



O SOBRE-SINAL E A REAÇÃO REVERSA EM SISTEMAS DE CONTROLE LINEARES DE QUARTA ORDEM COM UM PÓLO REAL DUPLO E UM ZERO REAL

Dário Monte Alegre

UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Avenida Brasil Centro nº 56, Ilha Solteira – SP.
dmalegre@gmail.com

Célia Aparecida dos Reis

celia@mat.feis.unesp.br

Neusa Augusto Pereira da Silva

neusa@mat.feis.unesp.br

Resumo: *Trata este trabalho da classificação e análise de extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo, de quarta ordem, com um pólo real com multiplicidade dois e um zero real simples.*

Palavras-chave: *Pontos Críticos, Sobre-Sinal, Reação Reversa.*

1. INTRODUÇÃO

Atualmente os sistemas de controle automático se encontram difundidos em todas as sociedades desenvolvidas. Tais sistemas agem como elemento catalisador na promoção do desenvolvimento e do progresso. O controle automático é essencial no estudo de sistemas de veículos espaciais, guiamento de mísseis, pilotagem de aviões, robóticos e outros, além de ser aplicado em modernos processos industriais e de fabricação, sistemas biológicos, biomédicos, econômicos e socioeconômicos (Franklin, 1991; Dorf, 1995; Ogata, 1998).

Existem alguns problemas como o de controle do eixo de máquinas ferramentas e os de controle de um robô, os quais necessitam seguir uma trajetória pré-definida, onde a resposta a degrau não pode apresentar extremos. Desta forma, o estudo de condições que permitam avaliar extremos, sobre-sinal e reação reversa na resposta a degrau é de grande importância na teoria de controle, de acordo com (El-Khoury, 1993; León de la Barra, 1994, 1994-a; Howell, 1997; Ogata, 1998; Rachid, 1995; Reis, 2002, 2004, 2005, 2005-a; Monte Alegre, 2006).

Muitas contribuições teóricas recentes têm sido feitas no sentido de clarificar a influência dos zeros e das localizações de pólos e zeros da planta na parte transiente da resposta a degrau (Mita, and Yoshida, 1981; Vidyasagar, 1986; Moore, 1990; El-Khoury, 1993; León de la Barra, 1994, 1994-a; Howell, 1997; Rachid, 1995; Lin and Fang, 1997; Silva, 2001; Reis, 2002, 2004, 2005, 2005-a; Monte Alegre, 2006).

Apesar de bastante valiosas, essas contribuições ainda não oferecem um quadro claro de como e quais variações extensas nas localizações de pólos e zeros podem influenciar o sobre-sinal e a reação reversa. Por exemplo, o problema de se determinar o número exato de extremos da resposta a degrau permanece em aberto (El-Khoury, 1993) e mesmo determinando-os, não existe uma técnica que permita classificá-los, ou seja, faltam condições necessárias e suficientes para a prova da existência de sobre-sinal e reação reversa (Monte Alegre, 2006). Além disso, para sistemas de controle de ordem maior ou igual a três, não é possível a determinação direta de extremos, já que a resposta a degrau é uma função transcendental.

Uma vez que, a determinação direta dos pontos críticos, é na maioria dos casos impossível, neste trabalho apresenta-se uma técnica para a análise e classificação de pontos críticos em sistemas de controles lineares, estáveis de quarta ordem com um pólo duplo e um zero real.

Mediante o uso desta técnica obteve-se condições necessárias e suficientes para a ocorrência de extremos, sobre-sinal e reação reversa em tal classe de sistemas. Acredita-se que as caracterizações obtidas são de importância na teoria de controle, já que permitem uma visão mais esclarecida das condições que possibilitam avaliar pontos críticos, extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares contínuos no tempo, além de clarificar um pouco mais a influência dos zeros e localizações de pólos e zeros da planta, na parte transiente da resposta a degrau. Além disso, as análises efetuadas, para tais sistemas, têm permitido a obtenção de extensões dos resultados obtidos para sistemas de ordem elevada.

2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A forma mais geral de uma função de transferência de um sistema racional SISO, estritamente própria, assintoticamente estável e de fase não mínima, com pólos e zeros reais é dada por:

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{k_1} (s - z_i)^{r_i}}{s^I \cdot \prod_{j=1}^{k_2} (s - \lambda_j)^{l_j}} \quad (2.1)$$

sendo $1 \leq k_1 \leq m$, $1 \leq k_2 \leq n$, $\sum_{i=1}^{k_1} r_i = m$, $\left(\sum_{j=1}^{k_2} l_j \right) + I = n$ e $K = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{\prod_{i=1}^m z_i}$.

