

OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL DE TRELIÇAS

Marcelo de França Cordeiro
Orientação Prof. José Herskovits

Departamento de Engenharia Mecânica da UFRJ, Rio de Janeiro



Palavras-chave: Otimização Dimensional, Análise Estrutural, Treliça

RESUMO

A otimização dimensional é um problema que vem sendo estudado desde a década de 50, e desde então evoluiu-se muito. Tem-se como objetivo minimizar a seção transversal de cada barra contida na estrutura. Das disciplinas de engenharia, o design estrutural, ou otimização estrutural, é um dos problemas mais complexos de otimização numérica. A álgebra linear e os métodos matriciais serviram como uma luva para a teoria de análise estrutural. Aliado a isso, com os computadores, que fazem cálculos complexos muito rapidamente, têm-se uma ferramenta poderosa para os engenheiros.

Uma estrutura real é muito complexa para ser estudada, devido ao seu comportamento não-linear de diversas variáveis como a geometria e a deformação. O modelo utilizado para representar as estruturas de barras a serem otimizadas é chamado de Treliça. Este modelo consiste em desprezar momentos e tensões cisalhantes nestas barras(ou elementos):



Figura 1 – Modelo de treliça

A junção de dois ou mais elementos, que chamaremos de nó, é em forma de rótula. Considera-se também que as barras têm uma deformação linear, ou seja, estão de acordo com a lei de Hooke:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Generalizando:

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (2)$$

F é vetor de forças, **K** é a matriz de rigidez, e **U** é o vetor de deslocamentos.

Estas simplificações facilitarão muito o cálculo estrutural.

Para efetuar o cálculo estrutural, usaremos o método de elementos-finitos, que consiste em montar uma matriz de rigidez global da estrutura, na qual é composta por diversas matrizes menores de cada elemento, que chamaremos de matriz de rigidez do elemento.

De acordo com o livro *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis* – Harold C. Martin, tem-se que :

A matriz de rigidez global do elemento é dada por:

$$Ke_G = T^T \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} T \quad (3)$$

A é a área da seção transversal, **E** o módulo de elasticidade, **L** o comprimento da barra e **T** a matriz de rotação de um referencial local para um global, em relação à um elemento.

A matriz de rigidez global da estrutura terá um formato :

$$K_G = \sum_1^n Ke_G \quad (4)$$

n é o número de barras da estrutura.

Calculada a matriz de rigidez, resolve-se o sistema (2), levando em conta as restrições nodais, e obtêm-se as tensões e deslocamentos desconhecidos. Os valores da tensão local σ e deslocamentos nodais U , serão usados para impor restrições ao problema de otimização que é definido da seguinte maneira, segundo o livro Numerical Optimization Techniques for Engineering Design – Garret N. Vanderplaats:

$$\begin{aligned} \min \text{Peso}(A) &= \rho A^T L \\ \text{tq}(\text{restrições}) &: \frac{|\sigma| - \sigma_{\max}}{\sigma_{\max}} \leq 0, \frac{|U| - U_{\max}}{U_{\max}} \leq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

σ_{\max} representa a tensão máxima admitida em cada elemento, U_{\max} é o deslocamento nodal máximo, A é vetor de áreas, L vetor de comprimentos, ρ é peso específico.

Para otimizar o projeto, foi usado um algoritmo de otimização não-linear com restrições, no qual faz iterações a partir de um valor inicial até convergir para o resultado final, que no caso é a área mínima. O algoritmo utilizado nesse trabalho foi o **FMINCON**, uma função do toolbox de Otimização do **MatLab**. Este algoritmo faz uso dos valores das derivadas da função objetivo(Peso) e restrições em relação às áreas para facilitar o processo iterativo. Derivando a função **Peso**, U e σ , em relação à área, obtêm-se:

$$\frac{\partial \text{Peso}}{\partial A} = \rho L \quad \frac{\partial U}{\partial A_i} = K_G^{-1} \left[-\frac{\partial Ke_G^i}{\partial A_i} U \right] \quad \frac{\partial \sigma_{Le}^j}{\partial A_i} = \left(\frac{E}{L_j} [-1 \quad 1] \right) \frac{\partial u_G^j}{\partial A_i} \quad (6)$$

Este modelo de otimização apresenta resultados satisfatórios, tanto pela velocidade de cálculo como pela sua facilidade de modelagem do problema.

