



APLICAÇÃO DAS TEORIAS DE ANÁLISE DIMENSIONAL E SEMELHANÇA AO ESTUDO DE UM HIDROGERADOR

Késia Gomes de Sousa

Universidade de Brasília – UnB

skesia@hotmail.com

Márcio Lima da Silva

df.marcio@gmail.com

Mario Olavo Magno de Carvalho

molavo@unb.br

Cristiano Vila Serra Viana

cvsv@unb.br

Resumo: *Este trabalho propõe o desenvolvimento de estudo do comportamento dinâmico e vibratório de hidrogeradores, utilizando uma metodologia de modelagem apoiada em critérios bem definidos de análise dimensional e semelhança dos modelos físicos. Esta abordagem tem uma dupla finalidade de possibilitar que sejam definidas condições de projeto e de operação para as unidades que serviram de modelo, bem como de calibrar experimentalmente modelos numéricos de simulação do comportamento dinâmico de hidrogeradores. Neste trabalho, será apresentada uma metodologia para a construção de modelos reduzidos de estruturas reais, em especial para um hidrogerador. Por fim, as hipóteses simplificadoras necessárias para projetar o modelo são discutidas e os resultados encontrados analisados.*

Palavras-chave: *hidrogeradores, semelhança dinâmica, análise dimensional, modelos reduzidos.*

1. INTRODUÇÃO

Com o intuito de fornecer conhecimento e gerar tecnologia para a repotenciação de turbinas hidráulicas, este trabalho propõe o desenvolvimento de uma metodologia de modelagem da dinâmica do rotor e das diversas interações que este tem com o seu ambiente operacional. Em especial, será enfocada uma metodologia para a construção de uma bancada de simulação e testes do comportamento dinâmico de hidrogeradores.

Esta metodologia faz uso das Teorias de Análise Dimensional e Semelhança dos Modelos Físicos para a obtenção das dimensões principais do rotor da bancada de testes, a partir das dimensões correspondentes de uma máquina real. Do ponto de vista operacional, a bancada deve ser flexível e permitir a simulação de defeitos operacionais relatados em unidades geradoras e a interação rotor-gerador, com especial atenção ao desbalanceamento magnético.

2. DESCRIÇÃO DA BANCADA

O projeto “*Bancada Experimental para Simulação do Comportamento Dinâmico de Hidrogeradores*”, teve como objetivo desenvolver uma bancada experimental que permitisse a simulação de fenômenos mecânicos e eletromagnéticos semelhantes aos que ocorrem em um hidrogerador com turbina do tipo Kaplan convencional.

Procurou-se no projeto da bancada uma construção que se aproximasse do hidrogerador da Unidade 3 de Coaracy Nunes, como será detalhado nos capítulos seguintes. A bancada a ser projetada deve ser flexível de forma a permitir a modificação parâmetros de projeto e operacionais possibilitando alterar o comportamento dinâmico do conjunto turbina-gerador.

3. TEORIA ANÁLISE DIMENSIONAL E DOS MODELOS FÍSICOS

A Análise Dimensional possibilita a obtenção de teorias que têm como objetivo interpretar os resultados experimentais e determinar as condições de semelhança física entre os processos físicos de mesma natureza, mesmo quando não se deseja utilizar ou não é possível explicitar as equações diferenciais que governam o fenômeno.

3.1. Grandezas Fundamentais e Derivadas

As grandezas fundamentais correspondem às unidades fundamentais que são independentes de quaisquer outras unidades e constituem a base de um sistema de medidas.

3.2. Lei Física ou Relação Funcional

Lei física ou relação funcional é toda e qualquer equação matemática que representa uma lei ou um processo físico.

3.3. Base da Matriz Dimensional

A base da matriz dimensional é o conjunto de grandezas fundamentais ou derivadas que representam os parâmetros físicos envolvidos no fenômeno analisado. Na análise dimensional, a base adotada deve ser capaz de representar as dimensões dos parâmetros da relação funcional que descreve o fenômeno físico em estudo, e, por meio do Teorema de II, possibilitar a obtenção dos números Π , que são parâmetros adimensionais relacionados ao objeto de estudo.

