

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DINÂMICA DE ROTORES FLEXÍVEIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Luiz Fellipe Nogueirão e Flávio Yukio Watanabe

UFSCar, Universidade Federal de São Carlos, Curso de Engenharia Mecânica
Campus São Carlos - Bairro Monjolinho - CEP 13565-905 - São Carlos - São Paulo
E-mail para correspondência: luiz_nogueirao@yahoo.com

Introdução

O processo de evolução de máquinas rotativas de alto desempenho, como turbinas de avião, bombas centrífugas e turbo-geradores, evidenciou a necessidade de estudos mais aprofundados sobre o comportamento dinâmico de rotores, uma vez que estas são submetidas a rotações e forças de inércia cada vez mais elevadas. Um rotor é usualmente caracterizado como um elemento cilíndrico capaz de rotacionar em torno de um eixo fixo graças aos seus mancais, elementos estacionários, que o restringem para tal movimento. Para estudos dinâmicos, onde se deseja obter as características vibratórias do sistema, consideram-se como sendo flexíveis.

Dentre os métodos numéricos utilizados na análise dinâmica, destaca-se para rotores o *Método dos Elementos Finitos* (MEF). O MEF divide um sistema em vários fragmentos ou elementos denominados elementos finitos. Cada elemento terá uma série de pontos, chamados nós, com suas respectivas variáveis nodais que servem para a formulação das equações que descrevem o seu comportamento físico. Elementos adjacentes compartilhariam então nós comuns e assim também as mesmas variáveis nodais, tal comportamento é de fácil visualização quando se já está trabalhando com as expressões em matrizes.

Para a análise dinâmica de rotores não se recomenda o uso de programas comerciais de MEF devido ao fato de estes não levarem em conta o efeito giroscópico, embora este possa ser imposto na formulação convencional. Por isso, indica-se como melhor solução a elaboração de um programa específico, que utilizando os elementos finitos desejados, resulte em uma análise dinâmica de máquinas rotativas supercríticas com a capacidade de realizar prognósticos quantitativos com alto grau de precisão.

Destacam-se entre os primeiros trabalhos desenvolvidos na área de modelagem dinâmica de rotores flexíveis pelo MEF os realizados por Archer (1963), Ruhl e Booker (1972), Rouch e Kao (1979), Nelson e McVaugh (1976) e Nelson (1980). Os modelos de sistemas rotor-mancais apresentados consideram que os rotores são constituídos por discos rígidos e elementos finitos de eixo com parâmetros de massa e rigidez distribuídos, e os mancais são considerados discretos e lineares com parâmetros concentrados de rigidez e amortecimento viscoso. A Fig. 1 apresenta um exemplo de rotor modelado pelo MEF que trata o rotor de um compressor radial industrial de gás com 56 elementos de eixos, 57 nós, 14 discos e dois mancais (Santos e Watanabe, 2006).

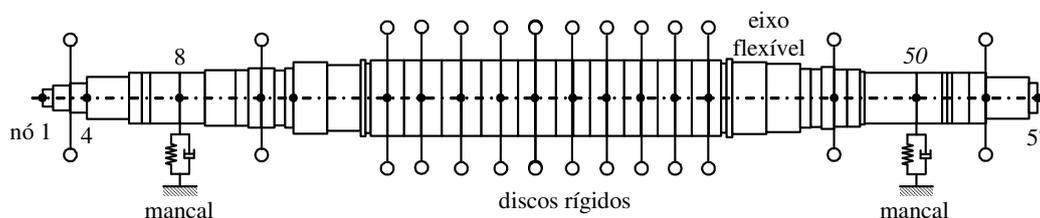


Figura 1 – Modelo de elementos finitos do rotor de um compressor radial de gás (Santos e Watanabe, 2006)

As equações de movimento dos elementos de disco rígido e de eixos flexíveis são desenvolvidas através da formulação de Lagrange da mecânica clássica que relaciona a conservação de energia com a conservação da quantidade de movimento.

