



Universidade de São Paulo  
Escola de Engenharia de São Carlos



XIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica - 13 a 17/08/2012 – São Carlos-SP  
Artigo CREEM2012

## CONTROLE DO COMPORTAMENTO CAÓTICO DE UM SISTEMA PENDULAR

**Fábio Roberto Chavarette, Bruno Sousa Carneiro da Cunha**

UNESP, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Curso de Engenharia Mecânica.  
Campus Ilha Solteira - Bairro Centro - CEP 15385-000 – Ilha Solteira – São Paulo  
E-mail para correspondência: brunoo\_cunhaa@yahoo.com.br

### Introdução

Sistemas dinâmicos são encontrados em muitas áreas de aplicação: sejam em estudos populacionais, econômicos, na biologia, na eletricidade, na mecânica e muitos outros; investigá-los significa poder estimar a variação temporal das variáveis escolhidas para sua representação a partir das perturbações existentes. A mecânica, os sistemas dinâmicos apresentam uma representação característica visto que devido às leis de movimento a maior derivada existente corresponde à aceleração, isto é, uma derivada de segunda ordem. Dentro do campo de estudos dos sistemas dinâmicos a teoria não linear tem ocupado nos últimos anos uma posição de destaque nas mais diversas áreas de pesquisa, pois, desvenda os enigmas de suas respostas, leva à possibilidade de descrever e explicar o comportamento dos mais diversos processos existentes (Nayfeh, Mook, 1979; Meirovitch, 1970).

Sistemas não lineares apresentam como principal característica fenômenos que originam vários tipos de soluções: periódicas, multi-periódicas, quase-periódicas e até caóticas, onde a complexidade da estrutura global do correspondente retrato de fase constitui a principal dificuldade na interpretação dos resultados obtidos, já que as funções matemáticas conhecidas não são suficientes para representar analiticamente todas essas propriedades (Chavarette *et al* 2010; 2011).

O estudo do comportamento dinâmico não linear de um pêndulo elástico é importante, pois o mesmo pode servir como modelo para problemas com certo grau de complexidade. Vários problemas de vibrações na engenharia utilizam sua modelagem por meio do sistema massa-mola, sendo que na literatura corrente existem muitos trabalhos que abordam sistemas pendulares em diferentes situações e com diferentes tipos de análises. Dentre estes trabalhos, citam-se os trabalhos precursores de Dávid e Sinha (2000), Bishop e Xu (1996), onde utilizaram um pêndulo com excitação paramétrica vertical do suporte (Bishop *et al*, 1996). O trabalho de Ge e Lin (2000) consideram um pêndulo com excitação horizontal do suporte e Flashner e Golat (2001) um pêndulo com excitação vertical e horizontal no suporte.

O objetivo deste trabalho é encontrar os parâmetros que reproduzem um comportamento caótico para um sistema pendular com excitação vertical do suporte e aplicar a técnica do controle linear ótimo (Rafikov, Balthazar 2008) no sistema para controlar o comportamento caótico do sistema.

XIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica - 13 a 17/08/2012 – São Carlos-SP  
Artigo CREEM2012

### Modelo Matemático Proposto

O sistema a ser abordado neste trabalho é o pêndulo com excitação vertical do suporte proposto em (Guckenheimer, Holmes, 1983) ilustrado a seguir.

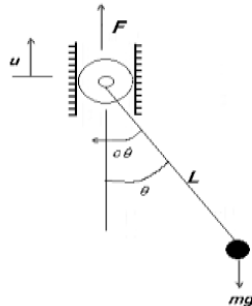


Figura 1 – Representação esquemática de um oscilador com excitação vertical no suporte e com um amortecimento  $c$  (Guckenheimer, Holmes, 1983).

O modelo matemático é dado por (Guckenheimer, Holmes, 1983):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= b \operatorname{sen}(x_3) \operatorname{sen}(x_1) - a \operatorname{sen}(x_1) - dx_2 \\ \dot{x}_3 &= \omega \end{aligned} \quad (1)$$

### Simulações

As simulações foram realizadas por meio da fixação das variáveis  $a = 0.1$ ,  $d = 0.31623$  e  $\omega = 1$ . A variável  $b$  foi escolhida para controlar os diferentes modos de oscilação do pêndulo por meio da variação de valores.

Para obtenção de um sistema com comportamento estável adotou-se o parâmetro  $b=1.3$ , e os autovalores para o sistema são  $\lambda_1 = -0.0528$  e  $\lambda_2 = -0.2633$ , determinado que o sistema é assintoticamente estável com ponto fixo representado por um nó hiperbólico.

