



**VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING**  
**18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil**  
*August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil*

## **USANDO A EQUAÇÃO DE LAPLACE MODIFICADA E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA A SUAVIZAÇÃO DE MALHAS EM PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA**

**Breno Eduardo Liberato Azevedo, [breno.eduardo@hotmail.com](mailto:breno.eduardo@hotmail.com)**  
**Alessandro Romario Echivarria Antunes, [areantunes@yahoo.com.br](mailto:areantunes@yahoo.com.br)**  
**Paulo Roberto Maciel Lyra, [prmlyra@ufpe.br](mailto:prmlyra@ufpe.br)**

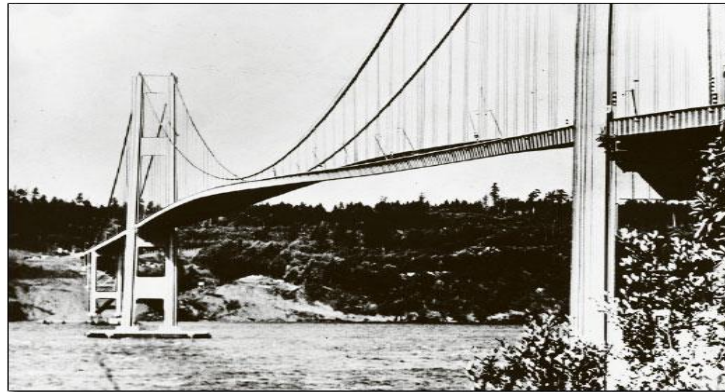
Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Mecânica, Rua Acadêmico Hélio Ramos, S/N,  
CEP: 50.740-530, Recife, PE – Brasil

***Resumo:** Neste trabalho são apresentadas algumas comparações de estratégias de movimentação e suavização de malhas envolvendo fronteira móvel na simulação numérica de problemas de interação fluido-estrutura (IFE), que tipicamente utilizam uma descrição ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) no domínio móvel, enfatizando a utilização do Método dos Elementos Finitos na solução de uma equação de Laplace modificada. Estas estratégias serão posteriormente incorporadas a um programa computacional de simulação de problemas de IFE, desenvolvido pelos autores deste trabalho. Os exemplos numéricos reforçam a necessidade de estratégias adequadas de suavização de malhas para minimizar a necessidade de redefinição de malhas e tem também objetivo de aferir a importância de utilizar uma técnica apropriada às características do problema em foco e a influência da escolha da mesma sobre o resultado final.*

***Palavras-chave:** interação fluido-estrutura, dinâmica dos fluidos computacional, método dos elementos finitos.*

## 1. INTRODUÇÃO

Muitas estruturas estão sujeitas à ação de escoamento de fluido. Estes escoamentos induzem a estrutura a oscilações, podendo assim vir a comprometer sua integridade estrutural. O exemplo mais famoso de colapso estrutural gerado por escoamento de fluido foi o colapso da ponte suspensa de Tacoma Narrows (1940), com foto mostrada na figura 1.



**Figura.1:** Ponte suspensa de Tacoma Narrows (1940), momentos antes do colapso.

Este acontecimento serviu de estímulo para o desenvolvimento de pesquisas que viessem elucidar o fenômeno acontecido. No presente trabalho descrevemos a implementação de algumas técnicas de movimentação de malha com o intuito de reduzir o número de redefinição de malhas, sendo esta uma etapa indispensável de uma ferramenta capaz de simular problemas de interação fluido-estrutural. Em tal ferramenta é comum fazer uso de uma formulação do tipo ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian), reduzindo assim o custo computacional de tal ferramenta; tratar o problema estrutural considerando-a como sendo um corpo rígido ‘pontual’; a projeção das variáveis obtidas para o centro de massa do corpo rígido para toda sua superfície através das equações de compatibilidade; e a descrição do acoplamento do problema da estrutura com o problema da malha.

## 2. METODOLOGIA

### 2.1. Análise da Estrutura

A Equação governante da análise dinâmica de um sólido rígido ‘pontual’ é dada por:

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + KX = F \quad (1)$$

onde ‘M’ é a massa da estrutura, ‘C’ representa o coeficiente de amortecimento do sistema, ‘K’ representa a rigidez associada à estrutura,  $F$  representa o carregamento na estrutura,  $X$  representa o deslocamento e cada ponto sobre ele representa uma derivação em relação ao tempo.