No presente trabalho, o estudo do comportamento dinâmico de rotores foi realizado por meio da modelagem matemática de elementos finitos com parâmetros concentrados ou distribuídos de massa, rigidez e amortecimento. Posteriormente, foi implementado um aplicativo no programa MATLAB que estrutura as matrizes globais de um rotor real discretizado em elementos finitos de eixo flexível, discos rígidos e mancais para a análise do comportamento dinâmico do rotor no domínio da frequência.

Modelagem Matemática

A modelagem do comportamento dinâmico de rotores flexíveis foi desenvolvida com base no trabalho apresentado por Nelson e McVaugh (1976), considerando um sistema constituído por elementos de discos rígidos, elementos de eixos flexíveis com parâmetros distribuídos e mancais com parâmetros concentrados (Fig. 2). A análise de elementos finitos é feita a partir das energias cinéticas de rotação e translação, e da energia potencial de deformação dos elementos elásticos, incluindo também os efeitos de momentos giroscópicos. Este processo de modelagem é baseado na aplicação da equação de Lagrange (Thomson e Dahleh, 1998).

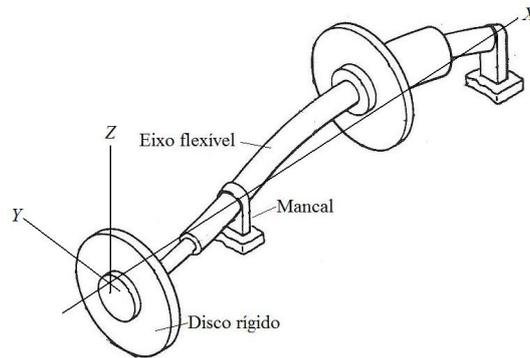


Figura 2 - Elementos de um rotor flexível (Nelson e McVaugh, 1976)

O modelo estudado é considerado conservativo e a equação de Lagrange, Eq. (1), é aplicada aos elementos finitos de disco e eixo, considerando-se a energia cinética (T) e a energia potencial elástica (U), descritas em termos das coordenadas generalizadas de posição q_i e de velocidade \dot{q}_i do sistema.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_i} + \frac{\delta U}{\delta q_i} = F_{q_i} \quad (1)$$

O movimento do rotor pode ser descrito no sistema de coordenadas inerciais $I(X, Y, Z)$. O eixo X coincide com a linha de centro do rotor indeformado e os eixos Y e Z são eixos transversais (Fig. 2). A energia do sistema é descrita por um sistema de referência preso à seção transversal do rotor no seu estado deformado. A posição da seção transversal genérica é definida em relação ao sistema inercial $V(s, t)$ e $W(s, t)$, nas direções Y e Z respectivamente, e por duas pequenas rotações $\theta_y(s, t)$ e $\theta_z(s, t)$, em torno de Y e Z respectivamente. A variável s é a coordenada da seção transversal e t é o tempo.

Considerando inicialmente a modelagem do elemento de disco rígido, a Eq. 2 estabelece sua energia cinética de translação (I) e rotação (II), considerando o seu centro de massa coincidindo com o centro da linha elástica.

$$T_D = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_D & 0 \\ 0 & m_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix}}_I + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_P & 0 & 0 \\ 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{Bmatrix}}_{II} \quad (2)$$

onde, ω_a , ω_b e ω_c , são as componentes da velocidade angular do disco em relação aos eixos X , Y e Z , respectivamente.