Para obtenção de um sistema com comportamento instável adotou-se o parâmetro  $b=1.6$ , e os autovalores para o sistema são  $\lambda_1 = 0.13141$  e  $\lambda_2 = -0.45034$ , determinado que o sistema é assintoticamente instável com ponto fixo representado por uma sela hiperbólica.

Para obtenção de um sistema com comportamento caótico adotou-se o parâmetro  $b=2.5$ , e os autovalores para o sistema são  $\lambda_1 = 0.1260$  e  $\lambda_2 = -0.4422$ , determinado que o sistema seja instável com ponto fixo representado por uma sela hiperbólica e seus expoentes de Lyapunov são  $\lambda_1 = 0.28915$  e  $\lambda_2 = -0.60538$ , determinado o comportamento caótico.

O comportamento caótico é ilustrado na figura a seguir.

**XIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica - 13 a 17/08/2012 – São Carlos-SP**  
Artigo CREEM2012

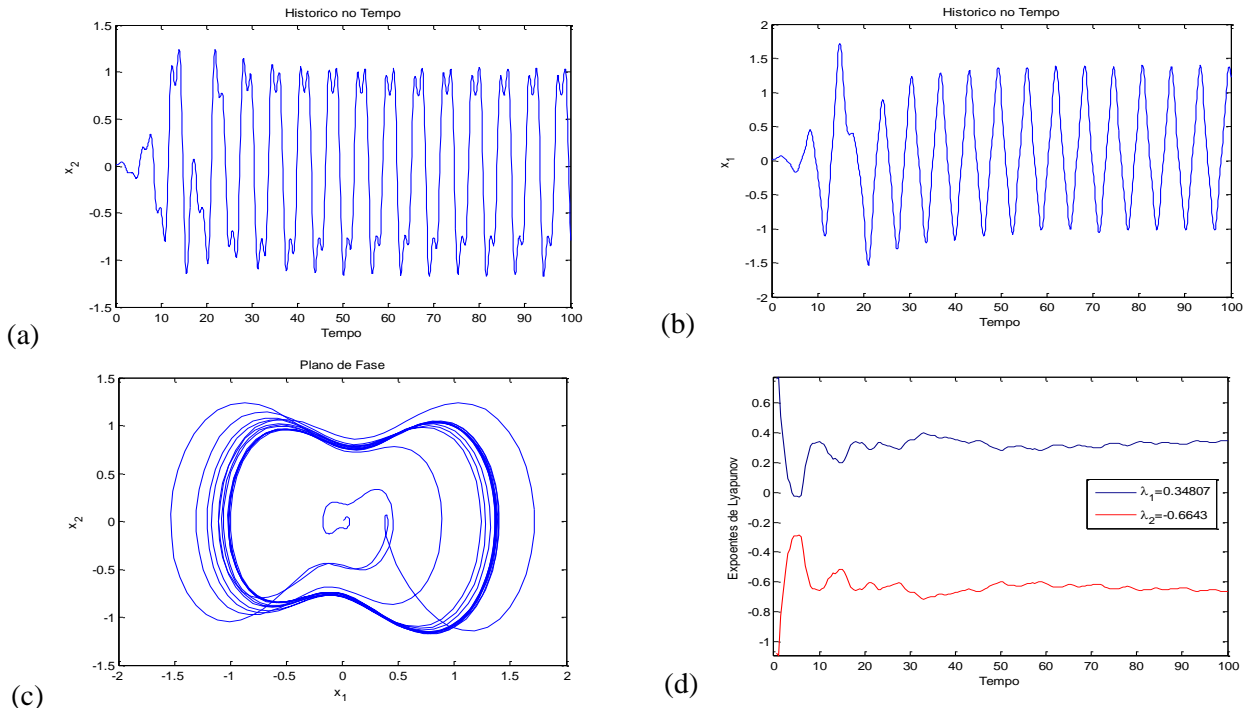


Figura 2 – Dinâmica do Sistema com Comportamento Caótico. (a) Histórico no Tempo ( $x_1$ ), (b) Histórico no Tempo ( $x_2$ ), Plano de Fase ( $x_1, x_2$ ), e Exponente de Lyapunov.

A seguir se apresenta o projeto de um controlador para estabilizar o comportamento caótico do sistema (1) ilustrado na figura 2.

