

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL COM TERMO FONTE SINGULAR POR INTERMÉDIO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS E/OU MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER – PARTE II

Flávia Cavalcanti Miranda

Laboratório de Transferência e Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos
Faculdade de Engenharia Mecânica / Universidade Federal de Uberlândia
e-mail: fcmiranda@mecanica.ufu.br

Santos Alberto Enriquez-Remigio

e-mail: remigio@mecanica.ufu.br

Aristeu da Silveira Neto

e-mail: aristeus@mecanica.ufu.br

Resumo: No Método da Fronteira Imersa, usado para o estudo de problemas de interação fluido-estrutura, a imposição da condição de contorno interna devido à presença da estrutura é modelada nas equações do fluido através de um termo fonte singular definido na interface. Se os pontos da interface coincidem com os pontos da solução das equações do fluido, o termo forçante é aplicado diretamente; caso contrário, um processo de distribuição é necessário. No presente estudo, para estudar a influência da função de distribuição na ordem da aproximação do método de solução usado, três diferentes funções de distribuição reportados na literatura foram empregados em um problema bem simplificado de fronteira imersa unidimensional: equação de difusão com termo fonte singular. Os métodos de discretização no espaço empregados neste trabalho são: método de diferenças finitas, método de diferenças finitas com transformada de Fourier discreta e método Pseudo-espectral de Fourier; no tempo, método explícito de Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados mostram: (1) o mínimo erro foi obtido quando se usou uma distribuição linear e (2) o método Pseudo-espectral de Fourier diminui a ordem para um.

Palavras-chave: método de diferenças finitas; transformada discreta de Fourier; método pseudo-espectral de Fourier, equação de difusão; aproximação de delta de Dirac.

1. INTRODUÇÃO

Um constante esforço é feito no desenvolvimento de metodologias numéricas simples, rápidas e de alta ordem de precisão para resolver diferentes tipos de equações diferenciais parciais. Por exemplo, no contexto de problemas de interação fluido-estrutura, Peskin (1972) apresentou uma modelagem matemática e um método numérico conhecido como o Método da Fronteira Imersa (MFI) que evita a imposição direta da condição de contorno interna devido à presença da estrutura, permitindo, assim, o uso de métodos eficientes para problemas com domínio fixo e simples.

No MFI um domínio retangular é considerado e a presença da estrutura imersa é modelada nas equações do fluido mediante um termo de força singular definida na interface. Uma das desvantagens do método da fronteira imersa é a perda da ordem de aproximação da solução numérica, reportados nos trabalhos desenvolvidos no contexto do método de diferenças finitas. Diferentes trabalhos são desenvolvidos com o intuito de manter a ordem do método empregado na aplicação do MFI (ver Beyer e Leveque (1992), Tornberg e Enquist (2003)).

Um processo computacionalmente caro na solução das equações do Método da Fronteira Imersa é a solução da equação do tipo Poisson para a pressão. Com o intuito de acelerar o processo de solução das equações do MFI, Mariano (1997) empregou um método Pseudo-espectral de Fourier. Os resultados mostraram bom comportamento quantitativo e qualitativo, assim como, a influência do uso do processo de distribuição e de filtro. Nas Figuras 1(a) e 1(b) apresentam-se as linhas de corrente do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante para o caso de uso de distribuição sem filtro e não distribuição com filtro, respectivamente. Observa-se que a solução obtida sem distribuição e filtro permite capturar as recirculações no lado direito inferior da cavidade presente neste fenômeno físico.

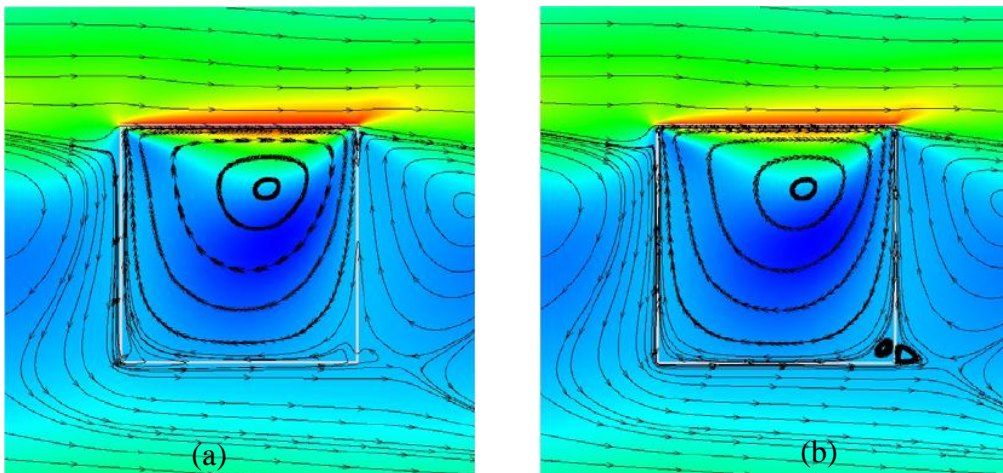


Figura 1: Linhas de corrente do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante: (a) usando somente distribuição e (b) usando somente filtro (Mariano, 2007).

Enriquez-Remigio *et al.* (2007), apresentaram um estudo numérico do comportamento de três metodologias numéricas na solução de uma equação de difusão com termo fonte singular. Os resultados mostraram a influência do termo fonte singular na diminuição da ordem do método pseudo-espectral para um, bem como a não alteração da ordem para os outros métodos. Nesse trabalho, considerou-se a localização do termo fonte coincidente com um nó da discretização espacial e o não uso de um processo de distribuição.

