

# TRANSFERÊNCIA DE CALOR BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE

D.V.A. Junior, A.A.F. Donaggio

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Engenharia de Itajubá, Av. BPS, 1303, Pinheirinho, Itajubá MG, cep: 37.500-000

**Palavras Chaves: Transferência de Calor, Bidimensional, Elementos Finitos.**

## RESUMO

O método de elementos finitos é uma importante ferramenta para solução numérica de uma grande parte de problemas na Engenharia. Aplicações variam de deformação e análise de tensão de automóveis, aeronaves, estruturas de pontes, análises de fluxo de calor, escoamento de fluido, fluxo magnético, entre outros problemas. Com os avanços na tecnologia de computação e sistemas CAD, complexos problemas podem ser modelados com relativa facilidade. Este trabalho apresenta aplicações de elementos finitos em problemas de transferência de calor por condução e convecção na parede externa para geometrias bidimensionais com regime permanente.

O método de elementos finitos aqui apresentado é um método numérico que transforma problemas físicos representados, em geral, por equações diferenciais ou sistemas diferenciais em um sistema de equações algébricas. O processo de modelagem consiste em subdividir o domínio em vários subdomínios, chamados de elementos finitos. Assim ao invés de resolver o problema como um todo de uma só vez, as equações são formuladas para cada elemento e então, estas são combinadas para se obter a solução geral do problema. O método de Galerkin obtém as matrizes dos elementos considerando a condução, convecção e geração interna. Dessas matrizes cria-se, então, uma matriz global que, impondo as condições de contorno e resolvendo-se o sistema matricial, obtém-se a distribuição de temperatura em todo o corpo.

Como o trabalho aqui apresentado é sobre estudos de transferência de calor, a equação base utilizada é a equação de Poisson:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + Q = 0 \quad . \quad (1)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + q = 0 \quad , \quad (\text{em } S_q) \quad (2)$$

$$K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + K_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + h(\phi - \Phi_\infty) = 0 \quad , \quad (\text{em } S_h) \quad (3)$$

$$\phi = \Phi_B \quad . \quad (\text{em } S_T) \quad (4)$$

Utilizando o método de Galerkin, algumas transformações de variáveis, substituições de partes de equações e o teorema de Green, a equação (1), junto às (2), (3) e (4), se torna:

$$\begin{aligned} \int_V \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} K_{xx} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} K_{yy} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dV \{ \Phi \} + \int_{S_h} h [N]^T [N] dS \{ \Phi \} = \\ = \int_V Q [N]^T dV - \int_{S_q} q [N]^T dS + \int_{S_h} h \Phi_\infty [N]^T dS \end{aligned} \quad . \quad (5)$$

A equação (5) também pode ser escrita na forma matricial compacta para os elementos, como:

$$[K^e] \{ \Phi \} = \{ f^e \} \quad , \quad (6)$$

onde:

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV + \int_{S_h} h [N]^T [N] dS \quad , \quad (7)$$

$$\{f^e\} = \int_V Q[N]^T dV - \int_{S_q} q[N]^T dS + \int_{S_h} h\Phi_\infty [N]^T dS \quad , \quad (8)$$

sendo:

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \quad , \quad (9,10)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]}{\partial x} \\ \frac{\partial[N]}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad , \quad (11)$$

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]}{\partial x} & \frac{\partial[N]}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \quad , \quad (12)$$

$$[N] = [N_i \quad N_j \quad N_k] \quad \text{e} \quad [N]^T = \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} \quad . \quad (13,14)$$

Pode-se obter as matrizes globais através do sistema de equações na forma matricial global dado por:

$$[K]\{\Phi\} = \{F\} \quad , \quad (15)$$

onde: 
$$[K] = \sum_{e=1}^{NF} [K^e] \quad \text{e} \quad \{F\} = \sum_{e=1}^{NF} \{f^e\} \quad . \quad (16,17)$$

Este método, junto com as equações acima foram aplicados a um mancal, mostrado na figura 1, com condutividade térmica do material  $K_{xx} = K_{yy} = 50(\text{W}/\text{cm}^\circ\text{C})$ . Este mancal está sujeito a duas condições distintas. Na primeira condição não existe convecção em nenhuma das superfícies. A superfície  $S_T$  está a uma temperatura  $T_i=80^\circ\text{C}$ , enquanto que as superfícies  $S_h$  e  $S_q$  estão a uma temperatura  $T_e=20^\circ\text{C}$ . Na Segunda condição, tem-se na superfície  $S_T$  a temperatura  $T_i=80^\circ\text{C}$ , convecção na superfície  $S_h$  com temperatura ambiente  $T_\infty=25^\circ\text{C}$  e coeficiente de convecção  $h=10 \text{ W}/\text{cm}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ . A superfície  $S_q$  está isolada termicamente. Com esses dados foram montados as malhas e distribuição de temperatura ao longo de todo o mancal para os dois casos citados acima.

