XIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica - 13 a 17/08/2012 – São Carlos-SP
Artigo CREEM2012

FRACTAIS: UMA APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

Leonardo Conti, Valéria Bueno Nascimento, Ligia Laís Fêmina*
UFU, Universidade Federal de Uberlândia, Curso de Engenharia Mecânica
Campus Santa Mônica – Av. João Naves de Ávila, n°2121 - Bairro Santa Mônica – CEP 38.408-100 – Uberlândia - MG
E-mail para correspondência: leonardoconti@hotmail.com
* Professora Orientadora, Faculdade de Matemática- UFU

Introdução

A palavra Fractal vem do latim "fractus", que quer dizer fragmentado, fracionado. Fractais são formas geométricas elementares, cujo padrão se replica indefinidamente, gerando complexas figuras que preservam, em cada uma de suas partes, as características do todo. Essas figuras são geradas por processos iterativos, providos entre outras coisas, de rotação, translação e contrações de figuras geométricas. Benoît Manderlbrot (1924-2010), matemático francês de renome, considerado o pai dos fractais foi o grande responsável por apresentar um novo conceito de geometria, a geometria fractal. A princípio, os fractais eram considerados curiosidades matemáticas, esses conjuntos atualmente estão demonstrando cada vez mais sua importância.

Objetivos

O objetivo desse trabalho é mostrar como construir fractais através de algumas ferramentas simples da teoria de Álgebra Linear, que são as transformações lineares planas ($T:R^2 \rightarrow R^2$). O exemplo que é apresentado nesse trabalho é um dos mais conhecidos da geometria fractal, o Triângulo de Sierpinski, o qual recebe esse nome, pois foi descrito pela primeira vez pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Metodologia

A seguir alguns dos conceitos e propriedades geométricas dos operadores lineares de R^2, essenciais para a construção de fractais. Para este estudo, as transformações lineares ($T: R^2 \rightarrow R^2$) utilizadas são contrações e rotações, também é utilizado a translação, uma aplicação ($T: R^2 \rightarrow R^2$) que não é uma transformação linear. Com essas três aplicações é possível compor uma semelhança de razão s, que seria uma aplicação $T:R^2 \rightarrow R^2$ da seguinte forma:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \tag{1}$$

no qual s é a razão da contração, θ é o ângulo de rotação e a translação em e unidades no eixo x, e f unidades no eixo y.

São ditos congruentes os conjuntos que se podem fazer coincidir usando uma translação e uma rotação apropriada no plano euclidiano.

Aplicando Eq. (1) em um conjunto S fechado e limitado em R^2, a imagem T(S) é congruente à contração de S pelo fator s. Usando essa semelhança é possível gerar inúmeros fractais, e é através dela que será construído o Triângulo de Sierpinski.

Outro conceito importante é o de auto-similaridade. Um subconjunto fechado e limitado é dito auto-similar se pode ser escrito da forma:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots \cup S_K, \tag{2}$$

onde S_1, S_2, S_3, ... ,S_k são conjuntos não-sobrepostos, cada um dos quais é congruente à contração de S pelo mesmo fator s ($0 < s < 1$). Geometricamente cada conjunto S_1, S_2, S_3,... ,S_k é uma parte reduzida do conjunto S, que representa o todo.

Resultados

Para demonstrar como o triângulo de Sierpinski é feito e facilitar a visualização do que foi obtido, o software GeoGebra foi utilizado para construção passo a passo da figura. O primeiro passo é a construção de um triângulo equilátero de lado 1 u.m. e em seguida aplica-se a semelhança Eq. (1). Geometricamente marca-se os pontos médios do triângulo e em seguida retira-se o triângulo menor formado por esses pontos, Fig. 1.

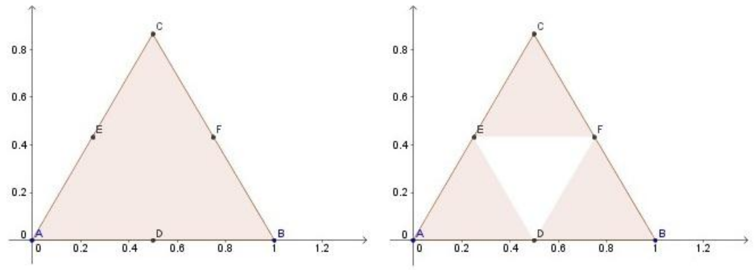

Figura 1 – Triangulo Equilátero, primeiro passo para o Triangulo de Sierpinski.

Algebricamente: Seja U o conjunto do triângulo equilátero à esquerda, são aplicadas três semelhanças no conjunto U para que o mesmo possa se tornar o triângulo do lado direito. Cada semelhança realiza uma contração de razão ½ e desloca o triângulo formado para um certo ponto do gráfico.

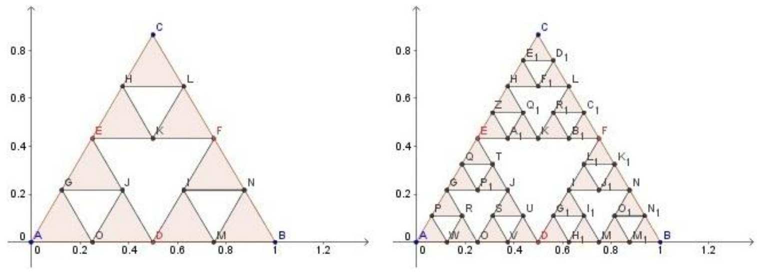

Figura 2 – O procedimento realizado na Fig.1 é repetido mais duas vezes sequencialmente

Realizando as mesmas operações, só que agora nos três novos triângulos, o resultado será o triângulo à esquerda, e fazendo isso novamente, o resultado é a Fig. 2 à direita.

Quando realizamos esse processo inúmeras vezes, o resultado que obtemos é o Triângulo de Sierpinski, que é um conjunto auto-semelhante, pois cada mínima parte representa o todo.

Conclusões

A geometria fractal presente no triângulo de Sierpinski e na natureza têm suas formas criadas ou simuladas por processos matemáticos, que podem ser abordados de forma simples ou sofisticada, dependendo do objetivo do estudo. Aplicações como o triângulo de Sierpinski despertam o interesse para o aprendizado de Álgebra Linear, uma vez que embora a Álgebra Linear é um campo abstrato da Matemática, ela tem um grande número de aplicações dentro e fora da mesma. Assim a Álgebra Linear aplicam-se a várias áreas, em especial às Engenharias.

Referências Bibliográficas

Anton, H., Rorres, C., "Àlgebra Linear com Aplicações", Bookman Companhia Editora, Porto Alegre, RS, 2001.

Barnsley, M. F., "Fractals everywhere", Boston Academic, Boston, USA, 1988.

Callioli, C., Domingues, H.H., Costa, R.C.F., "Álgebra linear e aplicações.", Editora Atual, São Paulo, SP, 1983.

Kolman, B.; Hill, D.R., "Introdução à Álgebra Linear com Aplicações", Tradução:Alesandra Bosquilha. Rio de Janeiro: LTC, 8ª ed, 2006.

Lima, E. L., "Álgebra Linear". Coleção Matemática Universitária, SBM, Rio de Janeiro,1995.