No presente trabalho apresenta-se uma continuação do desenvolvido por Enriquez-Remigio *et al.* (2007), no sentido de que considera-se três funções de distribuição para o termo fonte e não requerimento da localização do termo fonte com um nó da malha, que é o caso mais freqüente no MFI. Para tal, a apresentação do trabalho foi dividida deste modo: Seção 2, apresentação breve dos métodos numéricos usados; Seção 3, contém os resultados numéricos e na Seção 4, apresenta-se as conclusões.

2. METODOLOGIAS NUMÉRICAS

Três metodologias numéricas são usadas neste estudo: método de diferenças finitas (MDF), diferenças finitas com transformada de Fourier discreta (DF/TFD) e método pseudo-espectral de Fourier (MEF). As três metodologias calculam a solução em pontos discretos do intervalo de análise, $[a,b]$. Neste caso, considerou-se $N + 1$ pontos discretos, igualmente espaçados, denotados por $x_n = a + hn$, onde $n = 0, 1, \dots, N$, e $h = \frac{b-a}{N}$. Denota-se por f_n o valor de uma função, f , em x_n , isto é, $f_n = f(x_n)$.

Cada uma das metodologias aqui empregadas apresenta vantagens e desvantagens. Uma das principais vantagens do MEF sobre as outras é a alta ordem de aproximação em calcular a solução para sistemas de equações bem comportadas (Canuto, 1987).

2.1. Método de Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas tem como base a expressão em série de Taylor do valor de uma função em torno de um ponto. Por exemplo, as séries de Taylor para $u(x_n + h)$ e $u(x_n - h)$ são:

$$u(x_n + h) = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2!}u''(x_n) + O(h^3), \quad (1)$$

$$u(x_n - h) = u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2!}u''(x_n) + O(h^3). \quad (2)$$

Deve-se entender $O(h^3)$ por βh^3 , onde β é uma constante que depende do ponto x_n e da função u .

Usando-se as expressões anteriores podemos determinar as seguintes aproximações centradas de segunda ordem para a primeira e para a segunda derivada,

$$\frac{\partial u(x_n)}{\partial x} \approx \frac{u(x_n + h) - u(x_n - h)}{2h}, \quad \frac{\partial^2 u(x_n)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_n + h) - 2u(x_n) + u(x_n - h)}{h^2}.$$

A substituição dos operadores espaciais pelas respectivas aproximações nas equações a serem resolvidas determinam um sistema linear, caso o sistema seja linear. Se as aproximações centradas de segunda ordem são usadas, a solução apresenta convergência de segunda ordem.

2.2. Diferenças Finitas com Transformada de Fourier Discreta

Dada uma seqüência de N valores discretos, u_n , $n = 1, \dots, N$, a transformada de Fourier discreta direta e inversa podem ser definidas, respectivamente, por:

$$U_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3)$$

$$u_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} U_k e^{i \frac{2\pi nk}{N}}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4)$$

A mistura de MDF e TFD é no seguinte sentido: (a) aplica-se uma discretização baseada em diferenças finitas para os operadores espaciais; (b) o valor da função em cada nó é substituído pela Equação 4. Simplificando-se o sistema, e usando-se as propriedades de ortogonalidade das funções $e^{-i \frac{2\pi nk}{N}}$, se obtém um sistema linear de equações nas incógnitas U_k . Conhecido o valor de U_k , o valor de u_n é obtido pela Equação 3. O cálculo da transformada de Fourier discreta é feito pela Fast Fourier Transformation (FFT), (ver Briggs, 1995).

2.3. Método Pseudo-Espectral de Fourier

No método pseudo-espectral de Fourier a solução é expressa por:

$$u(x) = \sum_{k=1}^m a_k e^{ikx}. \quad (5)$$

Onde i é a unidade imaginária e m é o número de elementos considerados da família ortogonal $\{e^{ikx}\}$ (Canuto, 1987). Neste caso os cálculos da primeira e segunda derivada são, respectivamente:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \sum_{k=1}^m ika_k e^{ikx}, \quad \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^m -k^2 a_k e^{ikx}.$$

A determinação dos coeficientes a_k 's é feita pela condição da equação ser verdadeira nos nós do calculo, isto é, nos pontos x_n , $n = 1, \dots, N$ ($u_0 = u_n$, condição de contorno periódica); e nas propriedades de ortogonalidade discreta das funções $\left\{ e^{-i\frac{2\pi mk}{N}} \right\}$.

3. RESULTADOS

Os problemas aqui resolvidos são: um problema de difusão estacionário, Equação 6, e outro transiente, Equação 7; em todos os casos o intervalo de análise foi $[0, 2\pi]$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x). \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (7)$$

onde f representa o termo fonte singular e para os casos estacionário e transiente, respectivamente, tem a seguinte forma (Ver Enriquez-Remigio *et al.*, 2007):

$$f(x) = [u_x]_{x=0} \delta(x-0) + [u_x]_{\alpha} \delta(x-\alpha) + [u_x]_{2\pi} \delta(x-2\pi), \text{ (caso estacionário)} \quad (8)$$

$$f(x, t) = c(t, 0) \delta(x-0) + c(t, \alpha) \delta(x-\alpha) + c(t, 2\pi) \delta(x-2\pi), \text{ (caso transiente)} \quad (9)$$

onde: $[u_x]_{\alpha} = u_x^+|_{\alpha} - u_x^-|_{\alpha}$, salto na primeira derivada no ponto α ; $c(t, \alpha) = -[u_x]_{\alpha}$. e, $\delta(x-\alpha)$ é o delta de Dirac em α .

