



## ANÁLISE DINÂMICA DE ROTORES UTILIZANDO O MODELO $C^0$ DE VIGA DE TIMOSHENKO

### **Eduardo Afonso Ribeiro**

UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Av. Sete de Setembro, 3165, Curitiba, PR, Brasil  
eduardo\_a\_ribeiro@yahoo.com.br

### **Aleksander Kokot**

aleksander\_kokot@hotmail.com

### **Angelo Paulucci de Carvalho**

angelopc@gmail.com

### **Carlos Alberto Bavastrri**

bavastrri@utfpr.edu.br

### **Jucélio Tomás Pereira**

jucelio@utfpr.edu.br

### **Marco Antonio Luersen**

luersen@utfpr.edu.br

**Resumo:** Na modelagem numérica do comportamento dinâmico de rotores são empregados, usualmente, para a representação do eixo, elementos finitos de viga com funções de interpolação de continuidade  $C^1$  (polinômios de Hermite). Com essas funções modela-se vigas de Euler-Bernoulli (vigas e eixos finos). Ainda utilizando funções do tipo  $C^1$  pode-se adaptar a formulação para a modelagem de viga de Timoshenko, que considera o efeito do cisalhamento transversal, através da utilização de um fator de correção na matriz de rigidez. A análise utilizando a teoria de Timoshenko é aplicada à vigas e eixos moderadamente espessos, quando o efeito do cisalhamento transversal e da inércia rotacional tornam-se importantes. O presente trabalho apresenta a formulação de elementos finitos de viga de Timoshenko utilizando funções de interpolação quadráticas de continuidade  $C^0$ , onde o deslocamento transversal e a inclinação da seção transversal são interpolados de forma independente. Exemplos numéricos de análise de rotores são apresentados e discutidos, e os resultados são comparados com aqueles utilizando as formulações clássicas de Euler-Bernoulli e Timoshenko com funções de interpolação de classe  $C^1$ .

**Palavras-chave:** dinâmica de rotores, elementos finitos, teoria de viga de Timoshenko

## 1. INTRODUÇÃO

Vibração é um fenômeno muito freqüente em equipamentos mecânicos, podendo causar danos, ruídos ou mau funcionamento do sistema. Em máquinas que operam em ciclos, principalmente máquinas rotativas, a estrutura pode atingir as suas freqüências naturais, causando o fenômeno da ressonância que é o aumento das amplitudes de vibração. Logo, é importante predizer com precisão estas freqüências e estudar detalhadamente o comportamento destes equipamentos.

Para modelar o eixo, principal componente de um rotor, geralmente se utiliza a teoria de viga Euler Bernoulli, a qual é válida para vigas com dimensões de seções transversais pequenas se comparadas com o comprimento. Com objetivo de tornar esta teoria mais abrangente para vigas mais espessas, um fator de correção para o cisalhamento é considerado. Porém, pode-se utilizar a teoria de viga de Timoshenko, que é mais consistente e considera a influência do cisalhamento. E então, obtém-se mais precisão no modelo de vigas finas e robustas, principalmente para o estudo em altas frequências.

O objetivo deste artigo é estudar as rotações críticas, em estruturas estáticas ou operando a elevadas rotações. Eixos finos e robustos são analisados aplicando a Teoria de Timoshenko. Com o estudo, objetiva-se modificar o código computacional existente Rotordin, através da adição da formulação desenvolvida.

## 2. MATRIZES ELEMENTARES

A modelagem numérica de um rotor tem algumas etapas a serem seguidas, iniciando-se pela obtenção das energias cinética ( $T$ ) e potencial de deformação ( $U$ ) e as forças generalizadas atuando no sistema ( $F_{q_i}$ ). Elas serão responsáveis pela caracterização de sua massa, rigidez e trabalho virtual respectivamente. Um método numérico de resolução deve ser então escolhido, sendo que nesse trabalho será utilizado o Método dos Elementos Finitos, baseado na teoria de viga de Timoshenko. E, finalmente, para a obtenção das equações gerais do rotor, aplica-se a equação de Lagrange (Lalanne and Ferraris, 1990), Equação 1, tendo em vista que  $q_i$  são os graus de liberdade e  $\dot{q}_i$  denota os graus de liberdade diferenciados uma vez no tempo.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (1)$$

Para a modelagem numérica do rotor, será utilizado um elemento finito de eixo de comprimento  $L$ , com a origem do sistema de referência localizado em seu centro. Foram realizadas formulações numéricas para elementos linear e quadrático, será apresentada aqui somente a aproximação quadrática para o problema. Assim, o correspondente elemento possui três nós e quatro graus de liberdade por nó, conforme mostra a Figura 1.