Aplicando-se o método de Lagrange, obtém-se a equação matricial de movimento do elemento de disco rígido.

$$(M_T^d + M_R^d) \ddot{q}^d - \Omega G^d \dot{q}^d = Q^d \quad (3)$$

onde:

- M_T^d - matriz de massa do disco rígido devido a translação
- M_R^d - matriz de massa do disco rígido devido a rotação
- G^d - matriz giroscópica do disco rígido
- \ddot{q}^d - vetor de aceleração do disco rígido
- \dot{q}^d - vetor de velocidade do disco rígido
- Q^d - vetor de forças e momentos atuantes sobre o disco

De maneira análoga à análise do elemento de disco rígido, um elemento de eixo genérico é descrito no estudo pelas coordenadas V , W , θ_y e θ_z . A diferença é que agora o sistema não é função somente do tempo, como ocorria com os discos rígidos, e sim também da posição s , entre 0 e l , e que determina a seção analisada ao longo do elemento de eixo X . Para um elemento diferencial de disco localizado a uma posição s , definem-se as expressões da energia potencial elástica de flexão, Eq. (4), energia potencial elástica de deformação axial, Eq. (5), e cinética de translação e rotação, Eq. (6).

$$dP_B^e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} V'' \\ W'' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V'' \\ W'' \end{Bmatrix} ds \quad (4)$$

$$dP_A^e = \frac{-1}{2} \begin{Bmatrix} V' \\ W' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V' \\ W' \end{Bmatrix} ds \quad (5)$$

$$dT_e = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} ds + \frac{1}{2} \dot{\theta}_x^2 I_p ds + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{Bmatrix} ds - \dot{\theta}_x \dot{\theta}_z \theta_y I_p ds \quad (6)$$

Para descrever o deslocamento dos pontos no interior do elemento são introduzidas funções de forma locais nos elementos de eixo. Podendo-se assim no final do processo, integrar ao longo do comprimento l do eixo as equações de energia diferenciais obtidas, resultando-se na expressão de energia total do elemento de eixo:

$$P_B^e + P_A^e + T^e = \frac{1}{2} q^{eT} (K_B^e - K_A^e) q^e + \frac{1}{2} \dot{q}^{eT} (M_T^e + M_R^e) \dot{q}^e + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_x \dot{q}^{eT} N^e q^e \quad (7)$$

Aplicando-se o método de Lagrange, obtém-se a equação de movimento do elemento finito de eixo, considerando uma velocidade angular de *spin* constante Ω .

$$(M_T^e + M_R^e) \cdot \ddot{q}^e - \Omega \cdot G^e \cdot \dot{q}^e + (K_B^e + K_A^e) \cdot q^e = Q^e \quad (8)$$

onde:

- M_T^e - Matriz de massa do elemento finito do rotor (translação)
- M_R^e - Matriz de massa do elemento finito do rotor (rotação)
- G^e - Matriz giroscópica do elemento finito do rotor
- K_B^e - Matriz de rigidez do elemento finito do rotor (flexão)
- K_A^e - Matriz de rigidez do elemento finito do rotor (carga axial)

Assume-se neste estudo que os mancais são considerados passivos e lineares com características de rigidez e amortecimento viscoso. Descrevem-se estes elementos pela seguinte equação

$$-C^b \cdot \dot{q}^b - K^b \cdot q^b = Q^b \quad (9)$$

Simulação Computacional

A equação de movimento de um rotor completo é formada a partir das equações de movimento de seus elementos de discos rígidos e de eixos flexíveis, mais os mancais. Para montar-se esta equação global deve-se considerar as coordenadas de translação e de rotação de cada nó existente no centro dos discos e nas extremidades dos eixos. Superpondo-se as matrizes de massa, rigidez e giroscópica de cada elemento em suas coordenadas nodais correspondentes, monta-se as matrizes globais de massa, rigidez e giroscópica. Por

fim, acrescentam-se os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais nas matrizes de rigidez global e giroscópica, respectivamente.

Todo este processo foi realizado com o auxílio de um aplicativo computacional implementado no programa MATLAB que estrutura as matrizes globais de um rotor real discretizado previamente. A partir destas matrizes globais de massa, rigidez e giroscópica, foi possível determinar-se as frequências naturais e modos de vibração do rotor. Em sistemas rotativos, o efeito giroscópico altera as frequências naturais do sistema e esta variação usualmente é apresentada de forma gráfica por meio do diagrama de Campbell que apresenta as frequências naturais em função da rotação. Um fluxograma do aplicativo é apresentado na Fig. 3.

