

# POSICIONAMENTO DE SENSORES E ATUADORES EM VIGAS ATIVAS

L. F. de A. GIOVANNETTI, J. J. de LIMA Jr.

Departamento de Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Av. BPS, 1303, Pinheirinho, Itajubá MG, CEP: 37.500-903.

**Palavras Chaves: Estruturas Inteligentes, Viga, Atuadores, Sensores.**

## RESUMO

Uma das tecnologias que vêm sendo investigadas para o controle ativo de estruturas flexíveis é a do uso de sensores e atuadores piezelétricos distribuídos ao longo da estrutura. O material piezelétrico é caracterizado por dois fenômenos, efeito direto e indireto, os quais permitem que ele seja usado como sensor e atuador distribuídos em controle de sistemas. Dentre os estudos importantes para viabilizar essa tecnologia, destaca-se a otimização do posicionamento de sensores e atuadores tendo em vista a estabilidade e o desempenho do controlador (Costa e Silva, 1997) e (Giovannetti, 2001). Neste trabalho, considera-se como medida ideal para manusear o grau de controlabilidade e observabilidade do sistema o menor autovalor das matrizes grammianas. Pode-se mostrar que o autovalor mínimo atinge um máximo em pontos que coincidem com a deflexão máxima e é zero onde a viga não sofre nenhuma deformação.

A equação constitutiva da piezoeletricidade linear é (Lima Jr, 1999):

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [c^E] \{\epsilon\} - [e] \{E\} \\ \{D\} &= [e]^T \{\epsilon\} + [\xi^E] \{E\} \end{aligned} \quad (1)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} [e] &= [c^E][d] \\ [\xi^E] &= [\xi^\sigma] - [d]^T [c^E][d] \end{aligned} \quad (2)$$

onde:  $\{\sigma\}$  é o tensor tensão mecânica;  $\{\epsilon\}$  o tensor deformação;  $\{E\}$  o vetor campo elétrico;  $\{D\}$  o vetor deslocamento elétrico;  $[c^E]$  a matriz elasticidade para campo elétrico constante;  $[e]$  a matriz de constantes de tensões piezelétricas;  $[\xi^E]$  o tensor de constantes dielétricas para deformação constante;  $[\xi^\sigma]$  a matriz de constantes dielétricas para tensão mecânica constante e  $[d]$  a matriz de constantes de deformações piezelétricas.

A discretização da estrutura será feita com elementos de viga isoparamétricos, com três graus de liberdade por nó. O polinômio de interpolação para o deslocamento horizontal será linear, enquanto ao deslocamento vertical será cúbico.

Com estas considerações, as aproximações nodais ficam:

$$\begin{cases} u \cong \bar{u} = [N_u] \{\bar{q}_i\} \\ w \cong \bar{w} = [N_w] \{\bar{q}_i\} \\ \phi \cong \bar{\phi} = [N_\phi] \{\bar{q}_i\} \end{cases} \quad (3)$$

onde:

$$\{\bar{q}_i\} = [\bar{u}_i \quad \bar{w}_i \quad \bar{\theta}_{y_i} \quad \bar{u}_j \quad \bar{w}_j \quad \bar{\theta}_{y_j}]^T \quad (4)$$

$$\{\bar{\phi}_i\} = [\bar{\phi}_i \quad \bar{\phi}_j]^T \quad (5)$$

Somando a contribuição de todos os elementos, pode-se montar as matrizes globais, escrevendo o sistema global de equações de movimento, para um modelo de viga de Euler - Bernoulli, como:

$$\begin{cases} [M_{qq}]\{\ddot{q}\} + [K_{qq}]\{q\} + [K_{q\phi}]\{\phi\} = \{F_s\} \\ [K_{q\phi}]\{q\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{Q_s\} \end{cases} \quad (6)$$

Tomando o valor do potencial elétrico na segunda equação do sistema de equações, Eq. (6), pode-se escrever a equação do sensor, onde não existe potencial elétrico aplicado, como:

$$\{\phi\} = -[K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{q\phi}]\{q\} \quad (7)$$

Substituindo a Eq. (7) na primeira equação do sistema de equações, Eq. (6), obtêm-se a equação do atuador:

$$[M_{qq}]\{\ddot{q}\} + [K^+]\{q\} = \{F_q\} + \{F_{el}\} \quad (8)$$

com:

$$[K^+] = [K_{qq}] - [K_{q\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi q}] \quad (9)$$

$$\{F_{el}\} = -[K_{q\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}\{Q_s\} \quad (10)$$

onde:  $\{F_q\}$  é força mecânica externa e  $\{F_{el}\}$  é força elétrica externa, gerada pela aplicação de um potencial elétrico no PZT.

Para o desenvolvimento do método de otimização de posicionamento proposto, considera-se inicialmente, nenhuma força externa atuando no sistema, portanto  $\{F_{el}\} = 0$ .

Neste caso, a Eq. (8) deve ser escrita como:

$$[M_{qq}]\{\ddot{q}\} + [K^+]\{q\} = [b]\{u\} \quad (11)$$

onde:  $\{u\}$  representa o vetor de força de controle e  $[b] = -[K_{q\phi}][K_{\phi\phi}]^{-1}$  é a matriz de influência de posições dos elementos ativos na estrutura.