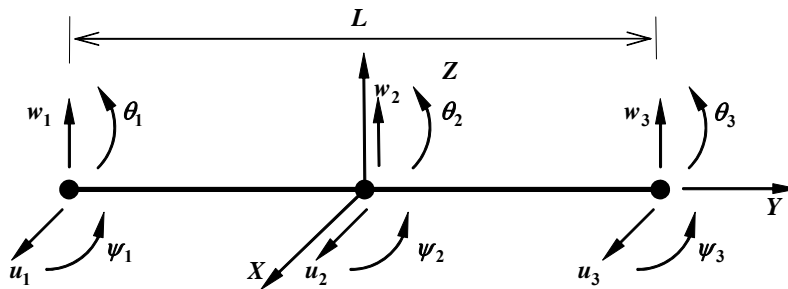


Figura 1: Representação do sistema de referência e dos graus de liberdade para o elemento finito de viga de 3 nós.

A equação do movimento para um elemento finito será obtida ao se aplicar as equações de Lagrange. Esta equação tem a seguinte forma,

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{G}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{F}_q\}, \quad (2)$$

onde  $[\mathbf{M}]$  é a matriz de inércia,  $\{\ddot{\mathbf{q}}\}$  o vetor de acelerações nodais,  $[\mathbf{G}]$  a matriz giroscópica,  $\{\dot{\mathbf{q}}\}$  o vetor de velocidades nodais,  $[\mathbf{K}]$  a matriz de rigidez,  $\{\mathbf{q}\}$  o vetor de deslocamentos nodais e  $\{\mathbf{F}_q\}$  o vetor de forças nodais generalizadas. Note que o efeito do amortecimento estrutural do eixo não foi considerado, mas pode ser facilmente introduzido no equacionamento (Lalanne e Ferraris, 1990).

## 2.1. Matriz de rigidez

Tomando-se a representação apresentada na Figura 1 e aproximando as funções deslocamento através de deslocamentos nodais e das funções de interpolação  $N_i$ , tem-se

$$q(y) = N_1(y)q_1 + N_2(y)q_2 + N_3(y)q_3 = [N_1(y) \quad N_2(y) \quad N_3(y)] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{q}\}, \quad (3)$$

onde  $q_i$  representa os valores dos deslocamentos nodais ( $u_i$ ,  $w_i$ ,  $\theta_i$  ou  $\psi_i$ ) com  $i = (1, 2, 3)$ ,  $\{\mathbf{q}\}$  os deslocamentos nodais representados em forma de vetor e  $\{\mathbf{N}\}$  o vetor das funções quadráticas de interpolação para o elemento, dado por (Bathe, 1982)

$$\{\mathbf{N}\} = \begin{Bmatrix} N_1(y) \\ N_2(y) \\ N_3(y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{y}{L} \left(1 - \frac{2y}{L}\right) \\ 1 - \left(\frac{2y}{L}\right)^2 \\ \frac{y}{L} \left(1 + \frac{2y}{L}\right) \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

A equação da energia potencial de deformação do eixo (Lalanne e Ferraris, 1990) tomada em forma matricial é dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial \theta(y)}{\partial y} \right)^T EI_x \left( \frac{\partial \theta(y)}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right)^T EI_z \left( \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} \right) dy + \\ + \frac{1}{2} \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left( -\psi(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right)^T GS \left( -\psi(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial y} \right) dy + \\ + \frac{1}{2} \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left( -\theta(y) + \frac{\partial w(y)}{\partial y} \right)^T GS \left( -\theta(y) + \frac{\partial w(y)}{\partial y} \right) dy, \quad (5)$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento finito,  $E$  o módulo de elasticidade,  $I_x$  e  $I_z$  os momentos de inércia de área referentes aos eixos  $X$  e  $Z$  respectivamente,  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $S$  a área da seção transversal.