Neste trabalho a seguinte aproximação para o delta de Dirac foi adotada: $\frac{1}{h} \phi\left(\frac{x}{h}\right)$, onde ϕ é uma das seguintes funções: ϕ^1 (Peskin, 1972), ϕ^2 (Peskin e McQueen, 1995) e ϕ^3 (Beyer e Leveque, 1992).

$$\phi^1(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) \right) & \text{se } |r| \leq 2, \\ 0 & \text{se } |r| > 2, \end{cases} \quad \phi^3(r) = \begin{cases} 1 - |r| & \text{se } |r| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |r| > 1, \end{cases}$$

$$\phi^2(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2} \right) & \text{se } |r| \leq 1, \\ \frac{1}{8} \left(5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2} \right) & \text{se } 1 \leq |r| \leq 2, \\ 0 & \text{se } |r| > 2, \end{cases}$$

Neste trabalho, o MDF e o DF/TFD usam aproximações centradas de segunda ordem. No caso do problema transiente, a solução no tempo foi baseada no método explícito Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de tempo dado por $dt = \frac{1}{5}h^2$. Todos os resultados para este caso, problema transiente, que são mostrados a seguir foram para o tempo de 0,1 s.

Nos seguintes itens apresenta-se resultados obtidos com as funções de distribuição ϕ^1 e ϕ^3 , os resultados com ϕ^2 não são apresentados por serem iguais aos obtidos para a ϕ^1 .

3.1. Caso I: Termo Fonte Localizado em um Ponto Coincidente com um Nó da Malha

3.1.1 Problema estacionário

Para este caso, a termo fonte foi localizado em $x = \pi$ e calculado pela Equação 8. A solução exata é dada por:

$$u(x) = \begin{cases} 5x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \\ 10\pi\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases} \quad (10)$$

Na Tabela 1, apresenta-se a norma máxima dos erros obtidos, usando-se os três métodos e a função de distribuição ϕ^1 . Observa-se que conforme se duplica o número de nós, a razão das normas para os três métodos converge para 2, indicando um comportamento de métodos de primeira ordem. Além disso, os erros maiores foram obtidos com o MEF.

Tabela 1: Norma dos erros para o problema estacionário com malha coincidente empregando distribuição ϕ^1 .

| Nº de nós | MDF | | MEF | | DF/TFD | |
|-----------|--------------------------|-------|--------------------------|-------|--------------------------|-------|
| | $\ \text{erro}\ _\infty$ | razão | $\ \text{erro}\ _\infty$ | razão | $\ \text{erro}\ _\infty$ | razão |
| 16 | 1,96 | | 2,31 | | 1,96 | |
| 32 | $9,82 \cdot 10^{-1}$ | 1,99 | 1,16 | 1,99 | $9,82 \cdot 10^{-1}$ | 1,99 |
| 64 | $4,91 \cdot 10^{-1}$ | 2,00 | $5,79 \cdot 10^{-1}$ | 2,00 | $4,91 \cdot 10^{-1}$ | 2,00 |
| 128 | $2,45 \cdot 10^{-1}$ | 2,00 | $2,89 \cdot 10^{-1}$ | 2,00 | $2,45 \cdot 10^{-1}$ | 2,00 |
| 256 | $1,23 \cdot 10^{-1}$ | 1,99 | $1,45 \cdot 10^{-1}$ | 1,99 | $1,23 \cdot 10^{-1}$ | 1,99 |

A norma máxima dos erros associados ao uso da função de distribuição ϕ^3 são mostrados na Tabela 2. Neste caso, o MEF continua apresentando comportamento de primeira ordem, enquanto que o MDF e o DF/TFD apresentam alta ordem de aproximação. Note-se que os menores erros foram obtidos com o MDF, seguido do método DF/TFD com erros levemente maiores; e semelhantemente à experiência obtida com a ϕ^1 , o MEF apresentou os erros maiores.

Tabela 2: Norma dos erros para o problema estacionário com malha coincidente empregando distribuição ϕ^3

| Nº de nós | MDF | MEF | razão | DF/TFD |
|-----------|--------------------------|--------------------------|-------|--------------------------|
| | $\ \text{erro}\ _\infty$ | $\ \text{erro}\ _\infty$ | | $\ \text{erro}\ _\infty$ |
| 16 | $4,44 \cdot 10^{-15}$ | $7,92 \cdot 10^{-1}$ | | $5,32 \cdot 10^{-15}$ |
| 32 | $3,55 \cdot 10^{-14}$ | $3,97 \cdot 10^{-1}$ | 1,99 | $1,06 \cdot 10^{-14}$ |
| 64 | $1,28 \cdot 10^{-13}$ | $1,99 \cdot 10^{-1}$ | 1,99 | $1,15 \cdot 10^{-13}$ |
| 128 | $9,41 \cdot 10^{-14}$ | $9,94 \cdot 10^{-2}$ | 2,00 | $1,40 \cdot 10^{-13}$ |

A partir das tabelas 1 e 2, pode-se observar que a ordem de grandeza dos erros usando o MDF e o DF/TFD e a função ϕ^1 é 10^{-1} , enquanto que as obtidas com a ϕ^3 são da ordem 10^{-14} .