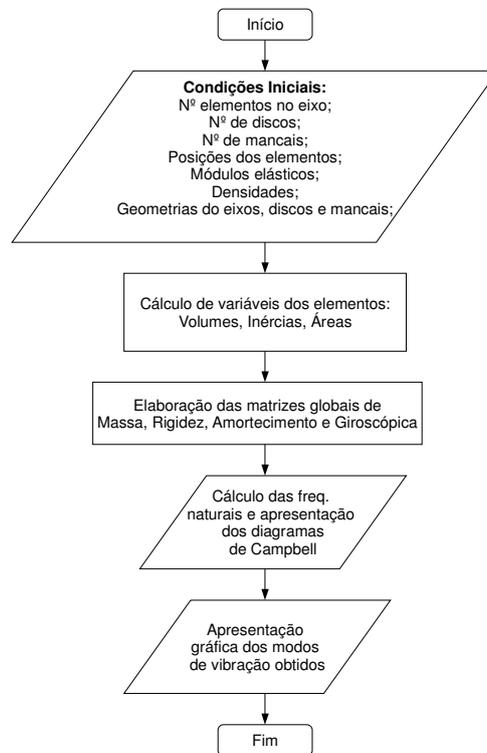


Figura 3 – Fluxograma do aplicativo elaborado no MATLAB

Resultados e Discussão

A validação do modelo estudado e do aplicativo computacional foi realizada por meio da análise de um estudo de caso apresentado por Genta (2008) que utilizou um método de modelagem por elementos finitos similar ao estudado. O rotor analisado é o de uma pequena turbina a gás apresentada na Fig. 4a, e discretizada na Fig. 4b em elementos finitos de eixo e discos conforme.

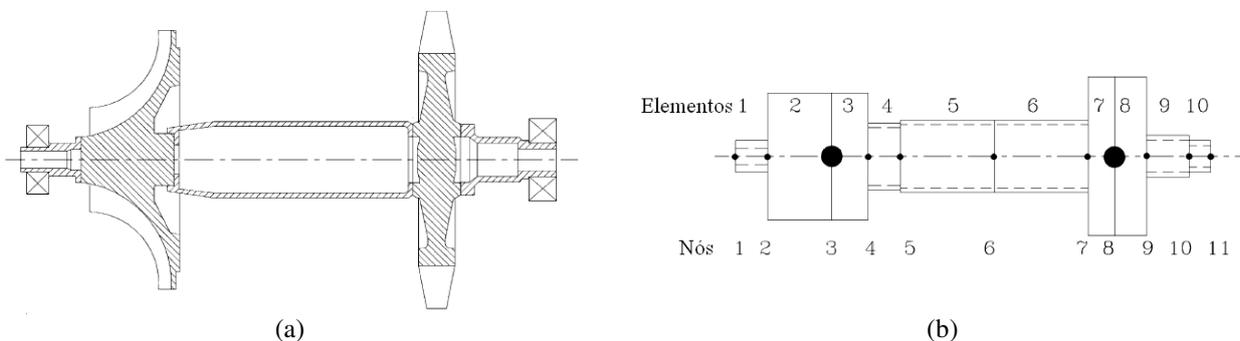


Figura 4 – Rotor de turbina a gás (Genta, 2008)

Genta (2008) apresenta como resultado da análise dinâmica do sistema rotor-mancais um diagrama de Campbell (Fig. 5a) a partir do qual se pode determinar as rotações críticas que correspondem às rotações onde as frequências naturais diretas se igualam com as frequências de rotação do rotor (linha tracejada): $\Omega_{cr1} = 1.888 \text{ rad/s}$ e $\Omega_{cr2} = 3.833 \text{ rad/s}$.