Introduzindo a Equação 3 na Equação 5, fazendo a consideração de que o eixo possui seção transversal circular, com isso  $I_x = I_z = I$ , aplicando as derivações e rearranjando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial}{\partial y} (\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\theta}\}) \right)^T EI \left( \frac{\partial}{\partial y} (\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\theta}\}) \right) dy + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial}{\partial y} (\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\psi}\}) \right)^T EI \left( \frac{\partial}{\partial y} (\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\psi}\}) \right) dy + \\
& + \frac{1}{2} \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left( -\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\psi}\} - \frac{\partial}{\partial y} (\{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{u}\}) \right)^T GS \left( -\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\psi}\} - \frac{\partial}{\partial y} (\{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{u}\}) \right) dy + \\
& + \frac{1}{2} \mu \int_{-L/2}^{L/2} \left( -\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\theta}\} + \frac{\partial}{\partial y} (\{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{w}\}) \right)^T GS \left( -\{\mathbf{N}\}^T \{\boldsymbol{\theta}\} + \frac{\partial}{\partial y} (\{\mathbf{N}\}^T \{\mathbf{w}\}) \right) dy
\end{aligned} \tag{6}$$

Aplicando agora as derivações, e rearranjando, tem-se,

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\theta}\}^T \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{B}\} \{\mathbf{B}\}^T EI_x dy}_{\mathbf{K}^1} \{\boldsymbol{\theta}\} + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\psi}\}^T \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{B}\} \{\mathbf{B}\}^T EI_z dy}_{\mathbf{K}^2} \{\boldsymbol{\psi}\} + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\psi}\}^T \mu \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{N}\}^T GS dy}_{\mathbf{K}^3} \{\boldsymbol{\psi}\} + \\
& + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\psi}\}^T \mu \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{B}\}^T GS dy}_{\mathbf{K}^4} \{\mathbf{u}\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}^T \mu \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{B}\} \{\mathbf{N}\}^T GS dy}_{\mathbf{K}^5} \{\boldsymbol{\psi}\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}^T \mu \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{B}\} \{\mathbf{B}\}^T GS dy}_{\mathbf{K}^6} \{\mathbf{u}\} + \\
& + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\theta}\}^T \mu \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{N}\}^T GS dy}_{\mathbf{K}^7} \{\boldsymbol{\theta}\} + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\theta}\}^T \underbrace{\left( -\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{B}\}^T GS dy \right)}_{\mathbf{K}^8} \{\mathbf{w}\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{w}\}^T \underbrace{\left( -\mu \int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{B}\} \{\mathbf{N}\}^T GS dy \right)}_{\mathbf{K}^9} \{\boldsymbol{\theta}\} \\
& + \frac{1}{2} \{\mathbf{w}\}^T \mu \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{B}\} \{\mathbf{B}\}^T GS dy}_{\mathbf{K}^{10}} \{\mathbf{w}\}
\end{aligned} \tag{7}$$

onde

$$\{\mathbf{B}\} = \frac{\partial}{\partial y} \{\mathbf{N}\} = \begin{Bmatrix} \frac{L-4y}{L^2} \\ -\frac{8y}{L^2} \\ \frac{L+4y}{L^2} \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Cada  $\mathbf{K}^i$  da Equação 7 representa a matriz de rigidez relativa aos graus de liberdade a que está associado, obtida através da aplicação da equação de Lagrange. Deve-se perceber nessa equação a inclusão de um novo termo,  $\mu$ , um fator de correção para as tensões cisalhantes transversais tendo em vista que essas tensões não são constantes como o modelo o considera. Para seção circular  $\mu = 0,898936$ , e para seção quadrada ou retangular  $\mu = 5/6$ . Este fator é obtido igualando-se as energias de deformação devido o cisalhamento transversal considerando a distribuição de tensões constante, como prediz o modelo de Timoshenko, e uma distribuição obtida através da Teoria da Elasticidade. Para maiores detalhes sobre a obtenção do fator de correção, consultar (Kwon and Bang, 2000 e Timoshenko and Goodier, 1980).

Além disso, sabe-se que realizando uma integração completa poderá ocasionar o problema de *locking*. Para corrigi-lo, aplica-se uma integração gaussiana seletiva, onde os termos relativos ao cisalhamento transversal são sub-integrados, e os demais termos integrados de forma completa (Hughes, 2000).