Este sólido rígido pontual pode ser visto como a idealização de um sólido rígido onde toda a sua massa foi concentrada no seu centro de gravidade. Foi utilizado o método de Newmark (Hughes, 1887) para resolver numericamente a equação acima, este método consiste em definirmos preditores para o deslocamento e a velocidade da estrutura, uma vez dado o carregamento, e calcularmos a aceleração da estrutura e através dela definirmos corretores para o deslocamento e a velocidade.

Preditores:

$$x^{t+\Delta t} \sim x^t + \Delta t v^t + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) a^t \quad (2)$$

$$\tilde{v}^{t+\Delta t} = v^t + (1-\gamma)\Delta t a \quad (3)$$

Aceleração:

$$(M + \gamma\Delta t C + \beta\Delta t^2 K)a^{t+\Delta t} = (F^{t+\Delta t} - C\tilde{v}^{t+\Delta t} - K\tilde{x}^{t+\Delta t}) \quad (4)$$

Corretores:

$$\tilde{x}^{t+\Delta t} = x^t + \beta\Delta t^2 a^{t+\Delta t} \quad (5)$$

$$\tilde{v}^{t+\Delta t} = v^t + \gamma\Delta t a^{t+\Delta t} \quad (6)$$

Os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  são escolhidos de forma a se obter um método incondicionalmente estável. Isto é importante pois perante que o tamanho do passo de tempo seja definido apenas pelo problema fluido.

## 2.2. Compatibilidade Cinemática

As relações cinemáticas na interface fluido-estrutura a serem satisfeitas dizem respeito aos campos de velocidade e deslocamento nesta interface. As equações descritas na secção anterior permitem obter as variáveis cinemáticas para o centro de gravidade da estrutura, sendo assim é necessário projetar as variáveis sobre todos os nós da superfície da estrutura. Isto é feito através de uma matriz de transformação (Löhner, 2001).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) \cos(\varphi) & \sin(\alpha) \sin(\Theta) \cos(\varphi) + \cos(\alpha) \sin(\varphi) & -\cos(\alpha) \sin(\Theta) \cos(\varphi) + \sin(\alpha) \sin(\varphi) \\ -\cos(\Theta) \sin(\varphi) & -\sin(\alpha) \sin(\Theta) \sin(\varphi) + \cos(\alpha) \cos(\varphi) & \cos(\alpha) \sin(\Theta) \sin(\varphi) + \sin(\alpha) \cos(\varphi) \\ \sin(\Theta) & -\sin(\alpha) \cos(\Theta) & \cos(\alpha) \cos(\Theta) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Que representa a matriz de rotação usada para estabelecer a compatibilidade cinemática (Farhat et al., 1998), onde:  $\alpha$ ,  $\Theta$  e  $\varphi$  são os ângulos de rotação da estrutura em relação aos eixos X, Y e Z respectivamente.

O referencial adotado para o problema é transladado até que a sua origem coincida com o centro de gravidade da estrutura, calculamos o vetor posição de cada nó da superfície da estrutura em relação a este referencial e posteriormente multiplicamos pela matriz acima, obtendo assim as novas coordenadas dos nós. Em seguida calculamos o deslocamento do nó em relação ao novo sistema de coordenadas, e por fim atualizamos as coordenadas dos nós no sistema de coordenadas antigo.

Vale observar que o vetor deslocamento obtido no novo sistema de coordenadas pode ser usado para o antigo sistema já que na obtenção do novo sistema não houve nenhuma rotação.

## 2.3. Movimento da Malha

Numa simulação de fenômenos envolvendo interações fluido-estruturais existem dois problemas físicos a serem resolvidos, o do escoamento do fluido, e o da dinâmica da estrutura, governado pela Eq. (1) que no nosso caso considerou-se a equação da dinâmica de um sólido rígido.

