



ESTUDO SIMPLIFICADO DE DINÂMICA DE ROTORES: ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA VELOCIDADE DE ROTAÇÃO NO COMPORTAMENTO DINÂMICO DO SISTEMA

D. S. Rabelo

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.
Campus Santa Mônica
38400-902 – Uberlândia, MG – Brazil
dsrabelo@gmail.com

V. Steffen, Jr

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.
Campus Santa Mônica
Sta. Mônica
38400-902 – Uberlândia, MG – Brazil
vsteffen@mecanica.ufu.br

Resumo: Este trabalho tem como meta a apresentação de um estudo da dinâmica de rotores a partir de um modelo simplificado, bem como o detalhamento teórico necessário para se obter as equações de movimento de um rotor simétrico. A motivação deste estudo é a determinação, a partir do desenvolvimento realizado, das duas primeiras frequências do rotor em função da velocidade de rotação, através do método de Rayleigh-Ritz. Como conclusão, pode-se observar que um rotor simétrico possui duas curvas de frequências em função da velocidade de rotação, caracterizando os movimentos de precessão direta e de precessão inversa. Assim, a velocidade de rotação influencia diretamente estas frequências através do chamado efeito giroscópico.

Palavras-chave: rotores, método de Rayleigh-Ritz, comportamento dinâmico de rotores.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem o caráter de estudo introdutório, baseado numa bibliografia clássica sobre o assunto, Lalanne e Ferraris (1998), para subsidiar o projeto de pesquisa do Programa de Educação Tutorial – PET dos cursos de graduação em Engenharia Mecânica e Engenharia Mecatrônica da Universidade Federal de Uberlândia. Assim, o estudo tem a finalidade de permitir uma primeira abordagem ao assunto, ainda num contexto de um curso de graduação, despertando o interesse pelo tema.

Os rotores são componentes de máquinas que giram em torno de seu próprio eixo, podendo ser tanto rígidos como flexíveis. Assim, de uma maneira geral, as máquinas rotativas, como turbinas, compressores, redutores, dentre outras, possuem eixos rotativos apoiados em mancais de deslizamento, de rolamento ou magnéticos. Geralmente este conjunto é denominado como Rotor, conforme ilustrado na Figura 1. Sua utilização abrange vários setores da indústria, dentre os quais se destacam: o petroquímico, o aeronáutico e o de geração de energia. A grande capacidade dos rotores de armazenar energia mecânica vem da alta velocidade à qual são submetidos. Associado às altas velocidades de operação, observa-se também um carregamento dinâmico importante sobre os componentes do sistema, implicando problemas de tensões elevadas, vibração e instabilidade.

No projeto de máquinas rotativas é necessário prever o comportamento dinâmico dos rotores, tanto quanto à flexão como à torção.

Os estudos mais frequentes realizados na área têm a ver com os seguintes temas: Balanceamento de Rotores Flexíveis; Previsão das amplitudes de vibração causadas pelo desbalanceamento do rotor e por outras formas de excitação; Previsão das frequências de vibração para diferentes velocidades de rotação, Estabilidade; Modificações de projeto melhorar o comportamento dinâmico do sistema através de técnicas de otimização, Identificação de parâmetros desconhecidos, Atenuação de vibração através de técnicas ativas e passivas, Determinação e diagnóstico de falhas.

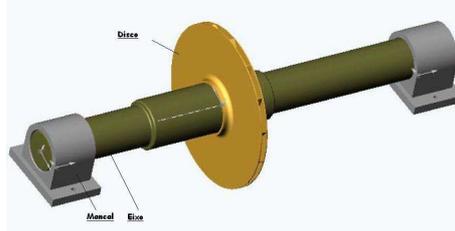


Figura 1: Ilustração de um rotor (Fonte: *Introdução à Dinâmica de Rotores*, Pereira, J. C.)