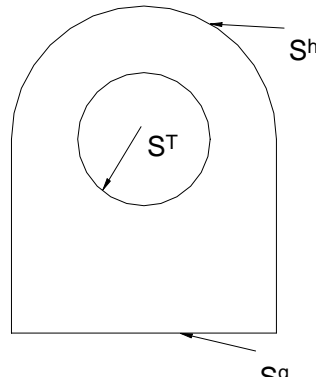


Figura 1: Geometria e superfícies o mancal.

Foi desenvolvido um código computacional para obter a distribuição de temperaturas para o problema bidimensional em regime permanente. As figuras 2(a) e 3(a) representam a malha de elementos utilizada para os cálculos junto às distribuições de temperatura e as figuras 2(b) e 3(b) representam a distribuição de temperatura ao longo de todo o mancal, livre da malha.

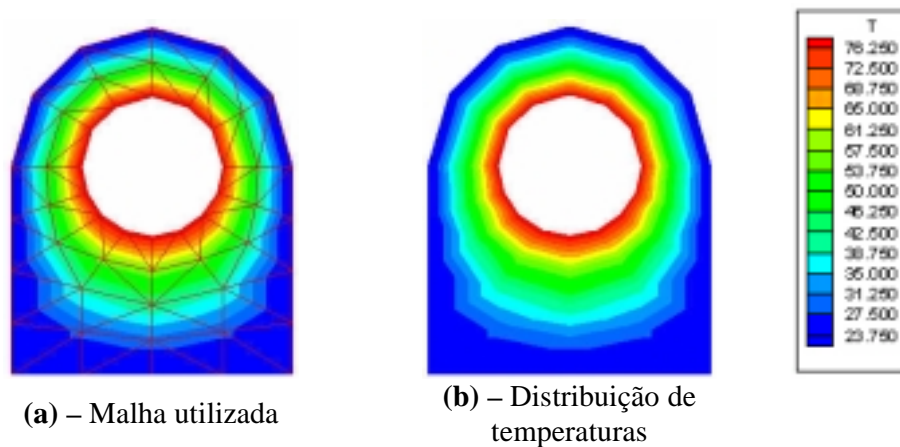


Figura 2: Resultados da Distribuição de Temperaturas do Mancal sem Convecção

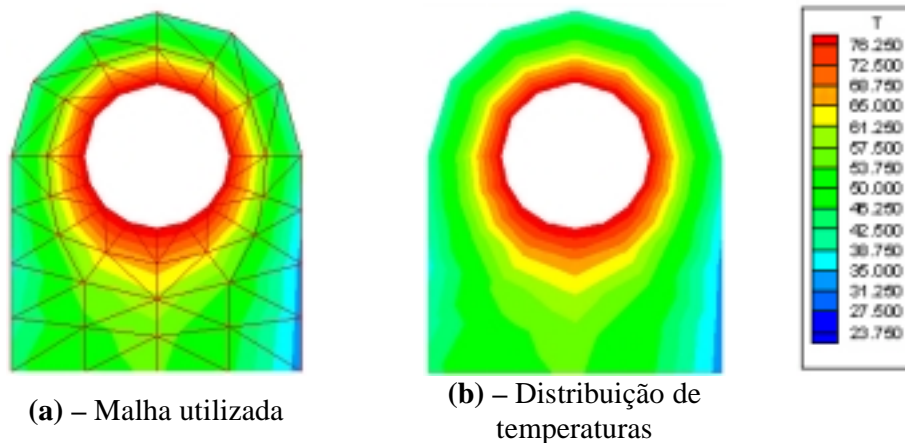


Figura 3: Resultados da Distribuição de Temperaturas do Mancal com convecção e base isolada

Nota-se que quando a base do mancal foi isolada e suas superfícies restantes foram submetidas à convecção, este trabalha com temperaturas médias maiores do que se todas as suas superfícies ( $S_h$  e  $S_q$ ) fossem mantidas à uma temperatura constante. Também que com o isolamento da base e existência de convecção ocorreu uma tendência das isotérmicas de se tornarem paralelas e perpendiculares à base.

**Agradecimentos: os autores agradecem à CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo suporte financeiro e pela Bolsa de Iniciação Científica, bem como ao professor Dr. Genésio José Menon pela paciência e ensinamentos a eles dedicados.**

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Junior, D.V.A. - Transferência de Calor em Problemas Uni, Bi, e Tridimensionais em Regimes Permanente e Não-Permanente Utilizando o Método de Elementos Finitos, Relatório Final do Projeto CNPq, julho de 2001.
- Chandrupatla, T.R. & Belegundu, A.D. - Introduction to Finite Elements in Engineering, second edition, editora Prentice Hall, 1997.
- Brebbia, C.A. & Ferrante, A.J. - Computational Methods for the Solution of Engineering Problems, Pentech Press Limited, 1978.