Classicamente existem duas formulações que são utilizadas para descrever problemas de mecânica do contínuo, são elas: Lagrangiana, na qual a malha move-se solidária ao contínuo (esta é ideal para tratar problemas da mecânica dos sólidos), e Euleriana, onde a malha de referência é fixa (esta é ideal para tratar problemas da mecânica dos fluidos). No tratamento de um problema de interação fluido-estrutura, utilizamos uma formulação Lagrangiana no contorno da estrutura, uma formulação Euleriana no contorno da malha e precisamos de uma formulação intermediária no domínio,

de forma que consigamos manter a qualidade da malha por mais tempo, prorrogando assim a necessidade de redefinição de malha. Esta formulação é conhecida como “ALE”. Existem várias formas de tratar a deformação da malha onde uma formulação do tipo “ALE” é empregada. Neste trabalho, foram utilizados três modelos: o de ‘Decaimento Linear’ e o de ‘Molas Lineares (Antunes, 2002), e empregando uma suavização Laplaciana, (Löhner, 2001; Kanchi e Massud, 2007) a Fig. (2) ilustra uma possível subdivisão de um domínio computacional em subdomínios com as diferentes descrições discutidas anteriormente.

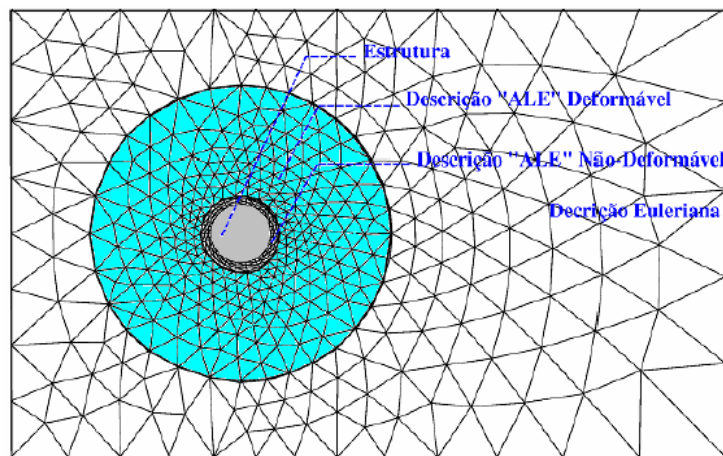
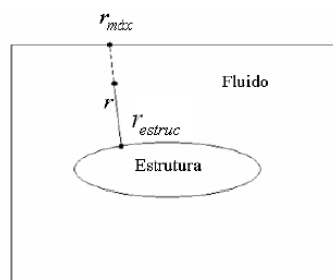


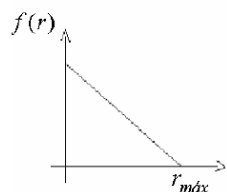
Figura.2: Divisão do domínio

### 2.3.1 Decaimento Linear

A idéia deste método é fazer com que o deslocamento varie linearmente desde a superfície da estrutura, até o contorno fixo (Löhner, 2001).



(a)



(b)

Figura. 3: Esquema do modelo de Decaimento Linear, (a) mostra os parâmetros geométricos necessários à avaliação da função de decaimento e (b) representa a variação desde a estrutura até o contorno do domínio.

Dado o deslocamento da estrutura, o deslocamento de cada nó que está a uma distância ‘r’ da estrutura é dado por:

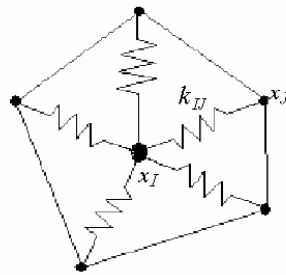
$$f(r) = \Delta x - \frac{\Delta x}{l} r \quad (8)$$

Onde  $r_{estruc}$  e  $r_{máx}$  representam os limites do segmento de reta que liga a superfície da estrutura ao contorno fixo e passa por  $r$ ,  $\Delta x$  representa o deslocamento da estrutura e  $l$  representa a distância do nó  $r_{estruc}$  ao nó  $r_{máx}$ , (ver figura 3).