O estudo de uma técnica de controle não linear se foca na estabilidade, que está relacionada em determinar aqueles estados iniciais que, sob uma lei de controle de realimentação serão transferidos e mantidos em um conjunto alvo específico e da controlabilidade relacionada em determinar aqueles estados iniciais onde um controle de realimentação existente transferirá o estado a um alvo específico.

### Projeto de Controlador

Problemas de controle consistem em tentativas de estabilizar um sistema instável a um ponto de equilíbrio, uma órbita periódica, ou, mais geral, sobre uma trajetória desejada. Nos últimos anos, um interesse significativo no controle dos sistemas não-lineares, apresentando um comportamento instável, tem sido observada e muitas técnicas vem sendo discutidas na literatura (Ott et al, 1990; Sinhá et al, 2000; Vicent, Yu, 1991). Neste trabalho nós adotamos o projeto de controle linear ótimo proposto por Rafikov e Balthazar (2008). Eles encontraram as condições que garantem a aplicação do controle linear em sistemas não-lineares. Temos que notar que na teoria do controle existem dois tipos de problemas: o controle de programa e a síntese do controle. Para o primeiro, a função do controle  $u(t)$  é encontrada como uma função do tempo. Ou seja, nesse caso a função de controle ótimo determina uma trajetória ótima que corresponde a uma condição inicial dada do sistema. No segundo caso, a função de controle  $u(t, x)$  depende do tempo e de variáveis de estado. Este tipo de controle é chamado controle “*feedback*” ou controle com realimentação podendo ser aplicado para qualquer condição inicial. Se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o controle linear ótimo estabiliza em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadrados da trajetória e do controle do regime desejado.

Nesta seção, nós aplicamos o Controle Linear Ótimo no sistema (1) reduzindo o movimento oscilatório do sistema não linear para uma órbita periódica.

**XIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica - 13 a 17/08/2012 – São Carlos-SP**  
Artigo CREEM2012

**Teoria do Controle Linear Ótimo**

Consideremos um sistema controlado

$$\dot{x} = Ax + g(x) + U \quad (12)$$

onde  $x \in R^n$  é um vetor de estado,  $A \in R^{n \times n}$  é uma matriz constante,  $g(x)$  um vetor formado de funções contínuas e o vetor controle é

$$\dot{x} = Ax + g(x) + U \quad (13)$$

Sem controle ( $U \equiv 0$ ) o sistema (12) apresenta comportamento caótico para determinados valores dos parâmetros.

Em diversos problemas da engenharia, física, economia, ecologia, etc., o objetivo é escolher a lei  $U$  de controle que mova o sistema do regime perturbado a, um ponto fixo de equilíbrio ou uma órbita periódica ou não periódica desejada.

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}} - A\tilde{x} - g(\tilde{x}) \quad (14)$$

e o vetor de controle  $u_t$  que estabiliza o sistema em torno da trajetória desejada tem a seguinte forma

$$u_t = Bu \quad (15)$$

onde  $B \in R^{n \times m}$  é uma matriz constante.

Definindo

$$y = x - \tilde{x} \quad (16)$$

como o desvio da trajetória do sistema (12) da trajetória desejada, e admitindo (13)-(16), chegamos à equação em desvios:

$$\dot{y} = Ay + g(x) - g(\tilde{x}) + Bu \quad (17)$$

A parte não-linear do sistema (12) pode ser escrita como

$$g(x) - g(\tilde{x}) = G(x, \tilde{x})(x - \tilde{x}) \quad (18)$$

onde  $G(x, \tilde{x})$  é uma matriz limitada, cujos elementos dependem de  $x$  e  $\tilde{x}$ .

Admitindo (16), o sistema (17) tem a seguinte forma:

$$\dot{y} = Q - G^T(x, \tilde{x})P - PG(x, \tilde{x}) \quad (19)$$

seja definida positiva para  $G$  limitada, então o controle linear “feedback”

$$u = -R^{-1}B^T P y \quad (20)$$

é ótimo para transferir o sistema não linear (14) de qualquer estado inicial ao estado final

$$y(\infty) = 0 \quad (21)$$

minimizando o funcional

$$J = \int_0^{\infty} (y^T \tilde{Q} y + u^T R u) dt \quad (22)$$

onde a matriz simétrica  $P$  é calculada da equação algébrica não linear de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (22)$$

**XIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica - 13 a 17/08/2012 – São Carlos-SP**  
Artigo CREEM2012

onde as matrizes  $Q \in R^{n \times n}$  e  $R \in R^{n \times m}$  são constantes, definidas positivas.