Na Figura 2 apresenta-se os gráficos das soluções aproximadas pelos três métodos, assim como a solução exata. Observa-se que as soluções aproximadas usando a função de distribuição ϕ^1 , Figura 2-(a), apresentam ligeiras diferenças perto dos extremos do intervalo de solução, enquanto que o uso da ϕ^3 evita tal problema (Figura 2-(b)).

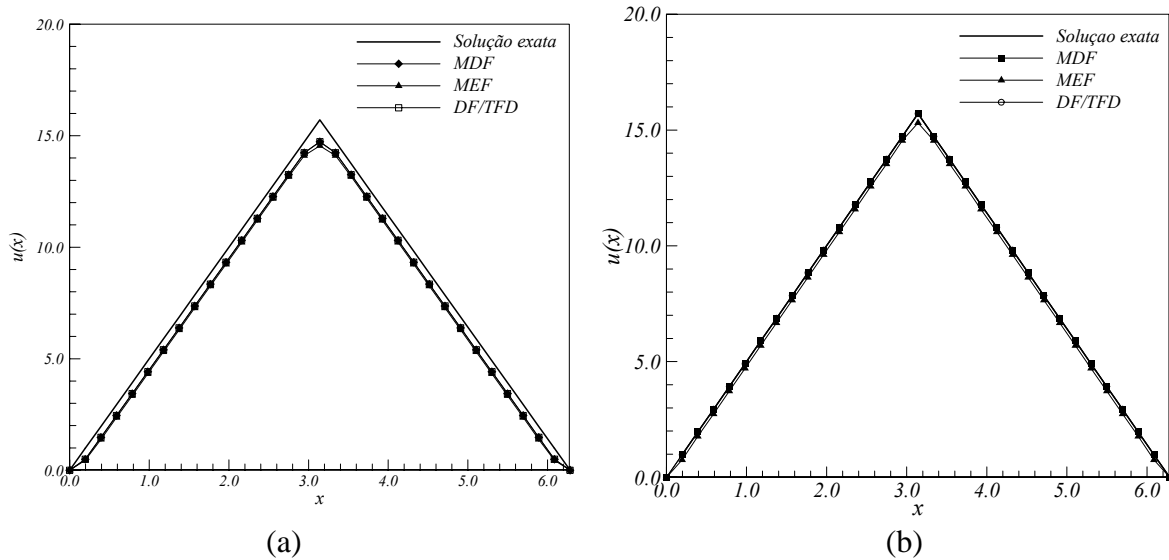


Figura 2: Soluções aproximadas e solução exata do problema estacionário com malha coincidente e empregando (a) ϕ^1 e (b) ϕ^3 .

3.1.2 Problema transiente

A solução exata é dada pela equação:

$$u_e(x) = \begin{cases} \text{sen}(x)e^{-t} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \\ \text{sen}(2\pi - x)e^{-t} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases} \quad (11)$$

com condição inicial: $u(x,0) = u_e(x,0)$, e condição de contorno: $u_e(0,t) = u_e(2\pi,t)$, $\forall t > 0$. Tal solução exata apresenta um salto na primeira derivada no ponto $x = \pi$, modelado nas equações pelo termo fonte dado pela Equação 9.

Nas tabelas 3 e 4 mostra-se a norma máxima dos erros, usando a função de distribuição ϕ^1 e ϕ^3 , respectivamente. Observa-se que independentemente da função de distribuição, o MEF comporta-se como um método de primeira ordem. No caso do MDF e DF/TFD, o uso da função ϕ^1 diminui a ordem do método, enquanto que a distribuição ϕ^3 permite manter a ordem.

Tabela 3: Norma dos erros para o problema transiente com malha coincidente empregando distribuição ϕ^1 .

| N° de nós | MDF | razão | MEF | razão | DF/TFD | razão |
|-----------|----------------------------|-------|----------------------------|-------|----------------------------|-------|
| | $\ \text{erro} \ _\infty$ | | $\ \text{erro} \ _\infty$ | | $\ \text{erro} \ _\infty$ | |
| 16 | $1,03 \cdot 10^{-1}$ | | $1,73 \cdot 10^{-1}$ | | $1,44 \cdot 10^{-1}$ | |
| 32 | $7,23 \cdot 10^{-2}$ | 1,42 | $9,99 \cdot 10^{-2}$ | 1,73 | $8,75 \cdot 10^{-2}$ | 1,64 |
| 64 | $4,04 \cdot 10^{-2}$ | 1,79 | $5,23 \cdot 10^{-2}$ | 1,91 | $4,44 \cdot 10^{-2}$ | 1,97 |
| 128 | $2,12 \cdot 10^{-2}$ | 1,90 | $2,63 \cdot 10^{-2}$ | 1,99 | $2,22 \cdot 10^{-2}$ | 2,00 |

Tabela 4: Norma dos erros para o problema transiente com malha coincidente empregando distribuição ϕ^3 .