Este método apresenta vantagens quando a distância do nó da malha ao contorno da estrutura pode ser obtida de forma rápida, o que é possível apenas quando são consideradas malhas estruturadas, ou estruturas que apresentam eixos de simetria. Quando malhas não-estruturadas são empregadas, o custo computacional relacionado à busca do ponto sobre a superfície da estrutura ao nó da malha que resulta em uma mínima distância, pode tornar proibitivo o uso desta técnica de movimentação de malha.

### 2.3.2 Molas Lineares

Neste modelo as arestas simulam uma rede de molas lineares, às quais são associadas rigidezes inversamente proporcionais ao tamanho das mesmas. Para cada passo de tempo a estrutura é movida e as equações de equilíbrio estático que resultam do somatório das forças atuando em cada nó devem ser resolvidas (Antunes, 2002).



**Figura.4:** Representação esquemática das arestas do domínio simulando uma rede de molas.

Neste caso, a rigidez associada à aresta que liga o nó  $i$  ao  $j$  é dada por

$$k_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{((X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2)}} \quad (9)$$

e a rigidez e a força total associadas ao nó  $i$  são respectivamente:

$$k = \sum_j k_{i,j} ; \quad F^n = \sum_j k_{i,j} \Delta x_j^n \quad (10)$$

Tem-se então que o problema pode ser anunciado como:

$$k \Delta x_i^n = F^n \quad (11)$$

Resolvemos este mesmo problema para as três direções e atualizamos as coordenadas dos nós do domínio da seguinte forma:

$$X_i^{n+1} = X_i^n + \Delta x_i^n ; \quad Y_i^{n+1} = Y_i^n + \Delta y_i^n ; \quad Z_i^{n+1} = Z_i^n + \Delta z_i^n \quad (12)$$

O uso desta técnica é bastante atrativo do ponto de vista computacional, pois aplica-se bem a malhas não-estruturadas, sendo necessárias poucas iterações de Jacobi para atingir a convergência, cerca de 10 iterações para alcançar o equilíbrio linear, porém o uso de molas lineares impede apenas que haja colapso de nós, não impedindo que um nó atravesse uma face ou uma aresta.

### 2.3.3 Equação de Laplace Modificada

Neste modelo a equação de Laplace é modificada para resolver um problema de difusão dos deslocamentos da malha provocados pelo movimento da estrutura. Um coeficiente de difusividade precisa ser definido de forma a se obter o mínimo de distorção dos elementos computacionais para não comprometer a solução via algum método numérico.

O domínio é dividido da seguinte maneira:  $\Omega$  o domínio no qual devemos resolver a equação;  $\Gamma^m$  o contorno móvel (superfície da estrutura) e  $\Gamma^f$  o contorno fixo. Então a formulação clássica do problema é, dado  $u$  nos contornos, encontrar  $u$  no domínio, tal que

$$\nabla \cdot (1 + \tau \nabla \mathbf{u}) = 0 \quad (13)$$

$$u = g \text{ em } \Gamma_m \quad (14)$$

$$u = 0 \text{ em } \Gamma_f \quad (15)$$

sendo  $\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_f$ , e  $\mathbf{u}$ , o vetor deslocamento, ou seja, é preciso resolver uma equação para cada direção coordenada. As Eqs. (13-15) representam a equação governante do movimento da malha, e as condições de contorno.

Note que a definição do coeficiente de difusividade deve ser de forma que os elementos menores, geralmente definidos próximos às estruturas, onde os efeitos de pequena escala são presentes, sofram o mínimo de deformação, desta forma os deslocamentos são transmitidos através da malha até que os elementos maiores, próximos dos contornos fixos possam absorver estes deslocamentos. Mantém-se assim a qualidade dos elementos em regiões do campo de escoamento onde características como gradientes elevados estão presentes. Kanchi e Masud, 2007, propõem o cálculo do coeficiente de forma a evitar excessivas deformações impondo restrições adicionais aos elementos que efetivamente introduzem rigidez adicional ao elemento, por exemplo, obtendo-o de forma que seja inversamente proporcional ao tamanho característico do elemento. O coeficiente utilizado em (Kanchi e Massud, 2007), Eq. (18) o qual também foi utilizado no presente trabalho é;

$$\tau^e = \frac{1 - \frac{V_{\min}}{V_{\max}}}{\frac{V^e}{V_{\max}}} \quad (16)$$