Além disso, são apresentadas as representações gráficas em duas dimensões dos dois primeiros modos de vibração do rotor nas condições críticas (Fig. 5b). Observa-se nestes gráficos que se tratam dos dois

modos básicos de flexão de uma “viga” bi-apoiada em suas extremidades. Além disso, como a rigidez dos mancais é extremamente elevada, os deslocamentos nodais nas extremidades de apoio são nulos.

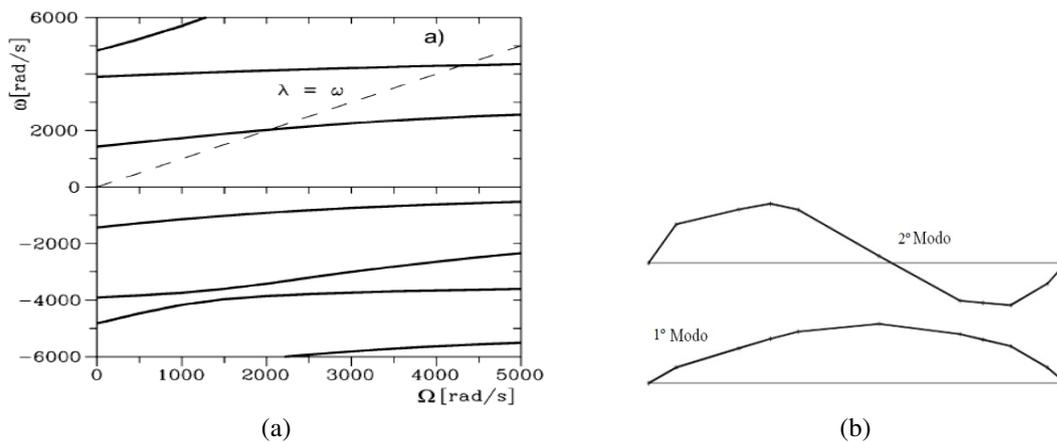


Figura 5 – (a) Diagrama de Campbell do sistema rotor-mancais e (b) representação gráfica dos dois primeiros modos de vibração do rotor (Genta, 2008)

Utilizando o aplicativo computacional desenvolvido pelos autores, foi traçado o diagrama de Campbell apresentado na Fig. 7 para o mesmo sistema rotor-mancais e as duas rotações críticas obtidas foram: $\Omega_{cr1} = 1.665 \text{ rad/s}$ e $\Omega_{cr2} = 3.377 \text{ rad/s}$. Comparando-se estes valores com os das rotações críticas determinadas por Genta (2008), pode-se considerar que os resultados obtidos pelas duas diferentes técnicas de modelagem são bastante próximos, apesar das diferentes técnicas de modelagem utilizadas.

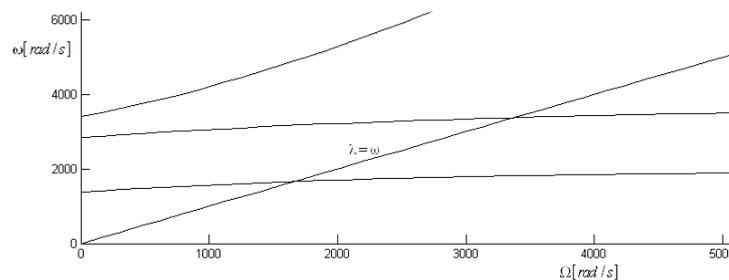


Figura 7 – Diagrama de Campbell do sistema rotor-mancais

Os dois primeiros modos de vibração do rotor são apresentados na Fig. 8 na forma tridimensional e nas rotações críticas, permitindo uma melhor visualização da forma como o rotor vibra. Mais uma vez, observa-se que o formato básico dos modos de vibração obtidos correspondem plenamente aos apresentados por Genta (2008).