| N° de nós | MDF | | MEF | | DF/TFD | |
|-----------|------------------------------|-------|------------------------------|-------|------------------------------|-------|
| | $\ \text{erro} \ _{\infty}$ | razão | $\ \text{erro} \ _{\infty}$ | razão | $\ \text{erro} \ _{\infty}$ | razão |
| 16 | $7,37 \cdot 10^{-3}$ | | $7,43 \cdot 10^{-2}$ | | $8,51 \cdot 10^{-3}$ | |
| 32 | $2,03 \cdot 10^{-3}$ | 3,63 | $3,99 \cdot 10^{-2}$ | 1,86 | $2,31 \cdot 10^{-3}$ | 3,68 |
| 64 | $5,16 \cdot 10^{-4}$ | 3,93 | $2,01 \cdot 10^{-2}$ | 1,98 | $5,88 \cdot 10^{-4}$ | 3,93 |
| 128 | $1,29 \cdot 10^{-4}$ | 4,00 | $1,00 \cdot 10^{-2}$ | 2,00 | $1,48 \cdot 10^{-4}$ | 3,97 |

Os gráficos das soluções aproximadas e da solução exata, usando ϕ^1 e ϕ^3 , são mostradas na Figura 3-(a) e 3-(b), respectivamente. Observa-se que como no caso estacionário, o uso da distribuição ϕ^1 altera ligeiramente a solução nos extremos do intervalo de cálculo, enquanto que isto não acontece com a ϕ^3 .

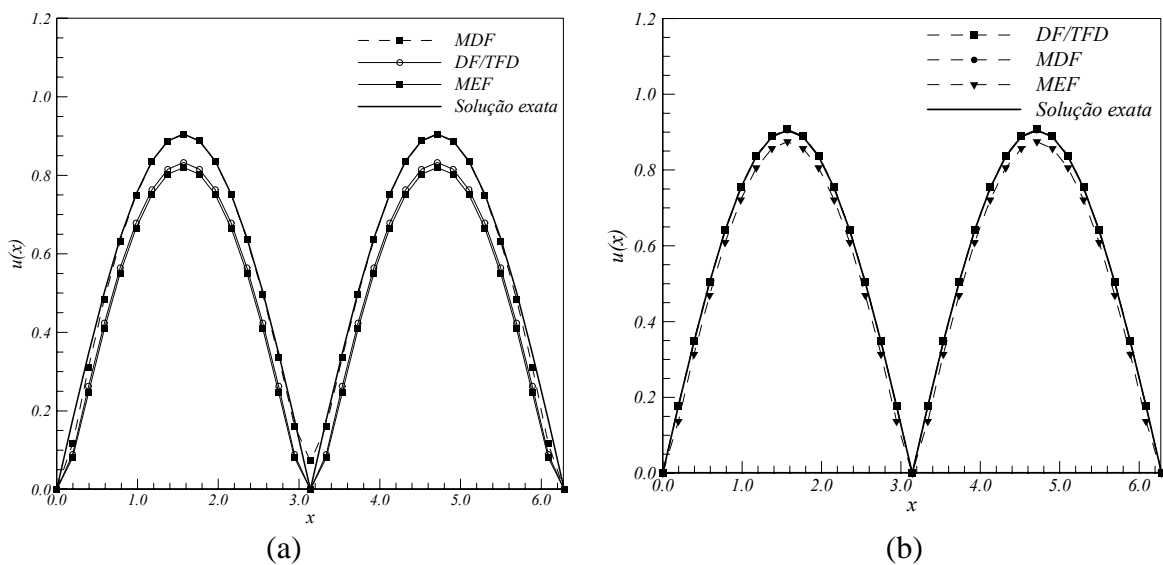


Figura 3: Soluções aproximadas e solução exata do problema transiente com malha coincidente e empregando (a) ϕ^1 e (b) ϕ^3 .

3.2. Caso II: Termo Fonte Localizado em um Ponto Não Coincidente com os Nós da Malha

3.2.1 Problema estacionário

Para este problema o termo fonte singular, dado pela Equação 8, foi localizado no ponto $x = \frac{383}{384} \pi$, não coincidindo assim com os nós na malha e a solução exata é dada por:

$$u(x) = \begin{cases} 5x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{383}{384} \pi, \\ \frac{383}{77} (2\pi - x) & \text{se } \frac{383}{384} \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases} \quad (12)$$

A norma máxima dos erros associados ao uso da função de distribuição ϕ^1 e ϕ^3 é apresentada nas tabelas 5 e 6, respectivamente. Nota-se que de modo independente da função de distribuição, o método MEF comporta-se como um método de primeira ordem, enquanto que para os métodos MDF e DF/TFD, a escolha da função de distribuição influencia na ordem do método: primeira ordem usando ϕ^1 e alta ordem usando ϕ^3 .

Observando-se as tabelas 5 e 6, os erros do MEF usando ϕ^3 são pelo menos duas vezes menores que os obtidos usando-se ϕ^1 ; no caso do MDF e DF/TFD tal diferença ainda é maior: os erros usando ϕ^3 é 10^{-10} vezes menor que os obtidos com a função ϕ^1 .