Assim, podem ser encontrados todos os termos da matriz elementar, que serão posicionados de acordo com o vetor de deslocamentos nodais apresentado a seguir,

$$\{\delta\}^T = [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \psi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \psi_2 \quad u_3 \quad w_3 \quad \theta_3 \quad \psi_3] \quad (9)$$

A matriz de rigidez será dividida em duas matrizes, uma associada à flexão (Equação 10), ou ao cisalhamento transversal (Equação 11). Somando-se as matrizes  $\mathbf{K}^{11}$  e  $\mathbf{K}^{12}$ , obtém-se a matriz de rigidez do elemento quadrático de eixo para a teoria de viga de Timoshenko.

$$\mathbf{K}^{11} = \frac{EI}{3L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{K}^{12} = \mu G S \begin{bmatrix} \frac{7}{3L} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{8}{3L} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3L} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{7}{3L} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{8}{3L} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3L} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{L}{9} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{L}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{L}{18} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{L}{9} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{9} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{L}{18} \\ -\frac{8}{3L} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3L} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3L} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{16}{3L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3L} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{L}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{4L}{9} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{L}{9} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{4L}{9} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{9} \\ \frac{1}{3L} & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3L} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3L} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3L} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{8}{3L} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{7}{3L} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{L}{18} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{L}{9} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{L}{9} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{L}{18} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{L}{9} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{L}{9} \end{bmatrix} \quad (11)$$

## 2.2. Matrizes de massa e giroscópica

Tomando-se a derivada das funções de deslocamento em relação ao tempo, obtêm-se equações das velocidades. Essas equações podem ser aproximadas pelas funções de interpolação  $N_i$ ,

$$\dot{q}(y) = N_1(y)\dot{q}_1 + N_2(y)\dot{q}_2 + N_3(y)\dot{q}_3 = [N_1(y) \quad N_2(y) \quad N_3(y)] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{N}\}^T \{\dot{\mathbf{q}}\}, \quad (12)$$

onde  $\dot{q}_i$  representa os valores das velocidades nodais ( $\dot{u}_i$ ,  $\dot{w}_i$ ,  $\dot{\theta}_i$  ou  $\dot{\psi}_i$ ), com  $i = (1, 2, 3)$  representa o número do nó do elemento, e  $\{\dot{\mathbf{q}}\}$  as velocidades nodais representadas em forma de vetor. A equação da energia cinética do eixo é dada por (Lalanne and Ferraris, 1990),

$$T = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right) dy + \rho I L \Omega^2 + 2 \rho I \Omega \int_0^L \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \theta \right) dy, \quad (13)$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento finito do eixo,  $\rho$  é a densidade,  $I$  os momentos de inércia de área referentes aos eixos  $X$  ou  $Z$  (eixo simétrico),  $S$  a área da seção transversal e  $\Omega$  a rotação do rotor.

Assim, introduzindo a Equação 12 na Equação 13, obtêm-se, rearranjando os termos,

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{u}}\}^T \underbrace{\rho S \int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{N}\}^T dy}_{\mathbf{M}^1} \{\dot{\mathbf{u}}\} + \frac{1}{2} \{\dot{\mathbf{w}}\}^T \underbrace{\rho S \int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{N}\}^T dy}_{\mathbf{M}^2} \{\dot{\mathbf{w}}\} + \frac{1}{2} \{\dot{\boldsymbol{\theta}}\}^T \underbrace{\rho I \int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{N}\}^T dy}_{\mathbf{M}^3} \{\dot{\boldsymbol{\theta}}\} + \frac{1}{2} \{\dot{\boldsymbol{\psi}}\}^T \underbrace{\rho I \int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{N}\}^T dy}_{\mathbf{M}^4} \{\dot{\boldsymbol{\psi}}\} + \rho I L \Omega^2 + \underbrace{\{\dot{\boldsymbol{\psi}}\}^T 2 \rho I \Omega \int_{-L/2}^{L/2} \{\mathbf{N}\} \{\mathbf{N}\}^T dy}_{\mathbf{G}} \{\boldsymbol{\theta}\} \quad (14)$$

onde cada  $\mathbf{M}^i$  é a matriz de massa relativa aos graus de liberdade a que está associado e  $\mathbf{G}^1$  é a matriz que contém os termos giroscópicos, obtidas através da aplicação da equação de Lagrange.