Na equação (2.1), λ_j , $j = 1, \dots, k_2$ são os pólos reais de $G(s)$ e z_i , $i = 1, \dots, k_1$, são seus zeros reais. Considera-se, também, que $G(s)$ não possui cancelamentos de pólos e zeros.

É conveniente classificar os zeros de $G(s)$, em (2.1), em quatro diferentes conjuntos, a saber $M_1 = \{z : G(z) = 0, 0 < z < +\infty\}$, $M_2 = \{z : G(z) = 0, \lambda_n < z < 0\}$, $M_3 = \{z : G(z) = 0, \lambda_1 < z < \lambda_n\}$ e $M_4 = \{z : G(z) = 0, -\infty < z < \lambda_1\}$. Denomina-se por m_i , o número de zeros presentes na classe M_i , para $i = 1, \dots, 4$.

Seguem-se, então, as seguintes definições, encontradas em El-Khoury, 1993.

Definição: A resposta a degrau $y(t)$ de, (2.1), tem um *extremo local* em t^* se existe $\varepsilon > 0$ tal que $[y(t^*) - y(t^* - \tau)][y(t^*) - y(t^* + \tau)] > 0$ para todo $\tau \in (0, \varepsilon)$.

Definição: Define-se como sendo η o número de extremos locais de $y(t)$, para $t > 0$.

Neste trabalho, $G(s)$ será tomada na forma das constantes de tempo e, portanto, o valor de regime de $y(t)$, $y(\infty)$, será igual a 1.

Para a análise do desempenho do sistema, considera-se o sobre-sinal e a reação reversa como índices de desempenho. Tem-se então a seguinte definição:

Definição: (Ogata, 1998) O *sobre-sinal* M_p é uma indicação do maior valor acima do valor de regime durante a evolução do transitório, dado em porcentagem, isto é, $M_p = (y(m) - 1) \cdot 100\%$, sendo que $y(m)$ é o valor máximo de $y(t)$.

O sobre-sinal está relacionados aos valores, que a resposta temporal pode assumir, que são maiores que o valor de regime. A reação reversa, no entanto, diz respeito aos valores negativos que a resposta temporal pode assumir.

Segundo Ogata (1998), um sistema de controle linear é dito de *fase mínima* se todos os pólos e zeros de $G(s)$ estão localizados no semi-plano aberto esquerdo do plano s da variável de Laplace. Os de *fase não mínima* ou *sistemas de reação reversa* são os sistemas estáveis para os quais $G(s)$ apresenta zeros no semiplano aberto direito do plano s . Tais sistemas são identificados da seguinte forma: na aplicação de um degrau na entrada, a saída ou inicialmente começa em direção contrária ao valor de regime, ditos *sistemas com reação reversa inicial*, ou assumem valores negativos após um instante de tempo t_1 , ditos *sistemas com reação reversa do tipo B*, de acordo com Mita e Yoshida (1981). Vale ressaltar que todos os sistemas aqui considerados são estáveis, isto é, todos os pólos de $G(s)$ estão localizados no semiplano aberto esquerdo.

A seguir, apresentam-se os conceitos de reação reversa inicial e de reação reversa do tipo B.

Definição: (Vidysagar 1986) Seja $G(s)$ uma função de transferência, com ganho não nulo K e $y(t)$ a sua resposta a uma entrada degrau unitário. Então, diz-se que $y(t)$ apresenta *reação reversa inicial* se $y(t) \cdot K < 0$ para todo t tal que $0 < t < t_1$.

Definição: (Mita e Yoshida, 1981) Se não existe reação reversa inicial e existe um intervalo de tempo (a, b) tal que $y(t) \cdot y(\infty) < 0$, $\forall t \in (a, b)$, diz-se que $y(t)$ apresenta *reação reversa do tipo B*.