Além disso, com o controle de realimentação (22), existe uma vizinhança  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ,  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ , da origem de tal modo que, se  $x_0 \in \Gamma_0$ , a solução  $x(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ , do sistema controlado (21) é localmente assintoticamente estável, e

$$J_{\min} = y_0^T P(0) y_0 \quad (23)$$

Finalmente, se  $\Gamma = R^n$  o sistema controlável é globalmente assintoticamente estável.

### Controle Linear Ótimo aplicado ao Modelo

Aplicando a técnica do controle linear ótimo no modelo da Eq. (10), as equações do sistema controlado podem ser descritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + U \\ \dot{x}_2 &= b \operatorname{sen}(x_3) \operatorname{sen}(x_1) - a \operatorname{sen}(x_1) - dx_2 \\ \dot{x}_3 &= \omega \end{aligned} \quad (23)$$

Determina-se  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0.5 * \sin(\pi / 2 * t) \\ \sin(\pi / 2 * t) \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $R = [1]$  e  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.07599 & -0.3162 & 0.02399 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  onde a

controlabilidade do sistema é  $M|B|AB|ABC| \neq 0$ , considerando então que o sistema dinâmico é controlável.

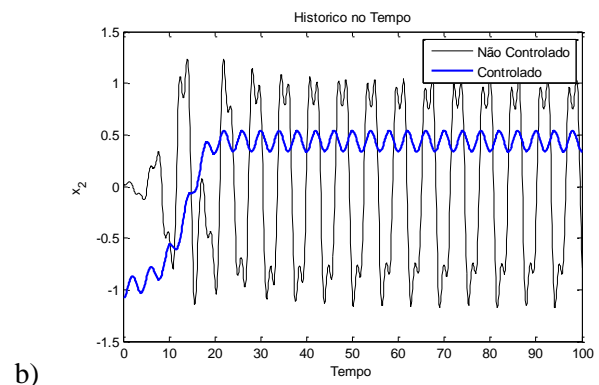
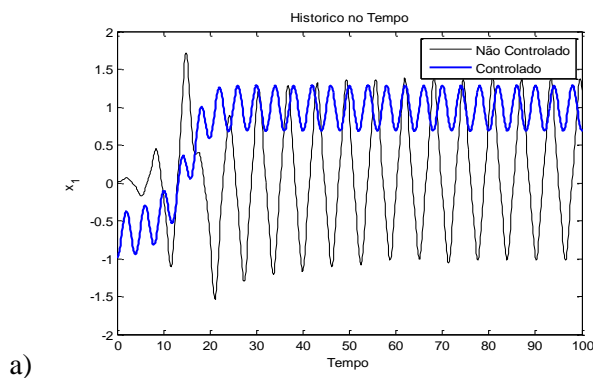
A matriz  $P(t)$  é obtida por

$$P = \begin{bmatrix} 1.4756 & 1.7782 & -2.3996 \\ 1.7782 & 6.8732 & -8.1938 \\ -2.3996 & -8.1938 & 11.3724 \end{bmatrix} \quad (24)$$

resolvendo a equação algébrica de Riccati a função de controle ótimo  $u$  tem a seguinte forma:

$$u = (0.8542x_1 - 0.4576x_2 - 0.7789x_3) \quad (25)$$

As trajetórias do sistema sem controle e do sistema controlado são ilustradas na figura a seguir.



**XIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica - 13 a 17/08/2012 – São Carlos-SP**  
Artigo CREEM2012

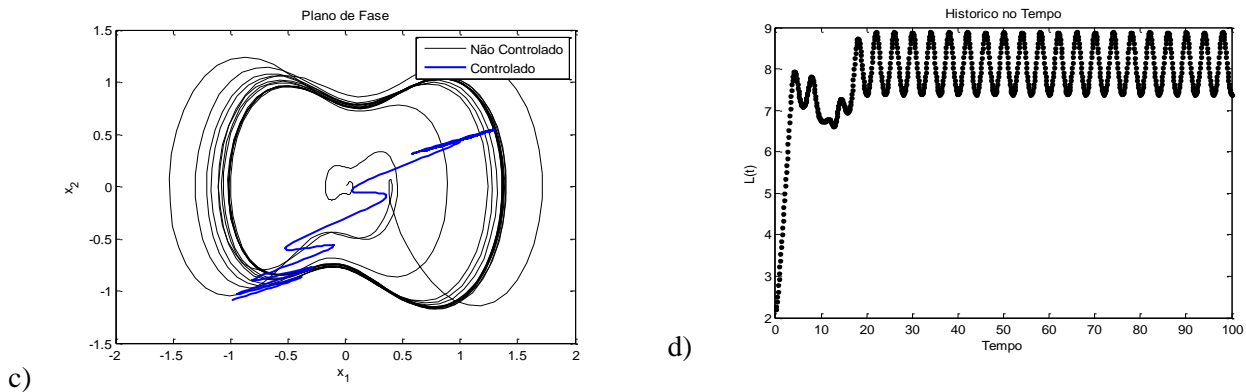


Figura 3 – Dinâmica do Sistema Controlado e Não Controlado. (a) Histórico no Tempo ( $x_1$ ), (b) Histórico no Tempo ( $x_2$ ), Plano de Fase ( $x_1, x_2$ ), e (d) Histórico no Tempo  $L(t)$ .

Conforme a verificação do controle (Rafikov, Balthazar, 2008), a função (17) é calculada numericamente por  $L(t) = y^T \tilde{Q} y$ , onde  $L(t)$  é definido positivo e ilustrado na Figura 3(d).

### Considerações Finais

Neste trabalho, a dinâmica caótica de um pêndulo com excitação vertical do suporte proposto em (Guckenheimer, Holmes, 1983) é investigado.

Nós propomos a aplicação da estratégia do controle linear ótimo realimentado, aplicado ao modelo matemático do pêndulo com excitação vertical do suporte proposto.

Esta estratégia de controle reduz o movimento deste sistema para uma pequena orbita estável conforme ilustra a Figura 3, essa Figura mostra a eficácia da estratégia de controle para esse problema.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao suporte financeiro ao projeto de iniciação científica concedido pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, através do Proc. No. 2011/17776-6.

### Referências Bibliográficas

- [1] Bishop, S.R., Clifford, M.J., “Zones of Chaotic Behavior in the Parametrically Excited Pendulum”, *Journal of Sound and Vibration*, vol.189, pp. 142-147, 1996.
  - [2] Bishop, S.R., Xu, D., “Stabilizing the Parametric Excited Pendulum Onto High Order Periodic Orbits”, *Journal of Sound and Vibration*, pp. 287-293, 1996.
  - [3] Chavarette, F.R., Balthazar, J.M., Felix, J.L.P., “Remarks on an Optimal Linear Control Design Applied to a Nonideal and an Ideal Structure Coupled to an Essentially Nonlinear Oscillator”. *Journal of computational and nonlinear dynamics*, v. 5, pp. 024501-0024508. 2010.
  - [4] Chavarette, F.R., Peruzzi, N.J., Balthazar, J.M., Barbanti, L., Damasceno, B.C., “On an Optimal Linear Control Applied to a Non-Ideal Load Transportation System, Modeled with Periodic Coefficients”. *Applied Mechanics and Materials*, v. 52, pp. 13-18, 2011.
  - [5] Dávid, A., Sinha, S.C., “Control of Chaos in Nonlinear Systems with Time-Periodic Coefficients”, *Proceedings of the American Control Conference Chicago, Illinois, June 2000*, pp. 764-768, 2000.
  - [6] Ge, Z.M., Lin, T.N., “Regular and Chaotic Dynamic Analysis and Control of Chaos of an Elliptical Pendulum on a Vibrating Basement”, *Journal of Sound and Vibration*, pp. 1045-1068, 2000.
- Meirovitch, L., “Methods of analytical dynamics”. MacGraw-Hill Book Company, New York, 1970.  
Nayfeh, A., Mook, D., “Nonlinear oscillations”. John Willey and Sons, 1979.



**XIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica - 13 a 17/08/2012 – São Carlos-SP**  
Artigo CREEM2012

- [7] Rafikov, M., Balthazar, J.M. “On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic system via linear control feedback”. *Nonlinear science and numerical simulation*, 1397, pp. 1246-1255, 2008.
- [8] Guckenheimer, J., Holmes, P., “*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*”, Springer-Verlag, 1983.
- [9] Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J.A., “Controlling Chaos”, *Phys. Rev. Lett.* 66, 1990, pp. 1196.
- Sinhá, S.C., Henrichs, J.T., Ravindra, B.A., “A General Approach in the Design of active Controllers for Nonlinear Systems Exhibiting Chaos”. in *Int. J. Bifur. Chaos*, 10-1, 2000, 165pp.
- [10] Vincent, T.L., Yu, J., “Control of a chaotic system”, in *J. of Dyn. Control*, 1, 1991, pp. 35