Seja o vetor de velocidades nodais  $\{\dot{\boldsymbol{\delta}}\}$  dado pela Equação 15; calculando-se  $\mathbf{M}^1$ ,  $\mathbf{M}^2$ ,  $\mathbf{M}^3$ ,  $\mathbf{M}^4$  e  $\mathbf{G}$  e posicionando-as na matriz elementar de acordo com o vetor de velocidades nodais, obtêm-se a Equação 16, a Equação 17 e a Equação 18.

$$\{\dot{\boldsymbol{\delta}}\}^T = [\dot{u}_1 \quad \dot{w}_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\psi}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dot{w}_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\psi}_2 \quad \dot{u}_3 \quad \dot{w}_3 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\psi}_3] \quad (15)$$

$$\mathbf{M}^{11} = \frac{LS\rho}{30} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{M}^{12} = \frac{IL\rho}{30} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{G} = \frac{IL\rho\Omega}{15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Somando-se agora as matrizes  $\mathbf{M}^{11}$  e  $\mathbf{M}^{12}$ , obtém-se a matriz de massa do elemento, bem como matriz giroscópica  $\mathbf{G}$  do elemento.

O termo  $\rho I L \Omega^2$  da equação da energia cinética do eixo (Equação 14) não provoca efeito algum no cálculo das matrizes de massa ou giroscópica, pelo fato de ser uma constante e desaparecer quando se aplica a equação de Lagrange.

### 2.3. Testes numéricos e comparações

Com a intenção de avaliar a diferença entre a teoria exposta neste trabalho e a teoria clássica de Euler Bernoulli (Lalanne and Ferraris, 1990), com e sem a correção para o cisalhamento, foram feitos testes numéricos para obtenção das rotações críticas através do diagrama de Campbell.

O programa computacional usado para as aplicações presentes neste trabalho foi desenvolvido em MATLAB.

O rotor utilizado em um dos testes para comparação numérica é representado na Figura 2 e apresenta comprimento total de 1000mm, sendo que o diâmetro  $d$  foi variado a fim de obter diferentes relações comprimento/diâmetro. Os discos foram considerados rígidos, e seus dados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Dados dos discos utilizados na montagem do rotor.

| Componente | Espessura [mm] | Diâmetro [mm] |
|------------|----------------|---------------|
| Disco 1    | 45             | 130           |
| Disco 2    | 15             | 150           |
| Disco 3    | 10             | 130           |

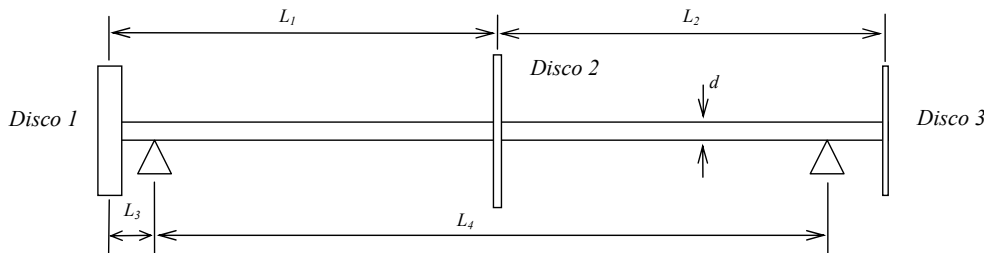


Figura 2: Esquema do rotor utilizado para comparações numéricas.

A configuração dos elementos do rotor, conforme a Figura 2, é da seguinte maneira:

$$L_1 = 0,5m; L_2 = 0,5m; L_3 = 0,09m; L_4 = 0,82m$$

Os discos e o eixo são de aço, com as seguintes propriedades: módulo de Young  $E = 2,1 \times 10^{11} N/m^2$ , densidade  $\rho = 7850 kg/m^3$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Os dois mancais são idênticos, e apresentam as seguintes características:

$$k_{xx} = 1,0 \times 10^{10} N/m; \quad k_{zz} = 1,0 \times 10^{10} N/m; \quad k_{xz} = k_{zx} = 0$$

$$c_{xx} = 1,0 \times 10^1 N/m; \quad c_{zz} = 1,0 \times 10^1 N/m; \quad c_{xz} = c_{zx} = 0$$

O eixo foi dividido em 16 elementos para os experimentos numéricos envolvendo aproximações lineares  $C^0$ , e 8 elementos para o teste utilizando funções de interpolação quadrática  $C^0$  e os elementos do tipo  $C^1$ . Isso foi feito para que haja uma igualdade no número de nós e de graus de liberdade entre os diversos modelos.



