

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO DE CALOR UTILIZANDO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Pedro Henrique Grechi, pedrogrechi@gmail.com

Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE). Rua Edmundo de Barros 554, Foz do Iguaçu-PR.

RESUMO: O propósito deste trabalho é apresentar uma forma de resolução da equação de difusão de calor utilizando um método baseado em diferenças finitas. Para a resolução será utilizado o método FTCS e o programa MATLAB® para realizar a simulação numérica.

PALAVRAS-CHAVE: difusão de calor, métodos de diferenças finitas, método FTCS

ABSTRACT: The purpose of this paper is to present a way of solving the heat diffusion equation using a method based on finite differences. For the resolution will be used FTCS (Forward Time Centered Space) method and MATLAB® software to perform the numerical solution.

KEYWORDS: heat diffusion, finite difference method, FTCS method

INTRODUÇÃO

O presente trabalho consiste na simulação numérica de um modelo elaborado para descrever a distribuição de temperatura em problemas de difusão térmica bidimensional. As simulações serão realizadas no software MATLAB® baseadas no método de diferenças finitas FTCS. Posteriormente o método numérico computacional será utilizado para analisar propriedades da transferência de calor como a passagem do regime transiente para o regime permanente.

Em transferência de calor, quando se trata de um problema em que haja apenas condução como forma de transporte de energia, este transporte é nomeado como difusão de energia ou difusão de calor. (INCROPERA e DEWITT, 2003)

Segundo Incropera e DeWitt (2003), quando se analisa a condução de calor, encontrar a distribuição de temperatura, a qual representa a variação da mesma com a posição, é o principal objetivo, pois o conhecimento desta possibilita a determinação de importantes grandezas como o fluxo de calor por condução em qualquer ponto em um meio ou em sua superfície através da aplicação da lei de Fourier e outras como quando se tratando de um sólido, determinação de tensões térmicas, expansões e deflexões para avaliar a integridade estrutural do mesmo. O conhecimento da distribuição da temperatura também pode ser utilizado para otimizar espessura de materiais isolantes e também avaliar se revestimentos especiais ou adesivos e a superfícies sobre a qual são aplicados são compatíveis.

A utilização de técnicas numéricas, ou métodos numéricos, são empregados quando em uma análise se torna difícil obter uma solução analítica para o problema. (SPERANDIO, MENDES e SILVA, 2003)

METODOLOGIA

Para a equação da difusão de calor foi considerado o caso bidimensional, sem geração de energia e condutividade térmica constante. Na diferenciação da equação aplicou-

se o método FTCS, o qual utiliza diferenças finitas avançadas na derivada temporal e centradas nas derivadas espaciais. Após a diferenciação da equação diferencial, a mesma foi solucionada por uma rotina de MATLAB®.

Parâmetros da simulação

Para a simulação foi considerado uma placa de ferro puro discretizada em grid de 50 por 50 pontos e para um tempo de 30 segundos. A difusividade térmica do ferro considerada foi 23.1e-6. Considerou-se inicialmente a placa a 5°C. Com relação às condições de contorno na placa, foi aplicado um aquecimento constante a norte e leste da placa, os lados oeste e sul foram mantidos fixos a mesma temperatura da inicial da placa.

Equações governantes

A equação diferencial parcial da difusão de calor bidimensional é dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Onde:

T= temperatura

t= tempo

α = difusividade térmica

A equação anterior em diferenças finitas é:

$$u_{j,k}^i - u_{j,k}^{i+1} = -r(u_{j+1,k}^{i+1} + u_{j,k+1}^{i+1} + u_{j-1,k}^{i+1} + u_{j,k-1}^{i+1} - 4u_{j,k}^{i+1}) \quad (2)$$

Onde:

u= temperatura

i= tempo

j= eixo x

k= eixo y

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A distribuição de temperatura na placa após 30 segundo é representada pela figura a seguir.

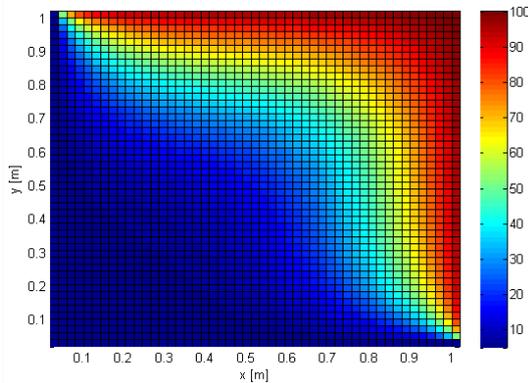


Figura 1. Distribuição de temperatura na placa

Analisando a figura anterior, consegue-se visualizar facilmente a direção e o sentido da distribuição do calor na placa.

O resultado da simulação numérica é uma matriz onde cada termo da matriz representa a temperatura em cada ponto da placa. Plotando a variação da norma desta matriz em função do tempo tem-se:

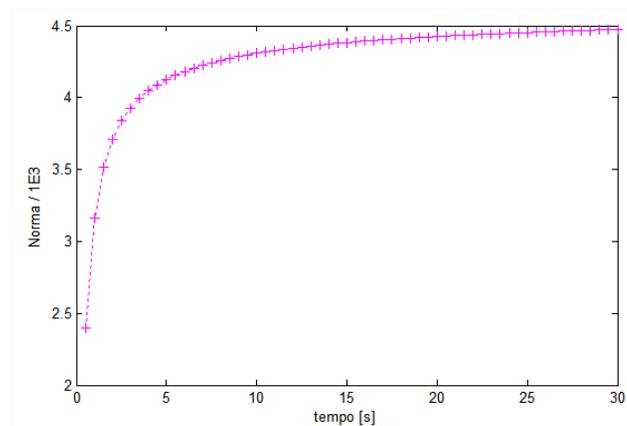


Figura 2. Variação da norma da matriz temperatura

Nota-se que a variação da norma vai diminuindo com o tempo e aos 30 segundos a mesma está praticamente estabilizada, o que significa que transferência de calor na placa passou de regime transiente para um regime permanente.

CONCLUSÃO

A modelagem numérica da difusão de calor em uma placa se mostrou confiável aos resultados esperados. Em muitos casos a modelagem numérica de problemas físicos é vantajosa, pois evita gastos desnecessários para a realização de um modelo físico para simulações, porém para problemas de alta complexidade, o tempo

demandado e os erros gerados pela modelagem numérica não a tornam boa alternativa.

REFERÊNCIAS

- SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. E. **Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos.** São Paulo: Pearson, 2003.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.** 5. ed. Rio de Janeiro: John Wiley & Sons, 2003.
- LEVEQUE, R. J. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations.** Philadelphia: SIAM, 2007.

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

O autor é o único responsável pelo material impresso contido neste artigo.