PROTEÇÃO TÉRMICA ABLATIVA EM UMA PLACA PLANA FINITA SUJEITA A UM FLUXO DE CALOR TRANSIENTE.

Marcus Vinícius Canhoto Alves
Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, FEIS-UNESP, Av. Brasil Central 56, Caixa postal 31.Cep. 15.385.000

Palavras Chave: Ablação, mudança de fase, alta velocidade, transformada integral.

RESUMO

Transferência de calor em sólidos envolvendo ablação é de importância considerável em inúmeras aplicações na engenharia. O processo de ablação envolve uma evaporação física ou "pirólise", na superfície de um material exposto a um gás a alta temperatura, mas, não conta apenas com o calor absorvido pelo processo de evaporação para proteção térmica. A mudança de fase do material em ablação produz, um efluxo gasoso da superfície na camada limite aerodinâmica aumentando sua espessura.

Consideraremos aqui o problema de condução de calor unidimensional em uma placa plana finita inicialmente com temperatura prescrita T_0. A placa está sujeita a um fluxo de calor transiente em uma das faces e isolada na outra. A placa se aquece até um dado tempo τ_f, a partir do qual inicia-se um processo ablativo na fronteira sujeita ao fluxo de calor. O material fundido é arrastado para o meio ambiente caracterizando-se como um processo de ablação descrito anteriormente. Este trabalho tem por objetivo desenvolver as condições iniciais para o processo ablativo, resolvendo analiticamente o problema pré-ablativo descrito abaixo. Para melhor analisar o problema ele será dividido em duas partes, uma pré-ablativa e outra com ablação.

Assim as equações que governam o problema com as variáveis na forma adimensional são as que se seguem;

- período pré-ablativo:

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < t < \tau_f \text{ , } 0 < x < 1 \qquad (1)$$

com a condição inicial,

$$\theta(x,t) = 0 \quad , \quad \text{se } 0<x<1 \qquad (2)$$

e as condições de contorno,

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{se } x=1 \qquad (3)$$

$$\frac{-\partial\theta(x,t)}{\partial x} = Q(t) \quad , \quad \text{se } x=0. \qquad (4)$$

- período ablativo:

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_f < t < \infty, S(t) < x < 1 \qquad (5)$$

com a condição inicial,

$$\theta(x,t) = \theta_m(x,t) \quad , \quad \text{se } t=\tau_f,\ 0<x<1 \qquad (6)$$

e as condições de contorno,

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{se } x=1 \qquad (7)$$

$$\theta(x,t) = 1 \quad , \quad \text{se } x=S(t) \qquad (8)$$

com a seguinte condição de acoplamento:

$$\frac{-\partial\theta(x,t)}{\partial x} + \nu\frac{dS(t)}{dt} = Q(t) \quad , \quad x=S(t). \qquad (9)$$

A distribuição de temperatura no tempo τ_f é $\theta_m(x, t)$, obtida do período pré-ablativo. E a equação (1) é dada de um modo mais conveniente a seguir:

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} + L\theta(x,t) = 0 \qquad (10)$$

onde L é o operador diferencial igual a $(-)\frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2}$.

Agora se procura resolver a equação (10), pela aplicação a Técnica da Transformada Integral (TTIG), para isto, define-se um problema auxiliar de autovalor na forma

$$\mu^2 \Psi(x) = L\Psi(x) \qquad (11)$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} = 0 \quad , \quad x=0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} = 0 \quad , \quad x=1. \qquad (13)$$

Da solução deste problema de autovalor, vêm, respectivamente os autovalores e autofunções,

$$\mu_i = i\pi \quad \text{e} \quad \Psi_i(x) = \cos(\mu, X). \qquad (14)$$

E pela propriedade de ortogonalidade do problema de autovalor, obtém-se a norma das autofunções dada pela equação;

$$N_i = \int_0^1 \cos(i\pi x)dx. \qquad (15)$$

Multiplicando-se a equação (10) $\Psi_i(x)$ e a equação (11) por $\theta(x,t)$, somando-se e aplicando o operador integral, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \Psi_i(x)\theta(x,t)dx + \int_0^1 [\Psi_i(x)L\theta(x,t) - \theta(x,t)L\Psi_i(x)]dx + \mu_i^2 \int_0^1 \Psi_i(x)\theta(x,t)dx = 0. \qquad (16)$$

Assim define-se o par de Transformada Integral e Inversa, respectivamente,

$$\tilde{\theta}_i = \int_0^1 \Psi_i(x)\theta(x,t)dx, \qquad (17)$$

$$\theta(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Psi_i(x)}{N_i}\tilde{\theta}(t). \qquad (18)$$

Aplicando a transformada no problema, obtém-se a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem em função do tempo,

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_i(t)}{\partial t} + \mu_i^2 \tilde{\theta}_i(t) = Q(t) \quad , \quad 0 \le t \le \tau_f \qquad (19)$$

com a condição inicial,

$$\tilde{\theta}_i(t) = 0 \quad , \quad t = 0. \qquad (20)$$

A equação (19) pode ser solucionada aplicando-se a Transformada de Laplace, a solução geral é a seguinte:

$$\tilde{\theta}_i(t) = ke^{-\mu_i^2 t}\Big|_0^t + e^{-\mu_i^2 t}\int_0^t Q(t)e^{\mu_i^2 t}dt. \qquad (21)$$

A distribuição de temperatura na fase pré-ablativa é dada por:

$$\theta(x,t) = \theta_{av}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Psi_i(x)}{N_i}\tilde{\theta}(t). \qquad (22)$$

Onde $\theta_{av}(t)$ corresponde como mostrado por Özisik & Mikhailov [1970] ao índice $i = 0$ sendo:

$$\theta_{av}(t) = \int_0^t Q(t)dt \,. \qquad (23)$$

Uma vez concluída a fase pré-ablativa, passa-se a resolver a parte ablativa, quando $t > \tau_f$. Sabendo-se que a condição inicial do caso ablativo é a equação (22), faz-se conveniente uma mudança de variável nas equações (5) a (9), para melhor facilidade no desenvolvimento e também para homogeneizar o problema. Define-se assim a função:

$$\theta^*(x,t) = \theta(x,t) - 1 \qquad , \qquad \begin{matrix} S(t) < x < 1 \\ t > T_f \end{matrix} \,. \qquad (24)$$

Defini-se uma nova coordenada $\eta = 1 - x$ denotando a posição da fronteira por $x_b = S(t)$ para a nova coordenada, $\eta_b(t) = 1 - S(t)$. Com esta mudança de coordenada, as equações (5) a (9) são reescritas em função dos novos parâmetros do seguinte modo, e representam a fase ablativa:

$$\frac{\partial\theta^*(\eta,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta^*(\eta,t)}{\partial x^2} \qquad , \qquad t > \tau_f \qquad (25)$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\theta^*(\eta,t) = 0 \qquad , \qquad \eta = \eta_b(t) \qquad (26)$$

$$\frac{\partial\theta^*(\eta,t)}{\partial\eta} = 0 \qquad , \qquad \eta = 0 \qquad (27)$$

com a condição inicial, e

$$\theta^*(\eta,T_f) = \theta(1-\eta,T_f) - 1 \,, \qquad (28)$$

com a condição de acoplamento a seguir:

$$\frac{-\partial\theta^*(\eta,t)}{\partial x} + v\,\frac{d\eta_b(t)}{dt} = Q(t) \qquad , \qquad \eta = \eta_b(t). \qquad (29)$$

Nota-se que quando começa a ablação as incógnitas mais interessantes são, a espessura ablatida, a velocidade ablativa e a distribuição de temperatura.

Assim concluem-se as metas deste trabalho, com uma perspectiva futura promissora, que é a análise do período ablativo analiticamente pelo mesmo método apresentado aqui. A solução analítica exata para um fluxo de calor transiente em um sólido acompanhado de ablação é realmente o objetivo principal do estudo que ainda esta sendo desenvolvido.

Agradecimento: aproveito este espaço para agradecer ao meu orientador o Prof. Dr. Antônio João Diniz do departamento de Engenharia Mecânica da FEIS-UNESP de Ilha Solteira, que acreditou que eu seria capaz de desenvolver um trabalho com a responsabilidade e dedicação que uma iniciação científica em engenharia exige. E a todos aqueles que suportaram meu mau humor durante o desenvolver deste projeto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Mikhailov, M. D. and Özisik, M. N., Unified Analysis and Solutions of Heat And Mass Diffusion, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Kreith, F., Princípios da Transmissão de Calor, Cap. 12, ed. Edgard Blucher Ltda, 1973.