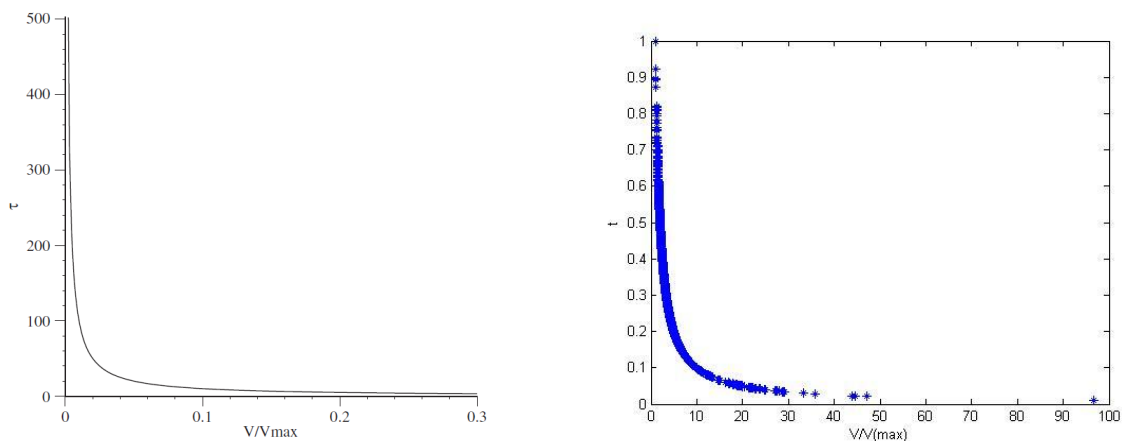
onde  $V_{\min}$  = volume do menor elemento da malha

$V_{\max}$  = volume do maior elemento da malha

$V_e$  = Volume do elemento em questão

Note que o cálculo do coeficiente de difusividade é obtido via uma comparação entre os comprimentos característicos dos elementos presentes na malha. Se a diferença entre o maior e o menor elemento for grande, então o coeficiente restringe-se a uma comparação dos elementos com o maior elemento, desta forma fazendo com que haja maior rigidez para os elementos menores, evitando assim sua deformação.

O comportamento do coeficiente obtido em (Kanchi e Massud, 2007) e no presente trabalho foram:



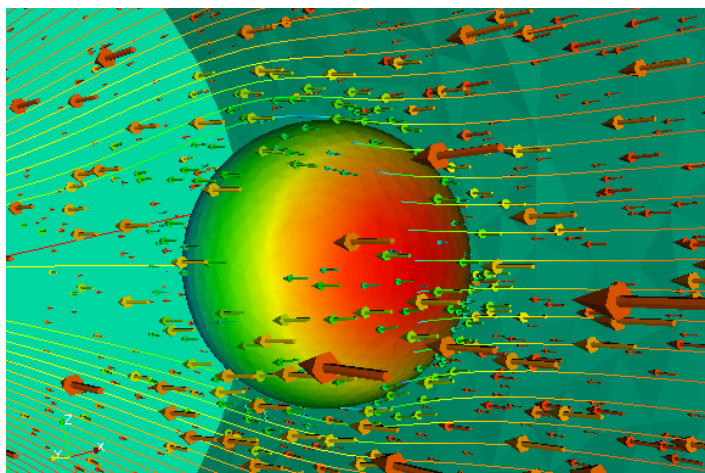
**Figura 5:** O resultado dos coeficientes obtidos em (Kanchi e Massud, 2007) e no presente trabalho, respectivamente.

As Figuras (5) e (6), demonstram a tendência da variabilidade da rigidez introduzida na malha, onde os elementos próximos ao contorno móvel transladam com pouca deformação, enquanto que os elementos maiores acomodam as deformações, permitindo uma suavização dos deslocamentos ao longo da malha.

Este método apresenta vantagens sobre os demais apresentados anteriormente, pois além de ser aplicável a qualquer tipo de malha com a mesma eficiência computacional, as equações podem ser resolvidas utilizando-se o método numérico mais apropriado. Neste trabalho foi utilizado o Método dos Elementos Finitos de Galerkin com elementos tetraédricos lineares, tendo a matriz resultante um bom comportamento em termos de simetria e condicionamento.