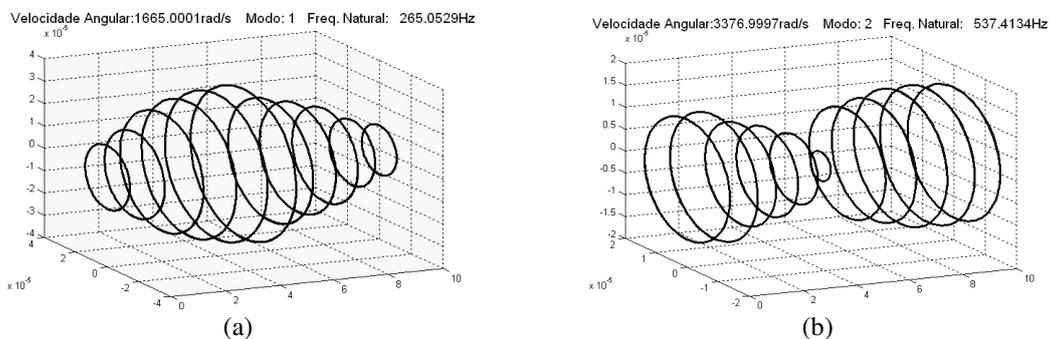


Figura 8 – Representação do (a) primeiro e (b) segundo modos de vibração do rotor

Conclusões

A modelagem de rotores pelo método dos elementos finitos constitui-se em um recurso muito utilizado para a análise dinâmica e projeto de máquinas rotativas como turbinas e geradores. Diferentes metodologias são empregadas, e neste trabalho a técnica estudada possibilitou a elaboração de um aplicativo computacional que incorpora vários recursos como a possibilidade de considerar elementos de eixos

cilíndricos, maciços ou vazados. Além disso, rotinas de cálculo permitem determinar as frequências naturais e os modos de vibração associados, em função da rotação, visto que estas frequências sofrem influência do efeito giroscópico e com base nestas informações é possível determinar-se as rotações críticas do rotor, condição na qual o rotor pode enfrentar grandes amplitudes de vibração.

O estudo de caso apresentado possibilitou a validação da técnica de modelagem estudada e do aplicativo computacional desenvolvido, entretanto, testes adicionais devem ser desenvolvidos para o aprimoramento desta técnica de modelagem, uma vez que a discretização de rotores por elementos finitos nem sempre é trivial, tendo em vista as características geométricas dos mesmos. Adicionalmente, a comparação dos resultados das simulações com resultados experimentais de uma bancada ou de uma máquina real traria muitos benefícios para a validação e refinamento deste recurso computacional.

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e à Universidade Federal de São Carlos - UFSCar pela bolsa de estudos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação em Desenvolvimento Tecnológico e Inovação - PIBITI/CNPq/UFSCar concedida ao autor Luiz Fellype Nogueirão.

Referências Bibliográficas

- Archer, J.S. "Consistent mass matrix for distributed mass systems". ASCE Journal of the Structural Division, v.89, ST4, p.161-168, 1963.
- Genta, G. "Vibration dynamics and control". New York: Springer Science+Business Media, 2008.
- Nelson, H.D. "A Finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory". ASME Journal of Mechanical Design, v.2, n.4, p.793-803, 1980.
- Nelson, H.D.; McVaugh, J.M. "The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements". ASME Journal of Engineering for Industry, v.98, n.2, p.593-600, 1976.
- Rouch, K.; Kao J. "A tapered beam finite element for rotordynamics analysis". Journal of Sound and Vibration, v.66, n.1, p.119-140, 1979.
- Ruhl, R.L. ;Booker, J.F. "A finite element model for distributed parameter turbo-rotor systems". ASME Journal of Engineering of Industry, v.94, p.126-132, 1972.
- Santos, I.F.; Watanabe, F.Y. "Lateral dynamics and stability analysis of a gas compressor supported by hybrid and active lubricated multirecess journal bearing". Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering, v.28, n.4, p.485-495, 2006.
- Thomson, W.T.; Dahleh, M.D. "Theory of vibration with applications". 5. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Simon & Schuster, 1998.