O passo inicial para se obter as equações do movimento de um rotor vem das equações de energia de cada um dos principais componentes do sistema, a saber, o disco, o eixo e os mancais. As equações gerais de um rotor são obtidas por meio dos seguintes passos:

- Obtém-se inicialmente a energia cinética, T , a energia de deformação, U , e o trabalho virtual, δW , das forças externas para os elementos do sistema.
- Um método numérico é escolhido. O método de Rayleigh-Ritz serve para a obtenção de um modelo simplificado com poucos graus de liberdade; o método dos elementos finitos para aplicações de engenharia de uma forma geral.
- As Equações de Lagrange, Eq. (1), são aplicadas para se obter as equações do movimento.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (1)$$

onde q_i corresponde às coordenadas generalizadas referentes aos graus de liberdade i .

Os sistemas de coordenadas utilizados para se obter as equações de movimento são ilustrados na Figura 2.

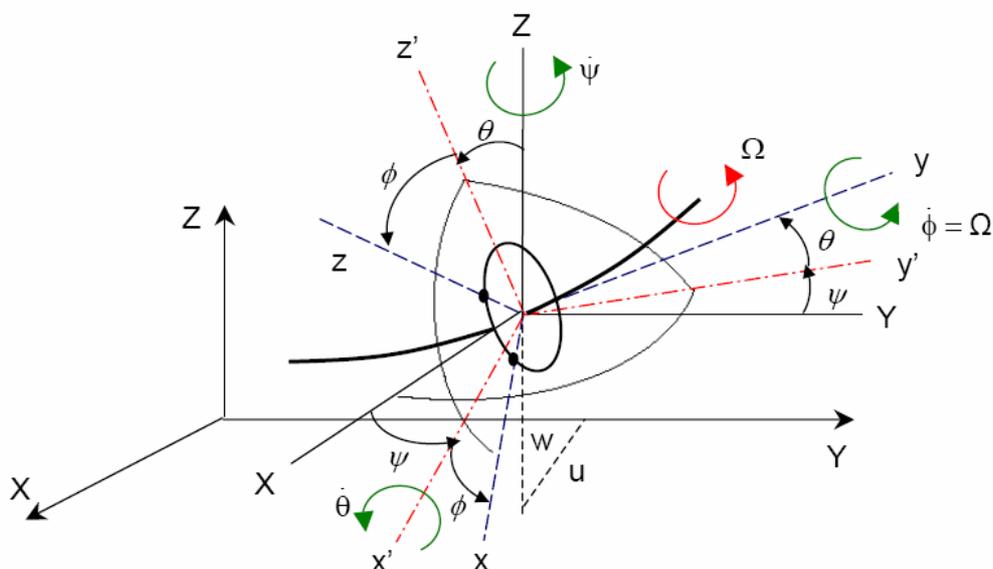


Figura 2: Sistemas de coordenadas para um disco em um eixo flexível [1]: referenciais inercial e rotativo

Em seguida, pode-se obter as expressões de energia dos vários componentes do rotor.

1. Componentes do Rotor

Serão apresentadas as equações de energia dos vários componentes do rotor, com a finalidade de, uma vez substituídas na equação de Lagrange, obter as equações do movimento.

1.1. Disco

1.1.1. Energia Cinética do Disco:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (2)$$

onde, na Eq. (2), o termo $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2$, que é constante, não possui influência nas equações de Lagrange e representa a energia a energia cinética de rotação do disco. O último termo, $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$, representa o chamado efeito giroscópico.

1.2. Eixo

1.2.1. Energia Cinética do Eixo:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I L \int_0^L \dot{\psi} \dot{\theta} dy \quad (3)$$

Na Eq. (3), ρ é a massa por unidade de volume, S é a área da seção transversal do eixo, e I é o momento de inércia de área desta seção transversal. A primeira integral da Eq. (3) é a expressão clássica para a energia cinética de uma viga em flexão; a segunda integral representa o efeito de rotação da seção transversal; o termo $\rho I L \Omega^2$ é constante; e o último termo é relacionado ao efeito giroscópico.

1.2.2. Energia de deformação do eixo

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (4)$$

Na Eq. (4), o primeiro termo representa a influência da energia de deformação devido à flexão, enquanto o segundo termo representa o efeito devido a uma força axial externa F_0 . Deve-se lembrar que esta força axial acrescenta rigidez ao sistema, aparecendo em várias aplicações de rotores.

1.3. Mancais

A influência da rigidez e do amortecimento viscoso dos mancais no comportamento do rotor é considerada a partir do trabalho virtual das forças atuando no eixo.

$$\delta W = F_u u \delta u + F_w w \delta w \quad (5)$$

onde, F_u e F_w são as componentes das forças generalizadas, que podem ser colocadas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

1.4. Massa de desbalanceamento

O desbalanceamento é definido por uma massa m_u situada a uma distância d (excentricidade) do centro geométrico do eixo. A energia cinética correspondente, T_u , é dada por:

$$T_u \cong m_u \Omega d \dot{u} (\cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (7)$$

2. O MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

O método de Rayleigh-Ritz é utilizado para reduzir o número de graus de liberdade do sistema, permitindo uma estimativa das freqüências mais baixas.

Sua metodologia consiste em estabelecer uma “hipótese razoável” para o deslocamento lateral da estrutura. Logo, matematicamente, tem-se:

$$x = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \begin{Bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (8)$$

onde x é o vetor deslocamento, γ_i são funções de deslocamento que devem obedecer as condições de contorno e p_i são as novas variáveis em função do tempo. É importante observar que estas novas coordenadas não têm sentido físico.

2.1. Determinação do Modelo

O modelo simplificado do sistema é mostrado na Fig. 3. O rotor é constituído de um eixo simétrico de comprimento L ; um disco simétrico com uma massa desbalanceada, ambos situados em $y = L_1$; um mancal situado em $y = L_2$. Pode-se observar o referencial inercial $R_0(X, Y, Z)$, o eixo do rotor que é montado de forma a coincidir com o eixo Y , e a velocidade de rotação Ω , considerada constante. Para facilitar o desenvolvimento matemático, o número de graus de liberdade é reduzido.

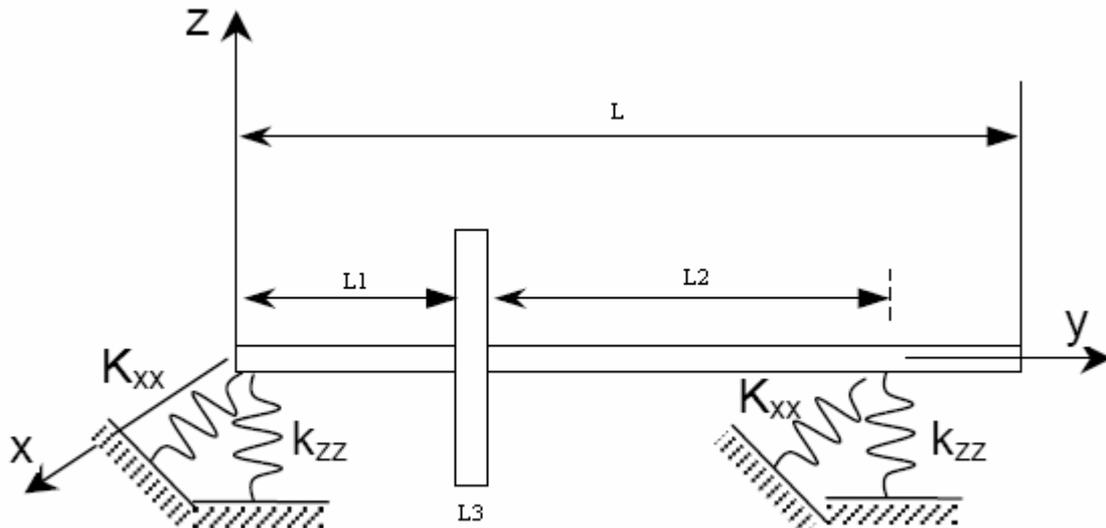


Figura 3: Modelo do rotor

As expressões para os deslocamentos nas direções x e z são respectivamente

$$u(y,t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1 \quad (9)$$

$$w(y,t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2 \quad (10)$$

onde q_1 e q_2 são coordenadas generalizadas independentes.