#### 2.4. Qualidade da Malha

O deslocamento imposto à malha vem da resolução do problema acoplado onde o fluido gera uma solicitação na estrutura, e vice versa. Esta solicitação é obtida via solução numérica das equações governantes do escoamento fluido obtidas via Método dos Elementos Finitos (Antunes, 2002). Este método necessita de uma malha computacional, na qual os elementos devem preservar certa qualidade em termos de distorção. Logo é necessário implementar testes de qualidade na malha para saber até onde esta é adequada para a aplicação do método dos elementos finitos. Quando a malha estiver muito distorcida, é necessária a geração de uma nova malha ('remeshing'). A Fig. (6) ilustra o fluxo do fluido através da estrutura.

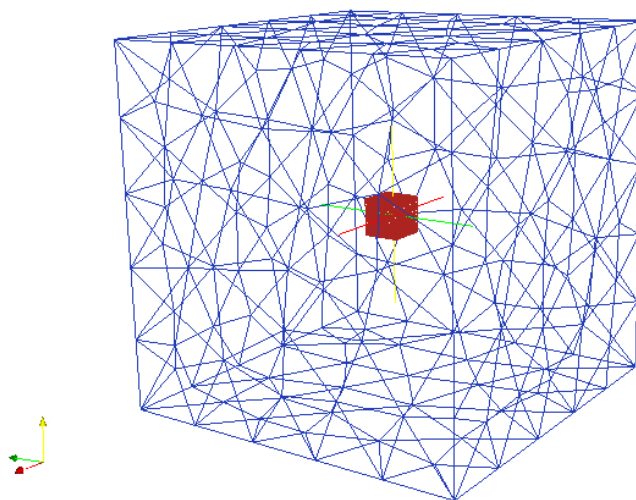


**Figura. 6:** Os vetores representam a direção do escoamento do fluido em cada ponto, este é responsável por todas as forças atuantes na estrutura.

A qualidade da malha foi avaliada segundo o seguinte parâmetro (Löhner, 2001) do Volume negativo, neste a malha é considerada inviável se pelo menos um elemento apresentar um volume negativo, isto diz que um nó atravessou alguma face e este fato inviabiliza a aplicação do método dos elementos finitos.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

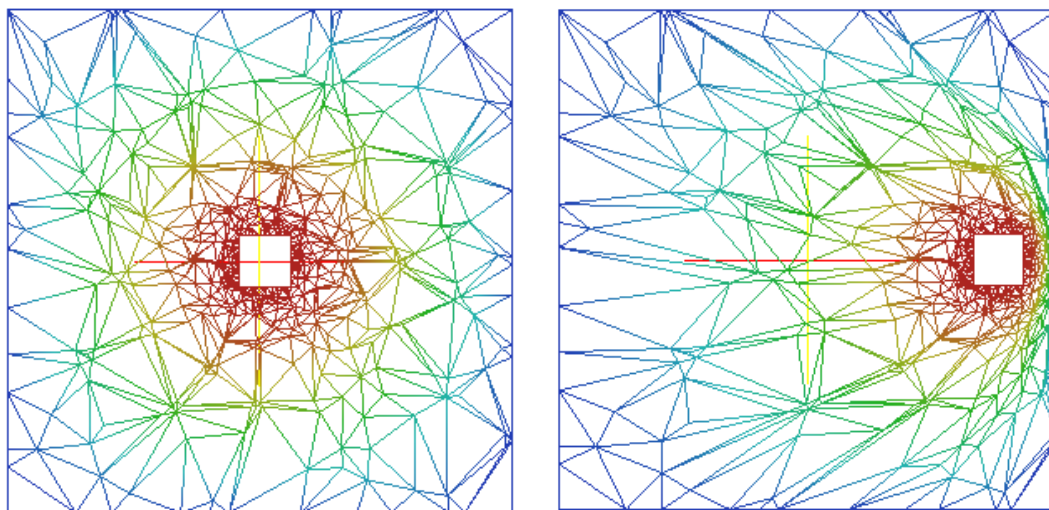
O problema analisado refere-se à seguinte geometria: o contorno fixo é um cubo de aresta 10m, a estrutura é um cubo de aresta 1m, inicialmente na origem do sistema de coordenadas, como pode-se ver na Fig. (7). A geometria e a malha computacional foram geradas no GMSH e pós-processada no VisIt, como ilustrado na Fig (8). GMSH é um software gerador de malhas para elementos finitos e VisIt é um visualizador de malhas de uso relativamente simples.