Uma discussão mais detalhada, do fenômeno da reação reversa, mediante a especificação do número de vezes que a resposta a degrau apresenta reação reversa do tipo B, para $t > 0$, é dada pela definição a seguir:

Definição: (Silva, 2001) Seja $G(s)$ uma função de transferência para um sistema racional SISO, $G(s)$ estritamente própria, assintoticamente estável, de fase não mínima e sem zeros na origem do plano complexo, sem pólos complexo e de ganho não nulo k . Seja $y(t)$ a correspondente resposta, no domínio do tempo, para uma entrada a degrau unitário. Então é dito que $y(t)$ apresenta *reação reversa do tipo r_u estendido* para $t > 0$ se as três seguintes condições são satisfeitas:

Existem exatamente r_{ue} valores diferentes para t , $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{r_{ue}} < +\infty$, tais que:

$$(i) \quad y(t_i) \cdot k < 0, \quad i = 1, \dots, r_{ue},$$

$$(ii) \quad \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r_{ue},$$

$$(iii) \quad k \cdot \left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right|_{t=t_i} > 0, \quad \text{ou} \quad \left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right|_{t=t_i} = 0, \quad \text{e existe uma constante positiva } \delta_i \text{ tal que,}$$

$$k \cdot \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_i} < 0 \text{ para todo } t \in (t_i - \delta_i, t_i) \text{ e } k \cdot \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_i} > 0 \text{ para todo } t \in (t_i, t_i + \delta_i), \quad i = 1, \dots, r_{ue}.$$

O teorema dado a seguir, apresenta uma condição necessária e suficiente para a ocorrência de reação reversa inicial em $y(t)$, em função do número de zeros de $G(s)$ em (2.1), situados no semiplano aberto direito do plano s .

Teorema 2.1: (Vidyasagar, 1986) O sistema cuja função de transferência é dada por $G(s)$ tem reação reversa inicial se e somente se $G(s)$ tem um número ímpar de zeros no semiplano aberto direito.

O sistema estudado neste trabalho é um sistema de controle linear de quarta ordem, estável, contínuo no tempo, com um pólo real de multiplicidade dois e um zero real simples. Considera-se a função de transferência na forma de pólos e zeros, dada por:

$$G(s) = -\frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{z} \frac{(s-z)}{(s-\lambda_1)^2 \cdot (s-\lambda_2) \cdot (s-\lambda_3)} \quad (2.2)$$

sendo que:

- z é o zero de $G(s)$;
- $\lambda_i, i = 1, \dots, 3$ são os pólos de $G(s)$;
- $z \neq \lambda_i, i = 1, \dots, 3$;
- $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$.

Para uma entrada a degrau unitário, pode-se calcular a resposta temporal para o sistema dado por (2.2). O lema a seguir fornece esse resultado. A prova é feita levando-se em conta a expansão em frações parciais do lado direito da igualdade dada em (2.2).

Lema 2.1: A resposta a uma entrada a degrau unitário, $y(t)$, para um sistema de controle cuja função de transferência é dada por (2.2), tem a forma

$$y(t) = 1 + c_0 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_1 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + c_3 \cdot e^{\lambda_3 t} \quad (2.3)$$

sendo que:

- $c_0 = -1 + \frac{\lambda_1^2}{z} \cdot \left[\frac{\lambda_2 \cdot (\lambda_3 - z) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^2 - \lambda_3 \cdot (\lambda_2 - z) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1)^2}{(\lambda_3 - \lambda_2) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1)^2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^2} \right]$;
- $c_1 = -\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}{z} \frac{(\lambda_1 - z)}{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1)}$;
- $c_2 = \frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_3}{z} \frac{(\lambda_2 - z)}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \cdot (\lambda_3 - \lambda_2)}$;
- $c_3 = -\frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2}{z} \frac{(\lambda_3 - z)}{(\lambda_3 - \lambda_1)^2 \cdot (\lambda_3 - \lambda_2)}$.

O corolário, apresentado a seguir, é uma consequência do Lema 2.1.

Corolário 2.1: Sob as hipóteses do Lema 2.1, tem-se que:

- (a) Se $z \in M_1$ tem-se que $c_0 > 0, c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0$;
- (b) Se $z \in M_2$ tem-se que $c_0 < 0, c_1 > 0, c_2 < 0, c_3 > 0$;
- (c) Se $z \in M_3$ e $\lambda_2 < z < \lambda_3 < 0$ tem-se que $c_0 < 0, c_1 > 0, c_2 < 0, c_3 < 0$;
- (d) Se $z \in M_3$ e $\lambda_1 < z < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$ tem-se que $c_0 < 0, c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 < 0$;
- (e) Se $z \in M_4$ tem-se que $c_0 < 0, c_1 < 0, c_2 > 0, c_3 < 0$.

Prova: A prova segue diretamente da análise dos coeficientes c_i , $i = 0, \dots, 3$.

Para a quantificação e classificação dos pontos críticos de $y(t)$ torna-se necessária a análise feita a seguir.

A resposta temporal $y(t)$, dada em (2.3), apresenta pontos críticos se e somente se a sua derivada é nula. Assim:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow c_0 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_1 \cdot \lambda_1 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 t} + c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + c_3 \cdot \lambda_3 \cdot e^{\lambda_3 t} = 0 \quad (2.4)$$

Dividindo-se (2.4) por $c_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$, e definindo:

$$c_i^{(1)} = c_i \cdot \lambda_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, \quad d_j^{(1)} = \frac{c_j^{(1)}}{c_1^{(1)}} \text{ e } \lambda_j^{(1)} = \lambda_j - \lambda_1, \text{ para } j = 2, 3 \quad (2.5)$$

obtém-se:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{c_0}{c_1} + \frac{1}{\lambda_1} + t \right) + d_2^{(1)} \cdot e^{\lambda_2^{(1)} \cdot t} + d_3^{(1)} \cdot e^{\lambda_3^{(1)} \cdot t} = 0 \quad (2.6)$$

Em (2.6) defina:

$$f_I(t) = \left(\frac{c_0}{c_1} + \frac{1}{\lambda_1} + t \right) + d_2^{(1)} \cdot e^{\lambda_2^{(1)} \cdot t} + d_3^{(1)} \cdot e^{\lambda_3^{(1)} \cdot t} \quad (2.7)$$

Observa-se, de (2.7), que:

$$f_I(t) = \frac{y'(t)}{c_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t}} \quad (2.8)$$

De (2.8), nota-se que os pontos críticos de $y(t)$ são os pontos $t_o^* \in (0, +\infty)$, para os quais $f_I(t_o^*) = 0$.

Assim, torna-se necessária a análise do gráfico de $f_I(t)$, para a determinação de suas raízes. Pode-se verificar que $f_I(0) = 0$. Além disso, se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$ ou $z \in M_4$, tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_I(t) = +\infty, \text{ e se } z \in M_3, \text{ tem-se que } \lim_{t \rightarrow +\infty} f_I(t) = -\infty.$$

Além disso, tem-se que

$$f'_I(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + d_2^{(1)} \cdot \lambda_2^{(1)} \cdot e^{\lambda_2^{(1)} \cdot t} + d_3^{(1)} \cdot \lambda_3^{(1)} \cdot e^{\lambda_3^{(1)} \cdot t} = 0 \quad (2.9)$$

Em (2.9), defina:

$$f_2(t) = 1 + d_2^{(1)} \cdot \lambda_2^{(1)} \cdot e^{\lambda_2^{(1)} \cdot t} + d_3^{(1)} \cdot \lambda_3^{(1)} \cdot e^{\lambda_3^{(1)} \cdot t} \quad (2.10)$$

Nota-se que os pontos críticos de $f_I(t)$ são as raízes de $f_2(t)$. Além disso,

$$f_2(t) = f'_1(t). \quad (2.11)$$

Como o interesse é saber a quantidade de pontos críticos de $f_1(t)$, então torna-se necessária a análise do gráfico de $f_2(t)$.

Observa-se que $f_2(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_2(t) = +\infty$ se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$ ou $z \in M_4$ e ainda $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_2(t) = -\infty$, se e somente se $z \in M_3$.

O lema a seguir, fornece condições necessárias e suficientes para a ocorrência de pontos críticos em $f_2(t)$.

Lema 2.2: A função $f_2(t)$, dada por (2.11), apresenta um único ponto crítico se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$.

Prova: Para a prova do Lema 2.2, torna-se necessário a análise da derivada de $f_2(t)$, assim,

$$\begin{aligned} f'_2(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{c_2 \cdot \lambda_2}{c_1 \cdot \lambda_1} \cdot (\lambda_2^{(1)})^2 \cdot e^{\lambda_2^{(1)} \cdot t} + \frac{c_3 \cdot \lambda_3}{c_1 \cdot \lambda_1} \cdot (\lambda_3^{(1)})^2 \cdot e^{\lambda_3^{(1)} \cdot t} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{c_3 \cdot \lambda_3}{c_2 \cdot \lambda_2} \cdot \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^2 \cdot e^{(\lambda_3 - \lambda_2)t} = -1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_2)} \cdot \ln \left[-\frac{c_2 \cdot \lambda_2}{c_3 \cdot \lambda_3} \cdot \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Como o interesse é que os pontos críticos pertençam ao intervalo $(0, +\infty)$, tem-se que $t > 0$ se e somente se $-\frac{c_2 \cdot \lambda_2}{c_3 \cdot \lambda_3} \cdot \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \right)^2 > 1$. Substituindo-se os valores das constantes c_i , tem-se que $t > 0$ se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$, o que prova o Lema 2.2.

Do Lema 2.2, tem-se que as possíveis formas para o gráfico de $f_2(t)$ são as mostradas na figura 2.1, a seguir.

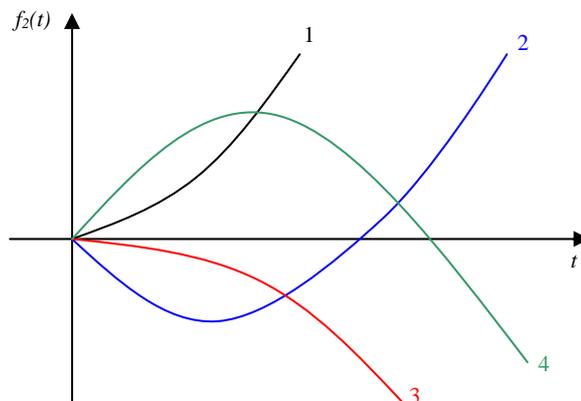


Figura 2.1 – Possíveis formas para o gráfico de $f_2(t)$, dada por (2.11).

Pela Figura 2.1, observa-se que $f_2(t)$ pode apresentar zero ou uma raiz, assim, pela equação (2.12), $f_1(t)$ pode apresentar zero ou um ponto crítico. Portanto, as possíveis formas para o gráfico de $f_1(t)$ são as mostradas na figura 2.2, a seguir.

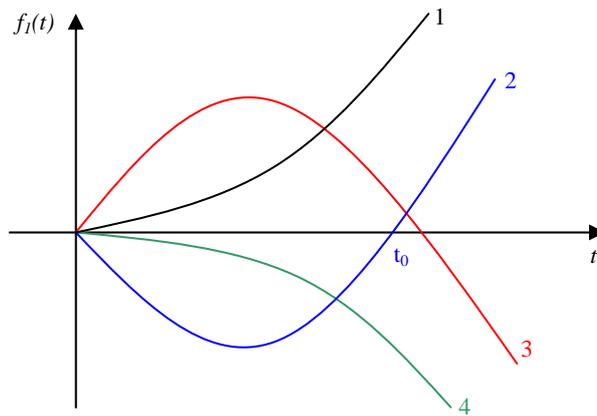


Figura 2.2 – Possíveis formas para o gráfico de $f_1(t)$, dada por (2.8).

Portanto $y(t)$ pode apresentar zero ou um ponto crítico.

A seguir apresentam-se os principais resultados obtidos para o sistema dado por (2.2).

3. RESULTADOS OBTIDOS

Teorema 3.1: Para a resposta temporal do sistema dado por (2.2), tem-se que:

- I. $\eta = 1$ se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$;
- II. $\eta = 0$ se e somente se $z \in M_3$ ou $z \in M_4$.

Teorema 3.2: Para a resposta a degrau dada em (2.3), tem-se que:

- I. $y(t)$ apresenta sobre-sinal se e somente se $z \in M_2$;
- II. $y(t)$ apresenta reação reversa inicial se e somente se $z \in M_1$.

Corolário 3.1: A resposta temporal dada por (2.3) não apresenta sobre-sinal e nem reação reversa se e somente se $z \in M_3$ ou $z \in M_4$.

Prova do Teorema 3.1: Considere inicialmente que $z \in M_1$ ou $z \in M_2$. Neste caso, pelo Lema 2.2, $f_2(t)$ apresenta exatamente um ponto crítico. Além disso, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_2(t) = +\infty$. Assim, a forma do

gráfico de $f_2(t)$ é a forma 2, mostrada na Figura 2.1. Para esta forma, $f_2(t)$ apresenta uma raiz logo, pela equação (2.12), $f_1(t)$ apresenta um ponto crítico. Como, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t) = +\infty$, a forma do gráfico

de $f_1(t)$ é a forma 2, mostrada na Figura 2.2. Esta forma apresenta uma raiz e assim, pela equação (2.9), $y(t)$ apresenta um único ponto crítico. Reciprocamente, considere que $y(t)$ apresente um ponto crítico. Neste caso, pela equação (2.9), $f_1(t)$ apresenta uma raiz. Assim, as possíveis formas para o gráfico de $f_1(t)$ são as formas 2 e 3 mostradas na Figura 2.2. Estas formas apresentam um único ponto crítico cada, logo, pela equação (2.12), $f_2(t)$ possui uma raiz. Logo, as possíveis formas para o gráfico de $f_2(t)$ são as formas 2 e 4, mostradas na Figura 2.1. Para estas formas, $f_2(t)$ apresenta um único ponto crítico e, pelo Lema 2.2, $f_2(t)$ apresenta pontos críticos se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$, o que prova o item I do Teorema 3.1.

Para a prova do item II, observa-se, pelo Lema 2.2, que $f_2(t)$ apresenta pontos críticos se e somente se $z \in M_1$ ou $z \in M_2$. Para quaisquer posições diferentes dessas, ou seja, $z \in M_3$ ou $z \in M_4$, $f_2(t)$ não apresenta pontos críticos. Assim, as possíveis formas para $f_2(t)$ são as formas 1 ou 3, mostradas na figura 2.1. Logo, pela equação (2.12), $f_1(t)$ não apresenta pontos críticos. Dessa forma, as possíveis formas para o gráfico de $f_1(t)$ são as formas 1 e 4, mostradas na figura 2.2. Essas formas não apresentam raízes e, pela equação (2.9), $y(t)$ não apresenta pontos críticos, o que prova o item II do Teorema 3.1.

Prova do Teorema 3.2: Para a prova do item I, suponha inicialmente que $z \in M_2$. Pelo Teorema 3.1, $y(t)$ apresenta um extremo, isto é, $\eta = 1$. Da Figura 2.2, tem-se que o gráfico de $f_1(t)$ é a forma 2, e de (2.9) tem-se que $f_1(t) = \frac{y'(t)}{c_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t}}$. Como $z \in M_2$, então, pelo Corolário 2.1, $c_1 > 0$ e $c_1 \cdot \lambda_1 < 0$. Como $f_1(t) < 0$ se $0 < t < t_0$, então $y'(t) > 0$ se $0 < t < t_0$. Portanto $y(t)$ é crescente em $0 < t < t_0$. Como $f_1(t) > 0$ se $t > t_0$, então $y'(t) < 0$ se $t > t_0$. Portanto $y(t)$ é decrescente para $t > t_0$. Assim, t_0 é um ponto de máximo relativo de $y(t)$. Tal ponto é de fato um ponto de máximo absoluto, já que pelo Teorema 2.1, $y(t)$ apresenta apenas um extremo. Assim, $y(t)$ apresenta sobre-sinal. Suponha, agora, que $y(t)$ apresenta sobre-sinal. Então $y(t)$ possui ponto de máximo absoluto em $(0, +\infty)$. Pelo Teorema 3.1, $y(t)$ apresenta um único extremo ou zero extremo. Assim, $z \in M_1$ ou $z \in M_2$. Como a multiplicidade de z é um, $y(t)$ apresenta reação reversa inicial se e somente se $z \in M_1$, pelo Teorema 2.1. Portanto $z \in M_2$ obrigatoriamente, o que prova o item I. A prova do item II segue diretamente da aplicação do Teorema 2.1

Prova do Corolário 3.1: A prova segue diretamente das provas dos Teoremas 3.1 e 3.2.

A seguir apresentam-se alguns exemplos, os quais ilustram-se os resultados obtidos.

4. EXEMPLOS

Considere $G(s)$ dada por:

$$G(s) = \frac{(s - z)}{\left(\frac{1}{10} \cdot s + 1\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot s + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot s + 1\right)} \quad (4.1)$$

$G(s)$ possui pólos $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -8$ e $\lambda_3 = -5$. Considere o caso em que $z = -1$, ou seja, $z \in M_2$. Pelo Teorema 3.1, $y(t)$ apresenta um ponto crítico e, pelo Teorema 3.2, $y(t)$ apresenta sobre-sinal. A Figura 4.1 – a, a seguir, mostra o gráfico da resposta a uma entrada a degrau unitário $y(t)$, deste sistema. Através desta, percebe-se a ocorrência de um ponto crítico na resposta e a ocorrência do sobre-sinal. Considere, agora, o caso em que $z = -1$, ou seja, $z \in M_1$. Pelo Teorema 3.1, $y(t)$ apresenta um ponto crítico e, pelo Teorema 3.2, $y(t)$ apresenta reação reversa inicial. A Figura 4.1 – b, a seguir, mostra o gráfico da resposta a uma entrada a degrau unitário $y(t)$, deste sistema. Através desta, percebe-se a ocorrência de um ponto crítico na resposta e a ocorrência da reação reversa inicial.

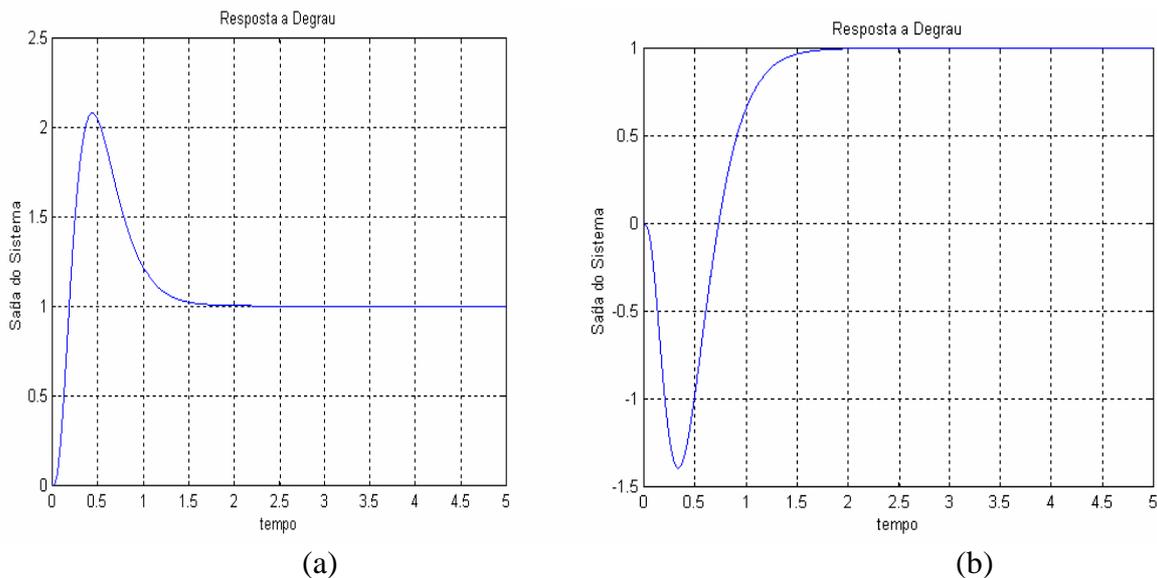


Figura 4.1: Resposta a Degrau Unitário para $G(s)$ dada por (4.1).

A seguir apresentam-se as conclusões deste trabalho.

5. CONCLUSÕES

Foram realizados estudos que visam a determinação de condições necessárias e suficientes para a ocorrência de extremos, sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares estáveis, contínuos no tempo, de quarta ordem, com um pólo real de multiplicidade dois e um zero real simples.

Para a classe de sistemas de controle lineares analisada, foram obtidas condições necessárias e suficientes para a análise e classificação dos extremos, análise de sobre-sinal e reação reversa da resposta a uma entrada degrau unitário em tais classes de sistemas.

Acredita-se que, com os resultados obtidos, foi dado um passo importante para um melhor entendimento da influencia das posições relativas de pólos e zeros para a ocorrência de pontos críticos e extremos, para a análise e determinação de sobre-sinal e reação reversa em sistemas de controle lineares e contínuos no tempo. Tais resultados podem ser úteis nas tentativas de generalizações dos resultados para sistemas de ordens mais elevadas.

Observa-se que os resultados obtidos podem ter várias aplicações em engenharia de controle e podem, por exemplo, ser usados em projetos de controladores sem sobre-sinal e reação reversa, para a resposta a degrau de malha fechada de um sistema linear de fase mínima (Moore, 1990).

6. REFERÊNCIAS

- Dorf R. C. & Bishop R. H., 1995. "Modern Control Systems", 7 ed. Addison-Wesley, New York.
- El-Khoury, M. et al., 1993, "Influence of Zero Locations on the Number of Step-response Extrema". Automatica, vol. 29, no 6, pp. 1571-1574.
- Franklin, G. F. et alii, 1991, "A. Feedback Control of Dynamic Systems", 3ed. Addison-Wesley, New York.
- Howell, J. R., 1997. "Some classes of Step-response Model Without Extrema". Automatica, vol. 33, no 7, p. 1427 - 1428.
- León de la Barra, B.A., 1994, "On reação reversa in SISO systems". IEEE Trans. Automat. Control, vol. 39, no 3, pp. 578-581.
- León de la Barra, B.A., Fernández, M. A., 1994-a, "Transient Properties of Type m Continuous Time Scalar Systems". Automática, vol. 30, no 9, pp. 1495-1496.

- Lin, S. and Fang, C., 1997, "Nonsobre-sinaling and Monotone Nondecreasing Step Response of a Third-Order SISO Linear System". IEEE Trans. Automat. Control, vol. 42, no 9, p. 1299-1303.
- Mita, T.; Yoshida, H., 1981, "Undershooting Phenomenon and its Control in Linear Multivariable Servomechanisms", IEEE Trans. Automat. Control, vol. 26, no 2, pp. 402-407.
- Monte Alegre, D., Reis, C. A., Silva, N. A. P., Ferreira, M. J., 2006, "Análise De Sistemas De Controle De Terceira e Quarta Ordem Com Um Zero Real Simples". 8° SICT – FATEC, 2006, SP
- Moore, K. L and Bhattacharyya, S. P, 1990, "A Technique for Choose Zero Locations for Minimal Sobre-sinal" IEEE Trans. Automat. Control, vol. 35, no 5, pp. 577-580.
- Ogata, K., 1998, "Engenharia de Controle Moderno". Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro.
- Rachid, A., 1995, "Some conditions on zeros to avoid step-response extrema". IEEE Trans. Automat. Control, vol. 40, no 8, pp. 1501-1503.
- Reis, C. A., Messaoudi, A., Silva, N. A. P., 2005, "O sobre-sinal e a resposta inversa em sistemas de controle lineares contínuos no tempo". SBA Controle & Automação, Jan./Mar. 2005, vol. 16, no. 1, p. 60-69. ISSN 0103-1759.
- Reis, C. A., Silva, N. A. P., Teixeira, M. C. M., 2005-a, "Analysis Of Extremes, Overshoot And Undershoot In The Linear Control Continuous-Time System Of Third Order With Real Zeros And Poles", Anais do COBEM 2005: 18th International Congress of Mechanical Engineering, novembro de 2005, Ouro Preto, M. G.
- Reis, C. A., Messaoudi, A., Silva, N. A. P., 2004, "Análise de Extremos em Sistemas de Controle Lineares Contínuos de Terceira Ordem Com Pólos e Zeros Reais Estáveis". III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2004), Belém – PA.
- Reis, C. A., Silva, N. A. P., Teixeira, M. C. M., 2002, "O Sobre-sinal e a Reação reversa em Sistemas de Controle Lineares Contínuos no Tempo: Um Tutorial". Segundo Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2002), João Pessoa, PB.
- Silva N. A. P., Reis, C. A., 2001, "On The Definition of Type Ru Reação reversa in The Step Response". Anais da 1a Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle, São Carlos, S.P. pag.170-175.
- Vidyasagar, M., 1986, "On Reação reversa and Nonminimum Phase Zeros". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-31, no 5, pp. 440.

THE OVERSHOOT AND UNDERSHOOT IN LINEAR CONTROL SYSTEMS OF FOURTH ORDER WITH ONE REAL DOUBLE POLE AND A REAL ZERO

Dário Monte Alegre

UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Avenida Brasil Centro nº 56, Ilha Solteira – SP.

dmalegre@gmail.com

Célia Aparecida dos Reis

celia@mat.feis.unesp.br

Neusa Augusto Pereira da Silva

neusa@mat.feis.unesp.br

Abstract: *The subject of this paper is the classification and analysis of extremes, overshoot and undershoot in stable linear control systems, continuous in time, of fourth order, with a real pole of multiplicity two and a real simple zero.*

Keywords: *Critical Points, Overshoot, Undershoot*