A base deficiente possui um número de grandezas de base inferior à quantidade de grandezas fundamentais necessárias para representar o problema, situação que leva a resultados errôneos, pois fornece um número superior de parâmetros adimensionais do que o necessário.

Um procedimento que permite identificar se a base usada é estrita é o cálculo do posto da matriz dimensional, tópico a ser explicado no item 3.5.

3.4. Matriz Dimensional

Na análise dimensional os parâmetros relacionados em um problema físico podem ser organizados numa matriz dimensional. Nesta forma de apresentação as grandezas fundamentais, que constituem a base do problema, são colocadas nas linhas e os parâmetros da relação funcional, que exprime matematicamente a lei ou processo físico em estudo, nas colunas. Os elementos da matriz são os expoentes das dimensões dos parâmetros. Logo, não é necessário representar na matriz dimensional parâmetros adimensionais, tais como ângulo, fatores e funções de forma.

3.5. Posto da Matriz Dimensional

Posto da matriz é definido como a ordem da maior matriz quadrada, contida dentro da matriz dimensional e que tenha como valor da ordem o número de linhas da matriz dimensional, de determinante diferente de zero. Quando calculado, o posto da matriz representa a quantidade de grandezas fundamentais que a base da matriz deve possuir.

3.6. Teorema de Π – (Vaschy-Buckingham)

O Teorema de Π foi enunciado pela primeira vez por Vaschy em 1892 e diz o seguinte:

“Toda relação homogênea entre n grandezas, cujos valores numéricos dependem das unidades escolhidas, é redutível a uma relação entre $(n - r)$ parâmetros que são combinações monômias de a_1, a_2, \dots, a_n e têm dimensões nulas, desde que, entre as n unidades das grandezas a_1, a_2, \dots, a_n , r possam ser escolhidas arbitrariamente. Este número r não pode, evidentemente, ser superior ao número de unidades fundamentais.”

Considerando a relação homogênea

$$\phi = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1)$$

pelo Teorema de Π , temos que

$$\phi = f(a_1, a_2, \dots, a_{n-r}) \quad (2)$$

3.7. Princípio da Homogeneidade Dimensional

“Toda equação que representa uma lei física ou um processo físico deve ser homogênea em relação às grandezas de base”, ou seja, as dimensões das grandezas derivadas, em ambos os lados da equação, devem ser iguais e podem ser convertidas em dimensões das grandezas fundamentais.

Quando dois processos físicos são semelhantes, o comportamento do original pode ser previsto por meio do estudo do comportamento de seu modelo. Neste caso dizemos haver semelhança física entre os processos.

Satisfeitas estas condições, as relações funcionais adimensionais do modelo e do original coincidirão, e será possível prever o comportamento do segundo, estudando o do primeiro.

3.8. Semelhança Incompleta

A semelhança física é estabelecida quando dois processos físicos apresentam os mesmos valores para os números adimensionais e fatores de forma a eles associados. Neste caso, tanto o modelo como o original possuem funções de forma equivalentes, quando estas são apresentadas na forma adimensional.

No entanto, é preciso ter em mente que ao se construir um modelo, existem situações em que nem todos os itens acima poderão ser alcançados, nestes casos, utiliza-se a semelhança incompleta, na qual são satisfeitas as condições de semelhança que apresentam maior importância no estudo do fenômeno abordado, desconsiderando-se as condições de semelhança secundárias ou aceitando aproximações para seus valores.

4. MODELO REDUZIDO DO HIDROGERADOR

Com o objetivo de construir uma bancada experimental para simulação de hidrogeradores, foi idealizado um modelo de eixo girante sujeito a desbalanceamento mecânico e elétrico, ao qual foram aplicadas as teorias de análise dimensional e de semelhança dos modelos físicos.

4.1. Relação Funcional

Para elaboração da equação matemática que estabelece uma relação entre a amplitude de vibração (variável dependente) e as demais variáveis relevantes para esta análise (variáveis independentes), que tem como foco o estudo das vibrações no gerador, será proposto um funcional que caracterize fisicamente o problema.

