogos ou fichas técnicas próprias do dispositivo analisado. Os demais podem ser obtidos de forma experimental. Estes experimentos serão realizados futuramente após um estudo mais detalhado, por parte dos autores, do sistema em análise e de assuntos pertinentes aos ensaios pretendidos, dentre eles, vibrações.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem à UTFPR pelo incentivo e apoio à pesquisa.

Referências Bibliográficas

- ANDERSEN, B. W. **The analysis and design of pneumatic system**. New York, USA: John Wiley & Sons, 1967.
- CRUZ, F. B. C. **Modelagem e controle não-lineares de um posicionador servopneumático industrial**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM), Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis.
- DILL, R. B. **Confirmação experimental do comportamento da vazão volumétrica do ar como fluido de controle em servoposicionador pneumático por medição direta**. 2009. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica)- Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: Guanabara Koogan S.A., 1995.
- FRACARO, A. R. **Modelagem matemática do acionamento hidráulico de uma bancada de vibração**. 2011. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática)- Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.
- PERONDI, E. A. **Controle não-linear em cascata de um servoposicionador pneumático com compensação do atrito**. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica)-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM), Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis.
- SANTOS, E. A. P. **Análise teórico experimental de um posicionador pneumático**. 1996. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM), Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis.
- SILVA, A. F.; MARIANO, V.; FILHO, M. H. O. P. Modelagem e simulação do comportamento dinâmico de um posicionador de máquina-ferramenta. In: Congresso de Pesquisa e Inovação da Rede Norte Nordeste de Educação Tecnológica (CONNEPI), V, 2010, Maceió. **Anais...** [S.l : s.n], novembro 2010.
- STREETER, V. L. **Mecânica dos fluidos**. São Paulo: McGraw-Hill, 1981.
- VIEIRA, A. D. **Análise teórico experimental de servoposicionadores lineares pneumáticos**. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM), Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis.