DESEMPENHO DE ALGUMAS ESTRATÉGIAS DE SIMPLIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EMPREGANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COMO FERRAMENTA DE SOLUÇÃO

Rafael Dias Pereira e Carlos Friedrich Loeffler
Departamento de Engenharia Mecânica, Centro Tecnológico, Universidade Federal do Espírito Santo, Av. Fernando Ferrari, s/n, Goiabeiras, Vitória ES, cep: 29.060-900

Palavras-chave: Equações Diferenciais Aplicadas, Elementos de Contorno.

RESUMO

Até o advento dos computadores, a maior parte das equações diferenciais que representavam problemas de engenharia era bastante difícil e mesmo impossível de se resolver, a menos que uma série de rigorosas simplificações pudesse ser considerada e transformasse o modelo original numa equação ordinária e linear. Prevaleciam, então, outros métodos de solução, concentrados na área experimental. A maior parte desses era de natureza empírica, mas deles dependiam os projetos mais arrojados para que pudessem ser efetivamente concretizados. Não é difícil imaginar os significativos encargos produzidos pelo custo de ensaio desses modelos, sobretudo quando a complexidade do projeto exigia a construção de um ou mais espécimes similares para serem devidamente testados nas condições de operação.

Atualmente existem diversos métodos numéricos capazes de resolver modelos matemáticos de elevada complexidade e grande porte, mas isto não significa de modo algum que questões importantes relacionadas à precisão e ao dispêndio no processamento destas soluções não devam ser mais consideradas. Devido a isto, intensas pesquisas ainda são realizadas visando otimizar a aplicação destes métodos na engenharia. Uma das estratégias existentes mais comuns nesse sentido consiste na simplificação do modelo matemático a ser resolvido, através de substituição das variáveis originais por outras auxiliares. Em princípio, qualquer forma de simplificação parece ser altamente positiva, mas é necessário avaliar se estas transformações não implicam em perda de precisão ou introdução de outro esforço que resulte em custo computacional maior para compensar a simplicidade obtida na formulação da equação de governo.

O objetivo deste trabalho, portanto, é realizar simulações computacionais comparativas, cujos resultados permitam avaliar criteriosamente se determinadas estratégias envolvendo mudanças de variável são de fato vantajosas ou não, considerando outros aspectos além da simplicidade apresentada pela equação de governo.

Este trabalho enfoca particularmente o desempenho de uma série de transformações de variáveis que tornam equações diferenciais de governo, típicas de certos fenômenos físicos, em equações mais simples, menos custosas de se resolver mesmo computacionalmente. São abordadas estratégias nas quais são feitas substituições de variáveis que transformam os seguintes casos:

(a) Problemas expressos pela Equação de Poisson em problemas dados pela Equação de Laplace, ou seja, casos matematicamente heterogêneos em casos homogêneos. Assim, a partir de uma Equação de Poisson, dada por:

$$K[\, \partial^2(u)/\partial x^2 + \partial^2(u)/\partial y^2 \,] = p$$

Uma adequada transformação de variáveis permite escrever o mesmo problema como:

$$\partial^2(w)/\partial x^2 + \partial^2(w)/\partial y^2 = 0$$

(b) Problemas difusivos-advectivos em problemas expressos pela equação de Helmholtz. Neste caso, permanece o operador laplaciano, mas as derivadas de primeira ordem são eliminadas. Assim, a partir da equação:

$$K\,[\partial^2(u)/\partial x^2 + \partial^2(u)/\partial y^2\,] = U\,[\partial(u)/\partial x] + V\,[\partial(u)/\partial y]$$

É possível encontrar uma nova variável w tal que:

$$K[\,\partial^2(u)/\partial x^2 + \partial^2(u)/\partial y^2\,] - \lambda\, u = 0$$

(c) Problemas difusivos não-lineares em casos lineares, via Transformada de Kirchoff. Neste caso, uma equação do tipo:

$$Kxx\ \partial^2(u)/\partial x^2 + Kyy\ \partial^2(u)/\partial y^2 + [\partial Kxx/\partial u]\,[\partial(u)/\partial x]^2 + [\partial Kyy/\partial u]\,[\partial(u)/\partial y]^2 = 0$$

Modifica-se de modo a expressar-se como:

$$\partial^2(w)/\partial x^2 + \partial^2(w)/\partial y^2 = 0$$

Todas estas transformações implicam em mudança nas condições de contorno, que via de regra, ficam mais trabalhosas.

Para se proceder à solução dos problemas nas versões propostas e poder comparar seus resultados, é necessário empregar métodos numéricos, pois a simulação analítica é inviável na maior parte dos casos, especialmente nas situações onde o domínio espacial é bidimensional.