Propositalmente serão assumidas algumas simplificações, como a não inclusão das grandezas mecânicas e termodinâmicas, que numa situação real, existem num hidrogerador quando do seu funcionamento. O modelo fica assim restrito ao comportamento mecânico e elétrico do hidrogerador. Acoplamentos hidráulicos e térmicos são desconsiderados. Desta forma foram determinados os parâmetros relevantes para estabelecer uma relação de semelhança geométrica, mecânica e elétrica entre o modelo e um hidrogerador real, que neste trabalho será denominado de protótipo. Desta forma foi elaborada a seguinte relação funcional:

$$\phi = f(L, L_1, L_2, I, I_{x1}, I_{x2}, r, r_G, D_1, D_2, ex, e, K_1, K_2, E, \rho, \omega, N^2H, R, i_r, V, \mu_0, \delta) \quad (3)$$

Nesta relação se considerou como parâmetros relevantes para essa análise, a amplitude de vibração $-\delta$, o comprimento do eixo $-L$, a distância entre os planos médios das seções transversais do gerador e do mancal de escora/guia (mancal 1) $-L_1$, a distância entre os planos médios das seções transversais do mancal escora/guia (mancal 1) e mancal guia (mancal 2) $-L_2$, o raio do eixo $-r$, o raio do gerador $-r_G$, a excentricidade $-ex$, o entreferro $-e$, momento de inércia da área do eixo $-I$, momento de inércia da massa do mancal 1 $-I_{x1}$, momento de inércia da massa do mancal 2 $-I_{x2}$, o desbalanceamento do gerador $-D_1$, o desbalanceamento da turbina $-D_2$, a rigidez do mancal 1 $-K_1$, a rigidez do mancal 2 $-K_2$, o módulo de elasticidade $-E$, a massa específica $-\rho$, a velocidade angular $-\omega$, o número de espiras $-N^2H$, a resistência elétrica do gerador $-R$, a corrente elétrica no rotor $-i_r$, a voltagem no gerador $-V$ e a permeabilidade magnética $-\mu_0$.

Além desses parâmetros, também foi considerada no modelo a presença das seguintes forças:

Força Elástica no Eixo (F_{EE}):

$$F_{EE} = \frac{E \cdot I \cdot \delta}{L^3} \quad (4)$$

Força Elástica no Mancal (F_{EM}):

$$F_{EM} = K \cdot \delta \quad (5)$$

Força Centrífuga no Eixo (F_{CE}):

$$F_{CE} = \rho \cdot r^2 \cdot L \cdot \delta \cdot \omega \quad (6)$$

Força Centrífuga no Gerador (F_{CG}):

$$F_{CG} = D_1 \cdot \omega^2 \quad (7)$$

Força Magnética no Gerador (F_{MG}):

$$F_{Mag} = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot r_G \cdot (N^2H) \cdot i^2 \cdot ex}{2 \cdot e^3} \quad (8)$$

4.2. Classificação das variáveis

Os parâmetros ou variáveis das quais depende a relação funcional ϕ podem ser classificados como apresentado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Classificação das variáveis

Variável		Símbolo	Dimensão
Variável Dependente			
1	Amplitude de vibração	δ	L
Variáveis Independentes			
2	Comprimento do eixo	L	L
3	Distância entre os planos médios das seções transversais do gerador e do mancal de escora/guia (mancal 1)	L_1	L
4	Distância entre os planos médios das seções transversais do mancal escora/guia (mancal 1) e mancal guia (mancal 2)	L_2	L
5	Raio do eixo	r	L
6	Raio do gerador	r_G	L
7	Excentricidade	ex	L
8	Entreferro	e	L
9	Momento de inércia da área do eixo	I	L^2M
10	Momento de inércia da massa do mancal 1	I_{x1}	L^4
11	Momento de inércia da massa do mancal 2	I_{x2}	L^4
12	Desbalanceamento do gerador	D_1	$L \cdot M$
13	Desbalanceamento da turbina	D_2	$L \cdot M$
14	Rigidez do mancal 1	K_1	Mt^2
15	Rigidez do mancal 2	K_2	Mt^2
16	Módulo de elasticidade	E	$L^{-1} \cdot Mt^2$
17	Massa específica	ρ	$L^{-3} \cdot M$
18	Velocidade angular	ω	t^{-1}
19	Número de espiras	$N^2 H$	L
20	Resistência elétrica do gerador	R	$L^{-4} \cdot M$
21	Corrente elétrica no rotor	i_r	I
22	Voltagem no gerador	V	$L^{-1} \cdot M \cdot I$
23	Permeabilidade magnética	μ_0	$L \cdot M \cdot I^{-2} \cdot t^{-2}$