Uma treliça clássica de 72 barras foi otimizada, a cargo de exemplo:

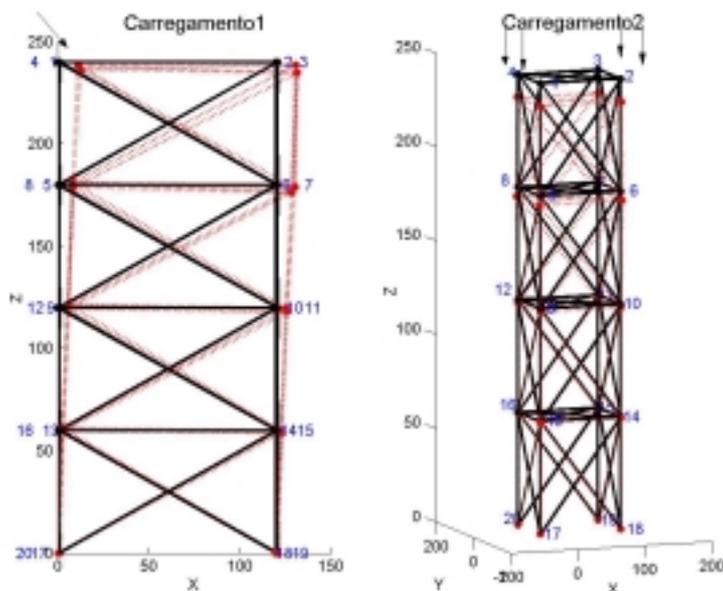


Figura 2 – Treliça de 72 barras sujeita a dois carregamentos

Tabela 1 - Forças Externas(lbs)				
Carregamento	Nó	X	Y	Z
1	1	5000	5000	- 5000
2	1	0	0	- 5000
	2	0	0	- 5000
	3	0	0	- 5000
	4	0	0	- 5000

Tabela 2 – Dados iniciais						
Peso Específico (lb/in ³)	Módulo de Elasticidade (lb/in ²)	Tensão Máxima de Tração (lb/in ²)	Tensão Máxima de Compressão (lb/in ²)	Área Mínima (in ²)	Área Inicial (in ²)	Desloc. Nodal Máximo (in)
0.1	10000000	25000	25000	0.1	1	0.25

Com estes dados iniciais das tabelas 1 e 2, chegou-se no seguinte resultado ótimo, e comparou-se com um resultado existentes na literatura :

Tabela 3 – Resultados da Otimização da Treliza de 72 barras		
Variável de Projeto	Área Final Otimizada(in ²)	
	Resultado Obtido	Herskovits
1	0.1565	0.1704
2	0.5456	0.5379
3	0.4104	0.4055
4	0.5697	0.5655
5	0.5237	0.5757
6	0.5171	0.5238
7	0.1000	0.1000
8	0.1000	0.1000
9	1.2684	0.1258
10	0.5117	0.5069
11	0.1000	0.1000
12	0.1000	0.1000
13	1.8862	1.918
14	0.5123	0.5118
15	0.1000	0.1000
16	0.1000	0.1000
Peso Final(lb)	545.036	545.172
Tempo total da otimização : 158 s		

Analisando a tabela 3, conclui-se que o modelo de otimização usado nesse trabalho foi validado, atingindo valores satisfatórios. O tempo de processamento para se completar a otimização foi consideravelmente baixo, habilitando o uso desse modelo para estruturas mais robustas.

Agradecimentos: agradeço ao Prof. José Herskovits e ao Doutorando Paulo Mappa por terem me auxiliado nesse trabalho e também ao CNPq, por incentivar a pesquisa no Brasil.

REFERÊNCIAS

Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis – Harold C. Martin
 Numerical Optimization Techniques for Engineering Design – Garret N. Vanderplaats

Aproximation Concepts for Efficient Structural Synthesis – Lucien A. Schmit Jr, Hirokazu Miura

Um Sistema Automático de Projeto de Estruturas Ótimas – José Herskovits