Foram realizados testes numéricos com diversos diâmetros, fazendo com que a relação comprimento/diâmetro ( $L/d$ ) variasse de um eixo fino ( $L/d = 100$ ) até um eixo semi-espesso ( $L/d \cong 14$ ). Nota-se que quanto mais robusta é a viga girante, mais rígido fica o sistema e consequentemente as rotações críticas ficam mais altas.

Para exemplificar o resultado apresentado pelo programa computacional, a Figura 3 mostra o diagrama de Campbell obtido um eixo de diâmetro de 10mm, ou seja, com uma relação  $L/d = 100$ , utilizando a teoria de viga de Timoshenko com interpolação quadrática.

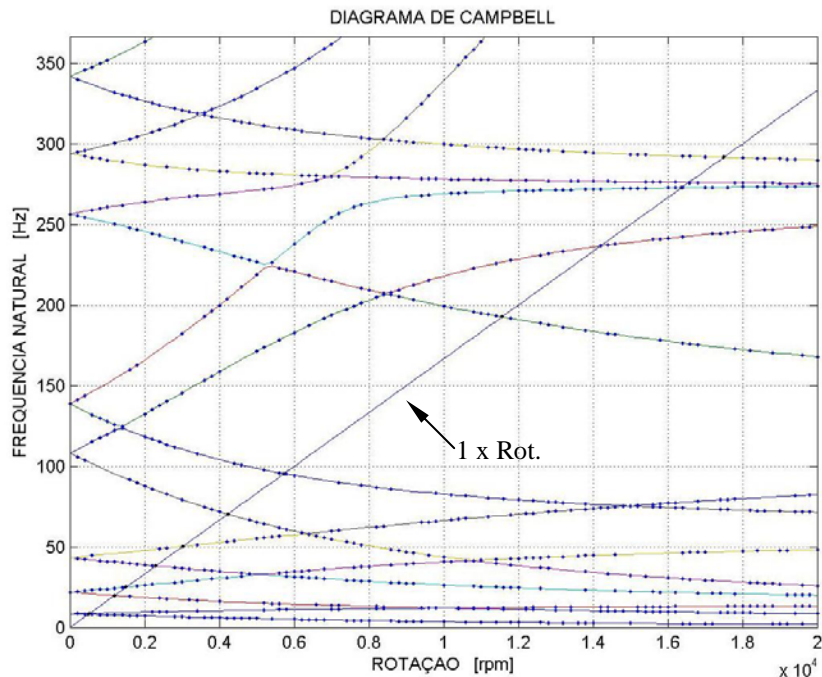


Figura 3: Diagrama de Campbell para o rotor exemplificado com diâmetro nominal de 10mm,  $L/d = 100$ , utilizando a teoria de viga de Timoshenko com interpolação quadrática.

Na Figura 3 os pontos marcados em azul mostram os pontos de instabilidade do sistema, e os pontos pretos, do cruzamento das linhas de frequência natural com a linha que representa 1 vez a rotação, indicam as rotações críticas do rotor.

Afim de mostrar o efeito da relação comprimento/diâmetro nas rotações críticas da estrutura, os resultados numéricos são apresentados nas Tabelas 2 e 3, que contemplam, respectivamente, as rotações críticas para o eixo mais fino e o mais espesso daqueles simulados. Estas apresentam valores obtidos utilizando-se a teoria clássica de vigas de Euler-Bernoulli sem e com correção ao cisalhamento e a teoria de vigas semi-espessas de Timoshenko aproximada por interpolação linear e quadrática.

Tabela 2: Resultados numéricos de rotação crítica obtidos para um eixo com diâmetro de 10[mm], ou seja, relação comprimento/diâmetro = 100.