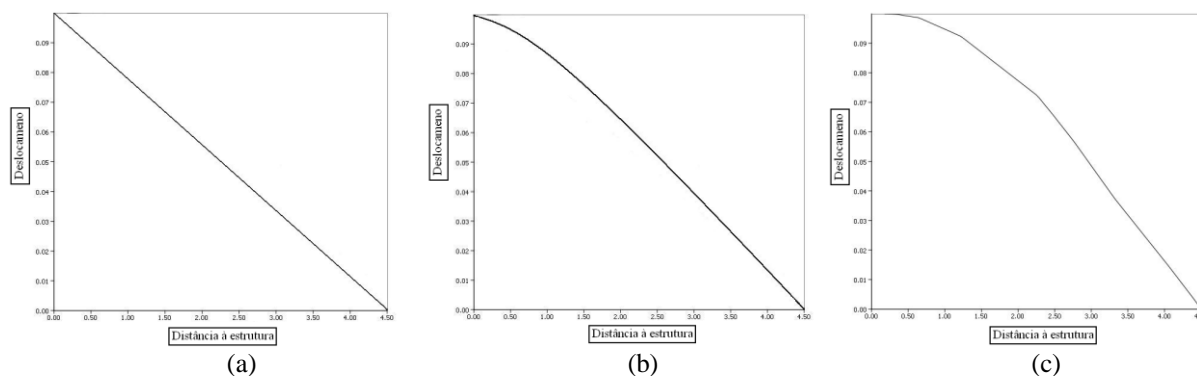
**Figura.7:** Malha referente à geometria utilizada visualizada no VisIt.

Os parâmetros estruturais são:  $M=10$ ,  $K=2$ ,  $C=5$ , e  $F(t) = 2.\pi.t$ . Os métodos do decaimento linear e de molas lineares foram eficientes considerando-se deslocamentos de até 20% do diâmetro da estrutura, com uma pequena vantagem para o método de molas lineares; enquanto que o MEF foi eficiente até deslocamentos de 400%. A deformação dos elementos obtida pelo método da Equação de Laplace Modificada, pode ser vista na Fig. (8), onde podemos verificar que os elementos próximos à estrutura tendem a manter sua qualidade, enquanto que os elementos distantes da estrutura, por serem maiores, tendem a acomodar os deslocamentos, distorcendo-se, porém, evitando a ocorrência de elementos negativos.





**Figura.8:** Sequência de malhas deformadas, evidenciando a presença de elementos distorcidos.



**Figura 9:** Variação do deslocamento dos nós da malha desde a estrutura ao contorno fixo ao longo de uma reta paralela à aresta do cubo (a) para o método do decaimento linear, (b) para o método das molas lineares e (c) para o método da equação de Laplace modificada.

A Figura 9 mostra uma comparação do comportamento dos deslocamentos dos nós da malha a partir da estrutura até o contorno fixo, na direção do deslocamento da estrutura, onde podemos evidenciar como cada método desloca os nós da malha. Como esperado, o Método do Decaimento Linear desloca linearmente os nós ao longo do domínio móvel, o Método das Molas Lineares apresenta um comportamento semelhante, movimentando um pouco mais os nós que estão próximos da estrutura, e o Método da Equação de Laplace Modificada tende a movimentar mais os nós próximos de estrutura, com pouca deformação, e acomoda as deformações nos elementos maiores, geralmente mais afastados da estrutura.