A Eq. (11) pode ser expressa, na formulação de espaços de estado, como:

$$\{\dot{z}\} = [A]\{z\} + [B]\{u\} \quad (12)$$

$$\{y\} = [C]\{z\} \quad (13)$$

onde:  $\{z\}$  representa o vetor de estados,  $\{y\}$  o vetor de saída, as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  representam o sistema,  $[C]$  a matriz de ganho dos sensores e  $\{u\}$  representa o vetor de entrada de controle, o qual pode ser expresso, usando o método de controle ótimo, pela teoria do regulador linear quadrático.

O vetor de controle pode ser escrito, quando se usa realimentação de estados, como:

$$\{u\} = -[G]\{z\} \quad (14)$$

onde:  $[G]$  é a matriz de ganho ótimo de realimentação.

O ganho deve satisfazer a equação:

$$[G] = [R]^{-1}[B]^T[S] \quad (15)$$

onde:  $[S]$  é a matriz de Ricatti e  $[R]$  uma matriz de ponderação.

A matriz ganho de realimentação ótima pode ser particionada para representar os ganhos ótimos referentes ao deslocamento e as velocidades.

Assim, tem-se:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_q \\ G_{\dot{q}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Substituindo a Eq. (16) na Eq. (11), tem-se:

$$[M_{qq}]\begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + [b]\begin{bmatrix} G_q \\ G_{\dot{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^+ \\ [b]G_q \end{bmatrix}\{q\} = \{0\} \quad (17)$$

A matriz gramiana de controlabilidade, para um tempo finito, é definida por:

$$[W_c(t_0, t_1)] = \int_0^{t_1} e^{[A](t_0-\tau)} [B][B]^T e^{[A](t_0-\tau)} d\tau \quad (18)$$

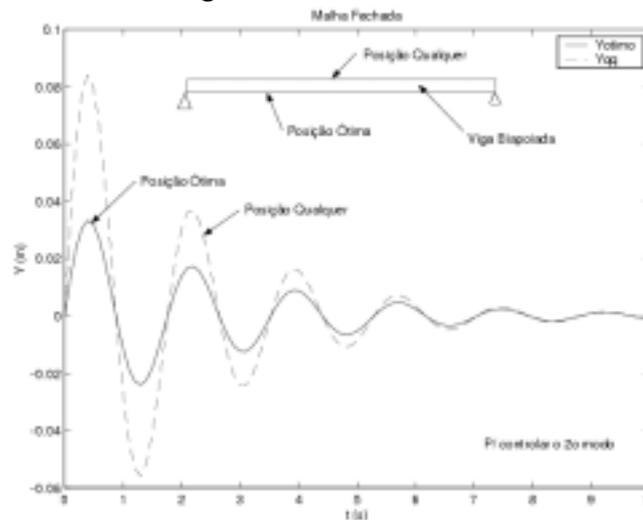
e de observabilidade por:

$$[W_o(t_0, t_1)] = \int_0^{t_1} e^{[A](t_0-\tau)} [C][C]^T e^{[A](t_0-\tau)} d\tau \quad (19)$$

Para demonstrar a eficiência do método, foi utilizando uma estrutura do tipo viga com condição de contorno livre nas extremidades, constituída de 25 elementos finitos do tipo viga de Euler-Bernoulli, cujas propriedades físicas e geométricas são: comprimento 1,8 (m), largura 25,9 (mm), espessura 3,45 (mm), peso específico 2711 (kg/m<sup>3</sup>) e módulo de Young 64,46 (GPa).

A Figura 1 mostra o efeito do posicionamento do atuador, para controlar o segundo modo de vibração da viga, com o atuador colocado a 0,36 (m) da extremidade direita, posição ótima e, posteriormente colocado a 0,9 (m) da mesma extremidade, posição qualquer.

Pode-se concluir que o posicionamento dos atuadores tem uma influencia importante na atuação do sistema de controle, e que o posicionamento ótimo pode ser avaliado através da análise dos autovalores das matrizes gramianas.



**Figura 1 – Resposta da Estrutura com o Atuador em uma Posição Ótima e Qualquer**

**Agradecimentos:** Os autores agradecem à FAPEMIG, pelo financiamento do Projeto TEC 341/99 e ao seu Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica, pela concessão de uma bolsa de I.C., os quais viabilizaram o desenvolvimento desta pesquisa.

#### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**

- Costa e Silva, V. M., Arruda, J. R. de F., 1997, “Otimização do Posicionamento de Atuadores Piezocerâmicos em Estruturas Flexíveis Usando um Algoritmo Genético”, Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 97, Bauru, SP, COB. 489, 8p.
- Lima Jr., J. J. de, Arruda, J. R. de F., 1999, “Viga Ativa Usando Atuadores e Sensores Piezelétricos Incorporados”, Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM99, artigo AAEEAB, 22 - 26/Nov/1999, Águas de Lindóia, Brasil, 9p.
- Giovannetti, L. F. de A., 2001, “Posicionamento de Sensores e Atuadores em Estruturas Ativas do Tipo Viga”, Relatório de Iniciação Científica, PIBIC FAPEMIG, Projeto TEC 341/98, 106p.