| Rot. crítica   | Euler Bernoulli (A) | Euler Bernoulli corrigido (B) | Timoshenko elemento linear (C) | Timoshenko elemento quadrático (D) | Diferença relativa entre (B) e (D) | Diferença relativa entre (A) e (B) | Diferença relativa entre (A) e (D) | Diferença relativa entre (C) e (D) |
|----------------|---------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1 <sup>a</sup> | 8,17                | 8,17                          | 8,20                           | 8,17                               | 0,00                               | 0,00                               | 0,00                               | 0,37                               |
| 2 <sup>a</sup> | 8,77                | 8,77                          | 8,83                           | 8,77                               | 0,00                               | 0,00                               | 0,00                               | 0,68                               |
| 3 <sup>a</sup> | 19,83               | 19,83                         | 20,07                          | 19,83                              | 0,00                               | 0,00                               | 0,00                               | 1,21                               |
| 4 <sup>a</sup> | 25,10               | 25,10                         | 25,50                          | 25,07                              | 0,12                               | 0,00                               | 0,12                               | 1,72                               |
| 5 <sup>a</sup> | 38,23               | 38,20                         | 38,83                          | 38,20                              | 0,00                               | 0,08                               | 0,08                               | 1,65                               |

Tabela 3: Resultados numéricos de rotação crítica obtidos para um eixo com diâmetro de 70[mm], ou seja, relação comprimento/diâmetro  $\cong 14$ .

| Rotação crítica | Euler Bernoulli (A) | Euler Bernoulli corrigido (B) | Timoshenko elemento linear (C) | Timoshenko elemento quadrático (D) | Diferença relativa entre (B) e (D) | Diferença relativa entre (A) e (B) | Diferença relativa entre (A) e (D) | Diferença relativa entre (C) e (D) |
|-----------------|---------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1 <sup>a</sup>  | 190,66              | 189,60                        | 192,53                         | 189,60                             | 0,00                               | 0,56                               | 0,56                               | 1,55                               |
| 2 <sup>a</sup>  | 194,93              | 193,86                        | 196,96                         | 193,86                             | 0,00                               | 0,55                               | 0,55                               | 1,60                               |
| 3 <sup>a</sup>  | 676,00              | 667,20                        | 693,60                         | 669,86                             | 0,40                               | 1,32                               | 0,92                               | 3,54                               |
| 4 <sup>a</sup>  | 768,73              | 754,63                        | 795,46                         | 757,64                             | 0,40                               | 1,87                               | 1,46                               | 4,99                               |
| 5 <sup>a</sup>  | 1115,70             | 1081,29                       | 1134,85                        | 1088,50                            | 0,66                               | 3,18                               | 2,50                               | 4,26                               |

## 2.4. Conclusões

Este trabalho apresentou a formulação do modelo de elementos finitos de viga de Timoshenko, utilizando funções de interpolação de classe  $C^0$ , para análise dinâmica de rotores. Foram deduzidas e apresentadas as matrizes de rigidez, de inércia e giroscópica para o elemento com interpolação quadrática (3 nós).

Quanto à análise dos resultados numéricos, para eixos com alto índice de esbelteza, as diferenças entre os diferentes modelos testados foram pequenas. Para a teoria desenvolvida o efeito do cisalhamento é verificado nas mais altas rotações, onde a diferença entre os modelos passa a ser considerável. E, apesar, a diferença relativa entre a teoria pura de Euler Bernoulli e a teoria com o fator de correção ser desprezível em toda faixa de rotações analisadas, os resultados obtidos com a formulação de Timoshenko são aceitáveis num intervalo grande de rotações, apresenta diferença apenas para elevadíssimas rotações.

Analisando os resultados obtidos para uma viga mais robusta, quando o cisalhamento tem maior influência, e tomando a formulação de Timoshenko como mais coerente, podemos validar as matrizes apresentadas, pois os resultados se mostraram semelhantes aos resultados da bibliografia. Comparando com a teoria pura de Euler-Bernoulli observa-se que a diferença entre os resultados aparece já em rotações mais baixas, comprovando a influência da relação comprimento/diâmetro nas rotações críticas de um rotor.

## 4. REFERÊNCIAS

- Bathe, K., 1982, "Finite Elements Procedures", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, England.
- Hughes, T. J. R., 2000, "The Finite Element Method", Dover Publications, Mineola, United States of America.
- Kwon, Y. W. and Bang, H., 2000, "The Finite Element Method Using Matlab", 2<sup>a</sup> ed., CRC Press, Boca Raton, United States of America.
- Lalanne, M. and Ferraris, G., 1990, "Rotordynamics Prediction in Engineering", 3<sup>a</sup> ed., John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England.
- Timoshenko, S. and Goodier J. N., 1980, "Teoria da Elasticidade", 3<sup>a</sup> ed., Guanabara Dois, Rio de Janeiro, Brazil.