Pode-se inferir dos resultados obtidos que as rotinas de suavização de coordenadas reduzem o número de remeshing necessário, porém este é um procedimento inevitável em um problema de interação fluido estrutura, logo algumas sugestões para trabalhos futuros são: investimento em criações de rotinas que façam remeshing automaticamente durante o programa; estudo de métodos de suavização de coordenadas, mais robustos; e estudo de uma forma de tratamento da interface fluido-estrutural mais robusta.

Também vale salientar que os dois métodos de suavização de coordenadas tiveram resultados muito próximos pelo fato de a estrutura bem como o contorno possuírem vários eixos de simetria, porém para problemas que envolvem geometrias complexas o método do decaimento linear torna-se inviável, pois é necessário um elevado custo computacional para encontrar os parâmetros necessários à implementação do método.

#### 4. CONCLUSÕES

Os resultados de qualidade de malha obtidos pelo modelo de decaimento linear estão muito próximos dos obtidos pelo modelo de mola linear, o que pode ser visto na Fig.(9), porém como já enfatizado antes este método só é viável quando o problema envolve uma malha original estruturada ou não-estruturada com vários eixos de simetria. Como estes casos não englobam a maioria dos casos para os quais o programa foi desenvolvido, o modelo mais indicado dentre estes dois é o de mola linear. O método da Equação de Laplace Modificada apresentou uma vantagem muito grande em relação aos demais, no que se refere à qualidade da malha, e seu custo computacional se equipara ao do método de molas lineares, portanto é o mais indicado.

Como atividades futuras pode-se destacar a implementação de rotinas que façam remeshing automaticamente durante o programa, pois em muitos casos este processo é indispensável, e ainda o estudo de técnicas de tratamento da interface fluido-estrutura para possibilitar o acoplamento dos sistemas computacionais desenvolvidos com outras ferramentas.

#### 5. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) e à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco (FACEPE) pelo auxílio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

#### 6. REFERÊNCIAS

- Antunes, A.R.E., "Um sistema computacional flexível utilizando uma formulação 'ALE' e o método dos elementos finitos para a análise de problemas de interação fluido-estrutura", Dissertação de mestrado - Engenharia Mecânica UFPE, 2002.
- Hughes T. J. R. "The Finite Element Method" 1ª Edition, United States of America, Prentice-Hall, Inc., 1987, 803p.
- Farhat, C., LESOINNE, M. & LE TALLEC, P., "Load and Motion Transfer Algorithms for Fluid-Structure Interactions Problems with Non-Matching Discrete Interfaces: Momentum and Energy Conservation, Optimal Discretization and Application to Elasticity", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 157, pp 95-114, 1998.
- Kanchi, H., & Masud, A., "A 3D adaptive mesh moving scheme", Int. Journal for Num. Meth. In Fluids, vol 54, pp 923-944, 2007.
- Löhner, R., "Applied CFD Techniques", 1ª Edition, Great Britain, John Wiley & Sons, LTD, 366p, 2001.
- Mendes, P.A. & BRANCO, F.A., "Analysis of Fluid-Structure Interaction by an Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation", Int. J. for Numer. Meth. In Fluids vol 30, pp. 897-919, 1999.

#### 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído neste trabalho.

#### USING A MODIFIED LAPLACE EQUATION AND FINITE ELEMENT METHOD FOR MESH SUAUVIZATION IN FLUID-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS

**Breno Eduardo Liberato Azevedo, breno.eduardo@hotmail.com**  
**Alessandro Romario Echevarria Antunes, areantunes@yahoo.com.br**  
**Paulo Roberto Maciel Lyra, prmlyra@ufpe.br**

Federal University of Pernambuco, Mechanical Engineering Department, Recife – Brazil

Abstract: In this work we are presenting some strategies for mesh suavization when applied in numerical simulation of fluid-structure interaction problems involving moving boundaries. In that problem an Arbitrary Lagrangian-Eulerian

description is used over moving fluid domain, and some strategy is necessary in order to avoid excessive deformed elements in this region. Some moving meshes strategies are verified, with emphasis to the Modified Laplace Equation Method which is solved by Galerkin Finite Element Method. The strategies implemented in this work will be used in the future together with a computational system for numerical simulation of fluid-structure problems developed by the authors. Some numerical examples are presented to demonstrate the usefulness of the Modified Laplace Equation Method in comparison with others.