São escritas as equações para as rotações θ e ψ , conforme abaixo:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df(y)}{dy} q_2 = g(y)q_2 \quad (11)$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(y)}{dy} q_1 = -g(y)q_1 \quad (12)$$

As derivadas de segunda ordem das variáveis u e w são necessárias para expressar a energia de deformação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_1 = h(y)q_1 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2} q_2 = h(y)q_2 \quad (14)$$

2.1.1. O Disco

Usando as equações anteriores, a energia cinética fica:

$$T_D = \frac{1}{2} \left[M_D f^2(L_1) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + I_{Dx} g^2(L_1) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_{Dy} \Omega g^2(L_1) \dot{q}_1 q_2 \right] \quad (15)$$

2.1.2. O Eixo

Semelhantemente, a energia cinética do eixo é escrita como:

$$T_S = \frac{1}{2} \left[\rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2\rho I \Omega \int_0^L g^2(y) dy \dot{q}_1 q_2 \quad (16)$$

Logo, a energia cinética do conjunto disco-eixo é dada por:

$$T = T_D + T_S \quad (17)$$

que se torna

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega a \dot{q}_1 q_2$$

onde

$$m = M_D f^2(L_1) + I_{Dx} g^2(L_1) + \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \quad (18)$$

$$a = I_{Dy} g^2(L_1) + 2\rho I \int_0^L g^2(y) dy \quad (19)$$

A energia de deformação do eixo, U_s , vem das equações (13) e (14) aplicadas à equação (4). Logo, para o caso em que a força axial é nula, tem-se:

$$U_s = \frac{1}{2} k (q^2_1 + q^2_2) \quad (20)$$

onde

$$k = EI \int_0^L h^2(y) dy \quad (21)$$

2.1.3. Os Mancais

O trabalho virtual feito pelas forças devido à ação dos mancais sobre o eixo é obtido a partir da Eq. (6). Logo:

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_{xx} f^2(L_2) q_1 \delta q_1 - k_{xz} f^2(L_2) q_2 \delta q_1 - k_{zz} f^2(L_2) q_2 \delta q_2 \\ & - k_{zx} f^2(L_2) q_1 \delta q_2 - c_{xx} f^2(L_2) \dot{q}_1 \delta q_1 - c_{xz} f^2(L_2) \dot{q}_2 \delta q_1 \\ & - c_{zz} f^2(L_2) \dot{q}_2 \delta q_2 - c_{zx} f^2(L_2) \dot{q}_1 \delta q_2 \end{aligned} \quad (22)$$

Como

$$\delta W = F q_1 \delta q_1 + F q_2 \delta q_2 \quad (23)$$

A identidade das Eqs. (22) e (23) fornecem as duas componentes $F q_1$ e $F q_2$ da força generalizada do sistema.

2.1.4 Massa desbalanceadora

Das Eqs. (9) e (10) e da Eq. (7), a energia cinética da massa desbalanceada fica:

$$T_u = m_u \Omega d f(L_1) (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t) \quad (24)$$

2.1.5 Forças

As duas componentes das forças são designadas como:

$$\begin{aligned} F_u &= F_1(t) \\ F_w &= F_2(t) \end{aligned} \quad (25)$$

como estas forças agem na posição $y = L_3$,

$$\delta W = F_1(t) f(L_3) \delta q_1 + F_2(t) f(L_3) \delta q_2 \quad (26)$$

Desta forma, considerando as Eqs. (26) e (23), conclui-se que:

$$\begin{aligned} Fq_1 &= F_1(t)f(L_3) \\ Fq_2 &= F_2(t)f(L_3) \end{aligned} \quad (27)$$

3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DO ROTOR EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE DE ROTAÇÃO

O gráfico das frequências naturais do rotor em função da velocidade de rotação é conhecido como Diagrama de Campbell.

3.1 Obtenção do Diagrama de Campbell

Segue abaixo um estudo de caso para obtenção do Diagrama de Campbell utilizando o desenvolvimento teórico realizado.

Os dados numéricos para o disco, eixo e mancais são apresentados nas tabelas 1 e 2 abaixo.