Os principais métodos numéricos disponíveis atualmente são baseados na idéia de discretização, isto é, na substituição de um domínio contínuo das variáveis por um conjunto finito de pontos representativos do mesmo. Pode-se constatar que o resultado da aplicação das técnicas de discretização consiste na transformação dos operadores diferenciais por operadores algébricos, fáceis de se resolver computacionalmente.

Dentre as técnicas mais importantes na atualidade pode-se citar o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). As três primeiras são conhecidas como técnicas de domínio, pois a discretização se processa em todo o domínio; mas a última é uma técnica de contorno, pois somente a discretização das fronteiras é necessária.

A escolha de um método numérico é sempre um ponto discutível, pois são muitas as questões aí envolvidas e a pesquisa em torno deles está longe de cessar. Embora não seja o mais popular, o MEC vem se firmando como uma das técnicas mais precisas e vantajosas.

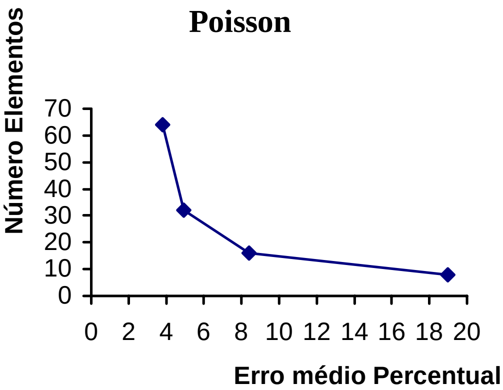
Neste trabalho será empregado o MEC para simulação computacional dos problemas, mas qualquer outra das técnicas citadas poderia ser utilizada com o mesmo propósito, pois o objetivo primordial não depende do método numérico escolhido.

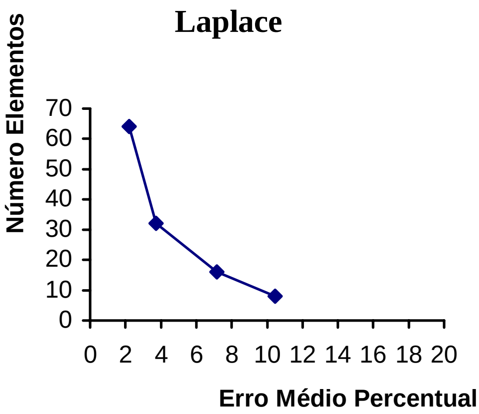
Em linhas gerais, o MEC transforma uma equação diferencial parcial num sistema de equações algébricas, e para fazê-lo é preciso inicialmente escrever o modelo matemático numa forma integral inversa, usando para esta finalidade os recursos da teoria das equações integrais, como o Teorema da Divergência, por exemplo. Com a obtenção da forma inversa como expressão matemática, necessita-se em seguida obter o modelo numérico correspondente, trabalhando agora com a formulação do MEC como técnica de discretização. Trabalhar com o MEC como técnica numérica consiste principalmente em substituir a equação integral por um sistema matricial algébrico que será resolvido computacionalmente.

A implementação de todas as etapas anteriores resultam na transformação do modelo diferencial dado num sistema matricial do tipo:

$$\mathbf{Ax=f}$$

Foram implementadas simulações computacionais nas três categorias apresentadas. Por limitações de espaço, a seguir é mostrado um gráfico típico de comparação de resultados, avaliando o erro percentual de acordo com o refinamento da malha no caso de uma barra prismática de seção quadrada, sob torção. Originalmente a equação de governo expressa-se por uma Equação de Poisson, na forma $\nabla^2\phi=-2G\theta$, mas de acordo com a transformação proposta no item (a), este mesmo problema pode ser resolvido por uma equação de Laplace, ou seja, $\nabla^2 u=0$. Os gráficos mostrados a seguir apresentam resultados obtidos pelas duas metodologias, usando o Método dos Elementos de Contorno.





Os resultados obtidos nesta aplicação mostraram uma grande vantagem na utilização da transformação de variáveis, pois além do modelo matemático ser mais simples, a precisão dos resultados foi superior, necessitando de um menor número de pontos de discretização para produzir erros menores. A alteração nos valores das condições de contorno não influenciou negativamente os resultados, nem introduziu qualquer dispêndio significativo.

BIBLIOGRAFIA:

Timoshenko, S.P., Goodier, J.N. - Teoria da Elasticidade, 3ª Edição, Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1980.
Partridge, Paul W. - Convective Problems Using The Boundary Element Dual Reciprocity Method With And Without Transform Techniques. Computational Methods In Engineering-99, XX Cilamce, São Paulo, 1999.
Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel,L.C. – Bondary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin, 1984.