Tabela 5: Norma dos erros para o problema estacionário com malha não coincidente empregando distribuição ϕ^1 .

| Nº de nós | MDF | | MEF | | DF/TFD | |
|-----------|------------------------------|-------|------------------------------|-------|------------------------------|-------|
| | $\ \text{erro} \ _{\infty}$ | razão | $\ \text{erro} \ _{\infty}$ | razão | $\ \text{erro} \ _{\infty}$ | razão |
| 16 | 1,92 | | 2,27 | | 1,92 | |
| 32 | $9,39 \cdot 10^{-1}$ | 2,04 | 1,11 | 2,04 | $9,39 \cdot 10^{-1}$ | 2,04 |
| 64 | $4,51 \cdot 10^{-1}$ | 2,08 | $5,38 \cdot 10^{-1}$ | 2,06 | $4,51 \cdot 10^{-1}$ | 2,08 |
| 128 | $2,08 \cdot 10^{-1}$ | 2,16 | $2,51 \cdot 10^{-1}$ | 2,14 | $2,08 \cdot 10^{-1}$ | 2,16 |
| 256 | $8,98 \cdot 10^{-2}$ | 2,32 | $1,11 \cdot 10^{-1}$ | 2,26 | $8,98 \cdot 10^{-2}$ | 2,32 |

Tabela 6: Norma dos erros para o problema estacionário com malha não coincidente empregando distribuição ϕ^3 .

| Nº de nós | MDF | MEF | razão | DF/TFD |
|-----------|------------------------------|------------------------------|-------|------------------------------|
| | $\ \text{erro} \ _{\infty}$ | $\ \text{erro} \ _{\infty}$ | | $\ \text{erro} \ _{\infty}$ |
| 16 | $3,55 \cdot 10^{-15}$ | $7,80 \cdot 10^{-1}$ | | $3,55 \cdot 10^{-15}$ |
| 32 | $1,95 \cdot 10^{-14}$ | $3,87 \cdot 10^{-1}$ | 2,01 | $1,60 \cdot 10^{-14}$ |
| 64 | $1,63 \cdot 10^{-13}$ | $1,89 \cdot 10^{-1}$ | 2,05 | $1,30 \cdot 10^{-13}$ |
| 128 | $7,10 \cdot 10^{-14}$ | $9,90 \cdot 10^{-2}$ | 1,91 | $1,90 \cdot 10^{-13}$ |
| 256 | $5,64 \cdot 10^{-13}$ | $4,04 \cdot 10^{-2}$ | 2,45 | $1,30 \cdot 10^{-12}$ |

Na Figura 4, apresentam-se as curvas das soluções aproximadas pelos três métodos e da solução exata. Igualmente aos resultados de fonte coincidente com um nó da discretização, tem-se que a função ϕ^1 produz uma solução levemente diferente nos extremos do intervalo (Figura 4-(a)).

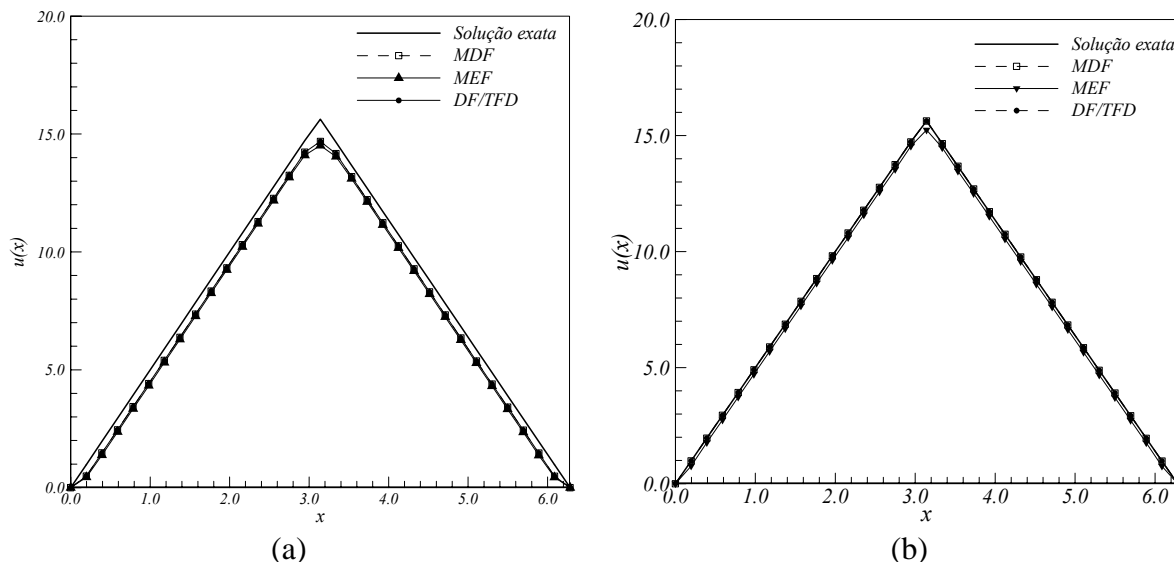


Figura 4: Soluções aproximadas e solução exata do problema estacionário com malha não coincidente e empregando (a) ϕ^1 e (b) ϕ^3

3.2.2 Problema transiente.

Neste caso, o termo fonte singular está localizado no ponto $x = \frac{2\pi}{3}$ e calculado pela Equação 9. A solução exata é dado por:

$$u(x) = \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)e^{-\frac{9}{4}t} & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}x\right)e^{-\frac{9}{16}t} & \text{se } \frac{2\pi}{3} < x \leq 2\pi, \end{cases} \quad (13)$$

com condição inicial: $u(x,0) = u_e(x,t)$, e condição de contorno: $u_e(0,t) = u_e(2\pi,t)$, $\forall t > 0$.