Tabela 1: Dados básicos para o Disco

Dado de interesse	Valor medido ou calculado
Raio interno R_1	0,01 m
Raio externo R_2	0,15 m
Espessura h	0,03 m
Massa específica ρ	7800 kg/m ³
Posição L_1	L/3
Massa M_D	16,47 kg
Momento de inércia de massa $I_{Dx} = I_{Dz}$	9,427 × 10 ⁻² kg.m ²
Momento de inércia de massa I_{Dy}	0,1861 kg.m ²

Tabela 2: Dados básicos para o Eixo

Dado de Interesse	Valor medido ou calculado
Comprimento L	0,4 m
Área da seção transversal S ($R = R_1$)	3,142 × 10 ⁻⁴ m ²
Massa específica ρ	7800 kg/m ³
Módulo de elasticidade E	2 × 10 ¹¹ N/m ²
Momento de inércia de área I	7,854 × 10 ⁻⁹ m ⁴

No sistema rotativo que será estudado abaixo não há influência dos mancais e, nestas condições, o rotor é chamado de simétrico.

Função de deslocamento:

A função de deslocamento escolhida tem a ver com a forma de um eixo suportado em ambas extremidades (meia onda senoidal), i.e.:

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \frac{\pi y}{0,4} \Rightarrow g(y) = \frac{\pi}{0,4} \cos \frac{\pi y}{0,4} \Rightarrow h(y) = -\left(\frac{\pi y}{0,4}\right)^2 \sin \frac{\pi y}{0,4} \quad (28)$$

Serão agora determinadas as duas primeiras freqüências do rotor em função da velocidade de rotação, pelo método de Rayleigh-Ritz. Desta forma, o Diagrama de Campbell poderá ser obtido. A aplicação das Equações de Lagrange, juntamente com as energias cinética e de deformação, sem influência dos mancais, fornece:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= m_u d\Omega^2 f(L_1) \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= m_u d\Omega^2 f(L_1) \cos \Omega \end{aligned} \quad (29)$$

Primeiramente, faz-se o estudo do caso homogêneo, ou seja, quando o segundo membro da equação é considerado igual a zero. Nestas condições, o sistema se torna:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= 0 \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

cujas soluções são da forma

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 e^{rt} \\ q_2 &= Q_2 e^{rt} \end{aligned} \quad (31)$$

Substituindo as Eq. (31) e suas respectivas derivadas na Eq. (30), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

Como a solução trivial não é de interesse, calcula-se o determinante da matriz igualando-o a zero, obtendo-se assim a chamada equação característica:

$$m^2 r^4 + (2km + a^2 \Omega^2) r^2 + k^2 = 0 \quad (33)$$

Para $\Omega = 0$ as freqüências angulares encontradas são:

$$w_{10} = w_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (34)$$

Para o sistema em rotação, isto é $\Omega \neq 0$, as freqüências angulares encontradas são:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{w_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 w_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \\ w_2 &= \sqrt{w_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 w_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \end{aligned} \quad (35)$$

Uma representação das frequências angulares em função da velocidade de rotação (Diagrama de Campbell) é ilustrada na Figura 4.