4.3. Matriz Dimensional

A base adotada para este caso foi a $LMI t^{-1}$ (comprimento, massa, intensidade de corrente elétrica e tempo), pois a formulação do problema leva em consideração fenômenos mecânicos dinâmicos e elétricos. A seguir, é mostrada a matriz dimensional do problema em estudo.

¹ No lugar da notação tradicional T para a grandeza tempo, foi utilizada a notação t .

Tabela 4.1: Matriz dimensional

	K_1	K_2	E	ρ	ω	N^2H	R	i	V	μ_0	δ
L	0	0	-1	-3	0	1	-4	0	-4	1	1
M	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
I	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-2	0
t	-2	-2	-2	0	-1	0	0	0	0	-2	0

4.3. Classificação das Grandezas

4.3.1. Grandezas Diretrizes (n):

Variáveis que exprimem o problema, neste caso existem um total de vinte e três grandezas diretrizes ($n = 23$), relacionadas a seguir:

$$L, L_1, L_2, r, r_G, ex, e, I, I_{x1}, I_{x2}, D_1, D_2, K_1, K_2, E, \rho, \omega, N^2H, R, i_r, V, \mu_0, \delta$$

4.3.2. Grandezas Determinantes (r):

Variáveis cujas dimensões, quando combinadas, formam os demais parâmetros da relação funcional, para este problema, foram definidas um total de quatro grandezas determinantes ($r = 4$), relacionadas a seguir:

$$L, \omega, \rho, i_R$$

4.3.3. Grandezas de Base (m):

Grandezas que constituem as dimensões adotadas como base da matriz dimensional, no caso em questão: comprimento, massa, intensidade de corrente elétrica e tempo - $LMI t$ ($m = 4$).

4.4. Posto da matriz

O posto da matriz calculado para a matriz dimensional é igual a quatro (posto = 4). Por ser o valor do posto igual ao do número de grandezas de base ($m = 4$), temos que a base adotada é estrita. Portanto, está satisfeita a condição que exige o uso de bases estritas na análise dimensional.

4.5. Parâmetros Adimensionais ou Números Π

A seguir, então, é apresentada a etapa de cálculo dos parâmetros adimensionais, conhecidos como Números Π , que permitem estabelecer uma relação de semelhança entre o modelo e o protótipo (hidrogerador real).

4.6. Relação dos Parâmetros Adimensionais – Números Π

Dentre os números adimensionais encontrados para este sistema, os sete seguintes são responsáveis pela semelhança mecânica e elétrica, sendo, portanto, considerados os de maior relevância para o objetivo a que se propõe o projeto, isto é, descrever a dinâmica do rotor:

$$\Pi_1 = \frac{\delta}{L} \quad (9)$$

$$\Pi_2 = \frac{\rho \cdot r^2 \cdot L^4 \cdot \omega^2}{E \cdot I} = \frac{F_{CE}}{F_{EE}} \quad (10)$$

$$\Pi_3 = \frac{E \cdot I \cdot \delta \cdot e^3}{L^3 \cdot r_G \cdot (N^2 H) \cdot \mu_0 \cdot i_R^2 \cdot ex} = \frac{F_{EE}}{F_{Mag}} \quad (11)$$

$$\Pi_4 = \frac{D_1}{\rho \cdot r^2 L \cdot \delta} = \frac{F_{CG}}{F_{CE}} \quad (12)$$

$$\Pi_5 = \frac{K_1 \cdot L^3}{E \cdot I} = \frac{F_{EM}}{F_{EE}} \quad (13)$$

$$\Pi_6 = \frac{I_{x1} \cdot \omega^2 \cdot L^2}{E \cdot I \cdot \delta} = \frac{I \times \alpha}{M} \quad (14)$$

$$\Pi_7 = \frac{\mu_0 \cdot R \cdot (N^2 H) \cdot r_G \cdot \omega \cdot i_R^2}{V^2} = \frac{T \cdot \omega}{Pot} \quad (15)$$