Para a função ϕ^1 , os erros para os três métodos são apresentados na Tabela 7, mostrando um comportamento de primeira ordem. De modo semelhante aos resultados para problemas transientes com termo fonte localizado em um nó da discretização, os maiores erros foram obtidos com o MEF, seguido do DF/TFD e do MDF, constando este último, dos menores erros.

Tabela 7: Norma dos erros para o problema transiente com malha não coincidente empregando distribuição ϕ^1 .

| Nº de nós | MDF | | MEF | | DF/TFD | |
|-----------|--------------------------|-------|--------------------------|-------|--------------------------|-------|
| | $\ \text{erro}\ _\infty$ | razão | $\ \text{erro}\ _\infty$ | razão | $\ \text{erro}\ _\infty$ | razão |
| 16 | $7,64 \cdot 10^{-2}$ | | $1,84 \cdot 10^{-1}$ | | $1,52 \cdot 10^{-1}$ | |
| 32 | $6,45 \cdot 10^{-2}$ | 1,18 | $1,06 \cdot 10^{-1}$ | 1,73 | $9,25 \cdot 10^{-2}$ | 1,64 |
| 64 | $3,97 \cdot 10^{-2}$ | 1,62 | $5,53 \cdot 10^{-2}$ | 1,92 | $4,68 \cdot 10^{-2}$ | 1,98 |
| 128 | $2,16 \cdot 10^{-2}$ | 1,84 | $2,78 \cdot 10^{-2}$ | 1,99 | $2,36 \cdot 10^{-2}$ | 1,98 |

Os erros obtidos com termo fonte distribuído segundo a função ϕ^3 são apresentados na Tabela 8. Nessa tabela, observa-se que o método MEF continua apresentando comportamento de primeira ordem, enquanto que o MDF e o DF/TFD mantêm a segunda ordem.

Tabela 8: Norma dos erros para o problema transiente com malha não coincidente empregando distribuição ϕ^3 .

| Nº de nós | MDF | | MEF | | DF/TFD | |
|-----------|--------------------------|-------|--------------------------|-------|--------------------------|-------|
| | $\ \text{erro}\ _\infty$ | razão | $\ \text{erro}\ _\infty$ | razão | $\ \text{erro}\ _\infty$ | razão |
| 16 | $4,86 \cdot 10^{-3}$ | | $7,62 \cdot 10^{-2}$ | | $1,75 \cdot 10^{-2}$ | |
| 32 | $1,28 \cdot 10^{-3}$ | 3,80 | $4,19 \cdot 10^{-2}$ | 1,82 | $4,72 \cdot 10^{-3}$ | 3,71 |
| 64 | $3,21 \cdot 10^{-4}$ | 3,99 | $2,11 \cdot 10^{-2}$ | 1,98 | $1,20 \cdot 10^{-3}$ | 3,93 |
| 128 | $8,06 \cdot 10^{-5}$ | 3,98 | $1,06 \cdot 10^{-2}$ | 1,99 | $3,00 \cdot 10^{-4}$ | 4,00 |

Comparando os erros mostrados nas Tabelas 7 e 8, observa-se que o uso de ϕ^3 permite obter menores erros que os obtidos com a função ϕ^1 .

Na Figura 6-(a) e (b) apresenta-se os gráficos das soluções aproximadas usando a função de distribuição ϕ^1 e ϕ^3 e a solução exata, respectivamente. Observa-se na Figura 6-(a), que o método MDF aproxima-se mais da solução exata. Por outro lado, na Figura 6-(b), a solução obtida por intermédio do método Pseudo-espectral de Fourier apresenta um perfil mais distante da solução exata.

Similarmente ao observado nas outras experiências numéricas, o uso da função de distribuição não linear, ϕ^1 , produz uma solução levemente diferente do esperado nos extremos do intervalo.

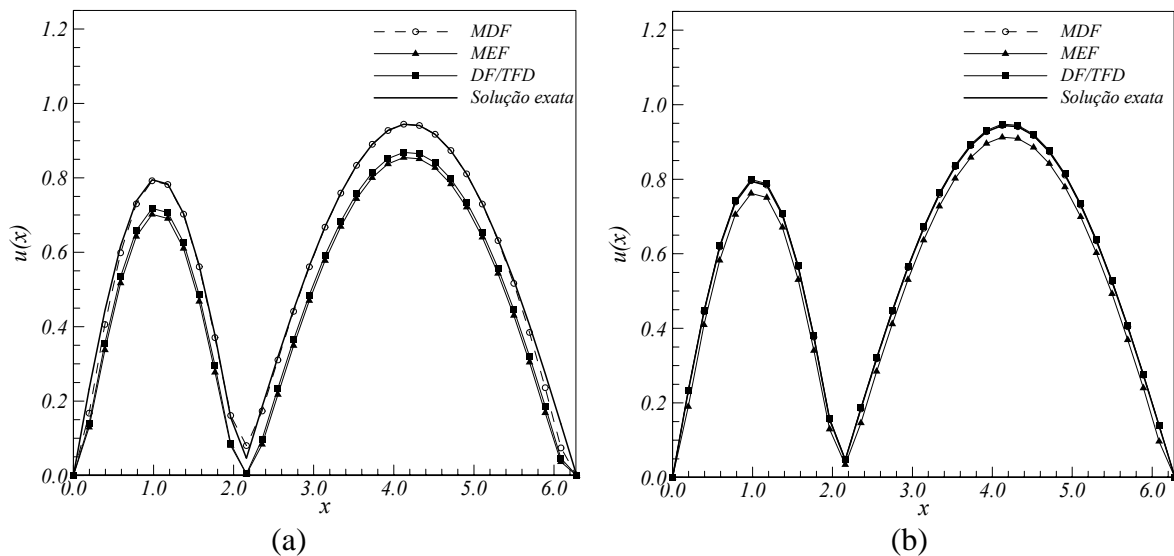


Figura 6: Soluções aproximadas e solução exata do problema transiente com malha não coincidente e empregando (a) ϕ^1 e (b) ϕ^3