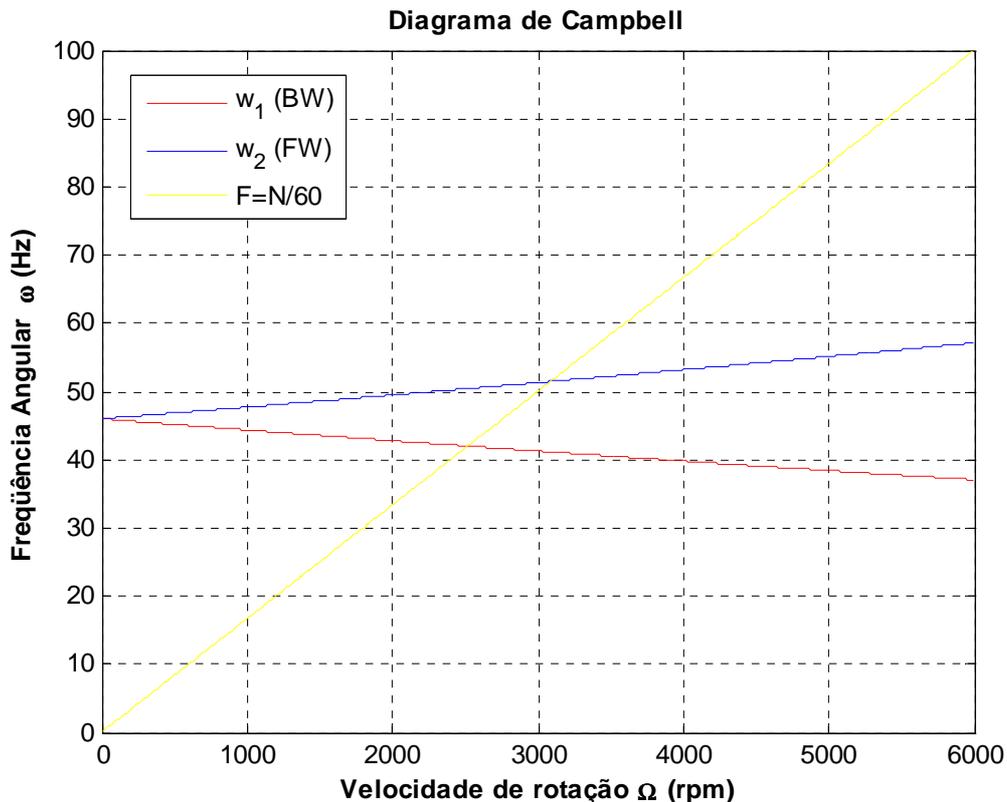


Figura 4: Diagrama de Campbell

As curvas marcadas com BW e FW significam precessão inversa e precessão direta, respectivamente. É importante ressaltar que o desbalanceamento excita apenas a precessão direta (FW). Outra informação de relevância é que, nos pontos em que a reta ($F = N/60$) intercepta as curvas das frequências, a frequência do rotor se iguala à frequência de rotação. Portanto, como o desbalanceamento excita apenas a precessão direta, o ponto em que há intersecção da curva F com a curva de ω_2 , é uma velocidade crítica. Tem-se, nestas condições, o aparecimento do fenômeno da ressonância. Se o rotor operar nesta velocidade com pouco amortecimento, as amplitudes do sistema podem ser tais que comprometem o funcionamento do rotor.

3. AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Educação Tutorial – PET dos cursos de Engenharia Mecânica e Mecatrônica; ao aluno Tobias Souza Moraes do curso de pós graduação da FEMEC/UFU; e ao Prof. Dr. Valder Steffen Jr.

4. REFERÊNCIAS

- [1]: Lalanne, M. and Ferraris, G., 1998, “Rotordynamics Prediction in Engineering”, John Wiley & Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester, West Sussex PO19 1UD, England.
 [2]: Pereira, J. C., 2003, “Introdução à Dinâmica de Rotores”, Grupo de Análise e Projeto Mecânico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

SIMPLIFIED STUDY OF ROTORDYNAMICS: ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF THE SPEED OF ROTATION ON THE DYNAMIC BEHAVIOR OF THE SYSTEM

D. S. Rabelo

Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering.
Campus Santa Mônica
38400-902 – Uberlândia, MG – Brazil
dsrabelo@gmail.com

V. Steffen, Jr

Federal University of Uberlândia, School of Mechanical Engineering.
Campus Santa Mônica
38400-902 – Uberlândia, MG – Brazil
vsteffen@mecanica.ufu.br

***Abstract:** This work aims at presenting the study of rotordynamics by using a simplified model. The theoretical aspects involving the equations of motion of a symmetric rotor are presented. The motivation for this study is the determination of the first two natural frequencies of the rotor as a function of the rotation speed, by using the so-called Rayleigh-Ritz's method. As a conclusion, it can be observed that a symmetric rotor exhibits two circular frequencies, namely the forward whirl (FW) and the backward whirl (BW), respectively. The speed of rotation influences directly these frequencies through the gyroscopic effect.*

***Keywords:** rotors, Rayleigh-Ritz, dynamic behavior.*