4.7. Teorema de Π ou de Vaschy-Buckingham

De acordo com o Teorema de Π ou de Vaschy – Buckingham, podemos substituir a relação funcional para a amplitude de vibração no gerador que possui vinte e três variáveis ($n = 23$), a seguir:

$$\phi = f(L, L_1, L_2, I, I_{x1}, I_{x2}, r, r_G, D_1, D_2, ex, e, K_1, K_2, E, \rho, \omega, N^2 H, R, i_R, V, \mu_0, \delta,) \quad (16)$$

das quais quatro ($r = 4$) são consideradas determinantes:

$$L, \omega, \rho, i_R$$

Pela função de dezenove ($n - r = 19$) parâmetros adimensionais, que segue abaixo:

$$\phi_1 = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}, \pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{14}, \pi_{15}, \pi_{16}, \pi_{17}, \pi_{18}, \pi_{19}) \quad (17)$$

4.8. Fator de Escala

Uma das maneiras de se expressar os números Π de um determinado problema é na forma de Fator de Escala (λ), que neste trabalho foi definido como a relação entre parâmetros geométricos do modelo e os homólogos do protótipo.

A condição para semelhança física entre o modelo e o protótipo é a igualdade entre os números Π do modelo (Π_m) e os do protótipo (Π_p), ou seja, quando há semelhança física, $\Pi_m / \Pi_p = 1$.

Para efetuar esta análise, foram assumidas as seguintes hipóteses e considerações:

1. Os parâmetros serão divididos em três grupos: controlados, fixos e medidos.

2. A massa específica (ρ) do modelo e do protótipo são iguais.

$$3. \lambda_L = \frac{L_M}{L_P} \quad (18)$$

$$4. \lambda_t = \frac{t_M}{t_P} \quad (19)$$

$$5. \lambda_m = \frac{m_M}{m_P} \quad (20)$$

$$6. \lambda_\omega = \frac{\omega_M}{\omega_P} = \frac{1}{\lambda_t} \quad (21)$$

$$7. \lambda_F = \frac{F_M}{F_P} \quad (22)$$

4.9. Relações de Fator de Escala

Os índices M (grandeza do modelo) e P (grandeza do protótipo) foram utilizados para diferenciar as grandezas coletadas em situações reais das obtidas teoricamente ou por meio de experimentos.

Fator de Escala do Comprimento:

$$\lambda_L = \frac{L_M}{L_P} \quad (23)$$

Fator de Escala do Tempo:

$$\lambda_t = \frac{t_M}{t_P} \quad (24)$$

Fator de Escala da Frequência Natural:

$$\lambda_\omega = \frac{\omega_M}{\omega_P} = \frac{1}{\lambda_t} \quad (25)$$

Fator de Escala da Massa:

$$\lambda_m = \frac{m_M}{m_P} = \frac{L_M^3}{L_P^3} = \lambda_L^3 \quad (26)$$

Fator de Escala da Força (F):

$$\lambda_F = \frac{F_M}{F_P} = \frac{\lambda_m \cdot \lambda_L}{\lambda_t^2} = \lambda_L^4 \cdot \lambda_\omega^2 \quad (27)$$

Fator de Escala da Força Centrífuga no Gerador (F_{CG}):

$$\lambda_{FCG} = \lambda_m \cdot \lambda_R \cdot \lambda_\omega^2 \quad (28)$$

Fator de Escala da Força Centrífuga no Eixo (F_{CE}):

$$\lambda_{FCE} = \lambda_L^3 \cdot \lambda_\delta \cdot \lambda_\omega^2 \quad (29)$$