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se um estudo comparativo da influência da função de distribuição na ordem da aproximação do método de solução usado na equação de difusão com termo fonte singular (localizado em um ponto coincidente ou não com um nó da malha). Três métodos de discretização no espaço foram usados: diferenças finitas, método de diferenças finitas com transformada de Fourier discreta e método Pseudo-espectral de Fourier; assim como três diferentes funções de distribuição: ϕ^1 , ϕ^2 e ϕ^3 . Os resultados mostraram:

- (1) as funções ϕ^1 e ϕ^2 produzem os mesmos resultados independentemente do problema resolvido (não apresentados no trabalho), com uma diferença na ordem de 10^{-4} em malhas a partir de nós maiores ou iguais a 256;
- (2) em cada problema resolvido, os menores erros foram obtidos usando-se a função de distribuição linear ϕ^3 ;
- (3) em cada caso, o MDF apresentou os menores erros, seguido do DF/TFD;
- (4) o uso da função de distribuição ϕ^1 nos métodos MDF e DF/TDF, fez com que os resultados apresentassem um comportamento de primeira ordem, enquanto que o uso da função ϕ^3 , permitiu manter ou acrescentar a ordem;
- (5) o método Pseudo-espectral apresentou comportamento de primeira ordem independentemente da experiência numérica e da função de distribuição, com erros menores usando a função de distribuição ϕ^3 ; e
- (6) o uso da função de distribuição ϕ^1 , nos problemas apresentados fez com que as soluções aproximadas perto dos extremos do intervalo mostrassem um perfil levemente diferente da solução exata.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a FAPEMIG e ao CNPq pelo apoio financeiro no desenvolvimento do trabalho.

6. REFERÊNCIAS

Beyer, R. P. and Leveque, R. J., 1992, "Analysis of a One-Dimensional Model for the Immersed Boundary Method", SIAM J. Numer. Anal., vol 20(2), pp.332-364.

- Briggs, W. L., Henson, V. E., 1995, "The DFT", SIAM, Philadelphia, 1. ed.
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., Zang, T. A., 1987, "Spectral Methods in Fluid Dynamics", Springer-Verlang, N. Y.
- Enriquez-Remigio, S. A., Miranda, F. C. Silveira Neto, A., 2007. "Solução Numérica da Equação de Difusão Unidimensional com Termo Fonte Singular por Intermédio do Método de Diferenças finitas e/ou Método Pseudo-espectral Fourier – Parte I", VII Encontro regional de matemática aplicada e computacional (ERMAC), Universidade Federal de Uberlândia.
- Mariano, F. P., 2007, "Simulação de Escoamentos Não-Periódicos Utilizando as Metodologias Pseudo-Espectral e da Fronteira Imersa Acopladas", Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia.
- Peskin, C. S., 1972, "Flow Patterns Around Heart Valves: a Numerical Method", Journal of Computational Physics, vol 10, pp. 252-271.
- Tornberg, A-K., Engquist, B., 2003, "Regularization Techniques for Numerical Approximation of PDEs with Singularities", J. Scientific computing, vol 19, pp. 527-551.
- Peskin, C. S. e McQueen, D. M., 1995, A General Method For The Computer Simulation Of Biological Systems Interacting With Fluids. Symposia of the Society for Experimental Biology, 49: 265-276.

NUMERICAL SOLUTION OF THE ONE-DIMENSIONAL DIFFUSION EQUATION WITH SINGULAR FORCING TERM BY FINITE DIFFERENCE METHOD AND/OR FOURIER PSEUDO-SPECTRAL METHOD- PART II

Flávia Cavalcanti Miranda

School of Mechanical Engineering
Federal University of Uberlândia
e-mail: fcmiranda@mecanica.ufu.br

Santos Alberto Enriquez-Remigio

e-mail: remigio@mecanica.ufu.br

Aristeu da Silveira Neto

e-mail: aristeus@mecanica.ufu.br

Abstract: *In the Immersed Boundary Method, used for the study of interaction fluid-structure problems, the imposition of intern boundary condition due to presence of the structure is shaped in the equations of fluid through of a singular forcing term defined in the interface. If interface points coincide with solution points of fluid equations then the forcing term is directly applied, in another case, a distribution process is necessary. In this work, to study the influence of the distribution function on the accuracy order of the solution method used, three different distribution functions reported in Literature were used in the simplified problem of one-dimensional immersed boundary: diffusion equation with a singular forcing term. The methods of space discretization used in this work are: finite difference method, finite difference method with discrete Fourier transform and Pseudo-spectral method of Fourier; in the time, fourth order explicit Runge-Kutta method. The results shown: (1) the minimum error it is obtained when it is used a linear distribution function and (2) the Pseudo-spectral method is changed into a first order method.*

Keywords: *finite difference method, discrete Fourier transform, Pseudo-spectral method of Fourier, diffusion equation, Dirac delta approximation.*