Fator de Escala da Força Elástica no Mancal (F_{EM}):

$$\lambda_{FEM} = \lambda_K \cdot \lambda_\delta \quad (30)$$

Fator de Escala da Rigidez no Mancal (K):

$$\lambda_K = \frac{K_M}{K_P} \quad (31)$$

Fator de Escala da Amplitude de Vibração (δ):

$$\lambda_\delta = \frac{\delta_M}{\delta_P} \quad (32)$$

Fator de Escala do Momento de Inércia da Massa (I):

$$\lambda_I = \lambda_m \cdot \lambda_R = \lambda_H \cdot \lambda_R^4 \quad (33)$$

Fator de Escala do Desbalanceamento (D):

$$\lambda_D = \lambda_m \cdot \lambda_R \quad (34)$$

Fator de Escala da Força Elástica no Eixo (F_{EE}):

$$\lambda_{FEE} = \lambda_L \cdot \lambda_\delta \quad (35)$$

Fator de Escala da Tensão Elétrica (V):

$$\lambda_V = \lambda_R \cdot \lambda_i \quad (36)$$

Fator de Escala da Força Magnética (F_{EM}):

$$\lambda_{FEM} = \frac{\lambda_R \cdot \lambda_{(N^2H)} \cdot \lambda_{ex} \cdot \lambda_i^2}{\lambda_e^3} \quad (37)$$

5. CONCLUSÕES

Tendo em vista que os 6 parâmetros ω , I , e , ex , i_r , K_l e D_l , são parâmetros controlados, uma vez que as suas magnitudes podem ser variadas de acordo com a necessidade do projeto, os Números Adimensionais e os Fatores de Escala relacionados, compostos por esses 6 parâmetros poderão também ser ajustados para atender aos requisitos de semelhança desejados.

Assim, o principal objetivo deste trabalho de descrever a dinâmica de um rotor resguardando a semelhança mecânica e elétrica pode ser alcançado se as variáveis controláveis do projeto se ajustarem de forma a garantir que os números Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 , π_5 , Π_6 sejam respeitados, uma vez que relacionam grandezas importantes para o fenômeno que se deseja estudar.

A semelhança assegurada pelo número Π_7 pode ser desconsiderada uma vez que ele expressa a relação entre a potência mecânica de entrada e a potência elétrica de saída no hidrogenador. Como a bancada experimental não visa representar a semelhança de potência entre o modelo e o protótipo, esse número Π pode ser desconsiderado sem comprometer a semelhança dinâmica do projeto. Com a abordagem apresentada, a semelhança mecânica e elétrica, no que concerne ao comportamento dinâmico do modelo, deverá conduzir a modos de vibração idênticos.

6. REFERÊNCIAS

- 6.1. CARNEIRO, Fernando L., *Análise Dimensional e Teoria da Semelhança e dos Modelos Físicos*. Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.
- 6.4. FEGHALI, Jaurès Paulo, *Mecânica dos Fluidos para estudantes de engenharia – Dinâmica*, vol.2. Editora Livros Técnico e Científicos S.A., Rio de Janeiro, GB, 1974.
- 6.5. WHITE, Frank M., *Mecânica dos Fluidos*. Editora McGraw – Hill, Rio de Janeiro, 1999.
- 6.6. MUNSON, Bruce R., YOUNG, Donald F., OKIISHI, Theodore H., *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*, Versão SI, vol. 1. Editora Edgard Blücher Ltda, 1997.

APPLICATION OF THE THEORIES OF DIMENSIONAL ANALYSIS AND SIMILARITY TO THE STUDY OF A HYDROGENERATOR

Késia Gomes de Sousa

Universidade de Brasília – UnB

skesia@hotmail.com

Márcio Lima da Silva

df.marcio@gmail.com

Mario Olavo Magno de Carvalho

molavo@unb.br

Cristiano Vila Serra Viana

cvsv@unb.br

Abstract: *This work develops the study of a hydrogenerator dynamic behavior, using a modeling methodology supported in criteria defined by dimensional analysis and similarity of the physical models. This study has the double purpose realize the conditions of project and operation for the units that had served as model, and to experimentally calibrate numerical models of simulation for the hydrogenerator dynamic behavior. In this work, a methodology for the construction of models reduced from real structures will be presented, in special for a hydrogenerator. Finally, the hypotheses to design the model are treated and the results analyzed.*

Keywords: *hydrogenerator, dynamic similarity, dimensional analysis, physical models.*