

## **TRAJETÓRIA ÓTIMA DE UMA AERONAVE PASSANDO POR UM PUNTO FIXO NO ESPAÇO 3D**

**Mauricio Andrés Varela Morales, morales@ita.br**  
**Pedro Paglione, paglione@ita.br**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Divisão de Engenharia Aeronáutica, Pça Mal. Eduardo Gomes, 50 - Vila da Acácias. CEP 12228-900, São José dos Campos, SP - Brasil

**Resumo.** Neste trabalho estuda-se o problema em que a trajetória ótima de uma aeronave deve satisfazer uma restrição interior de passagem por um ponto fixo no espaço. A abordagem utilizada é a do Princípio Mínimo de Pontryagin, que transforma o problema de otimização com restrição interior em um problema valor de contorno em múltiplos pontos (PVCMP). A função objetivo minimizada neste estudo é o consumo de combustível e as equações do movimento utilizadas são as do modelo ponto-massa no espaço 3D com velocidade constante. Os valores dos parâmetros adotados são de um veículo aéreo não tripulado acadêmico. Para resolver o PVCMP é utilizado o método indireto da colocação.

**Palavras-chave:** otimização de trajetórias, Princípio Mínimo de Pontryagin, ponto fixo de passagem

### **1. INTRODUÇÃO**

Os veículos aéreos não tripulados (VANTs) têm sido uma das mais importantes áreas em desenvolvimento da indústria aeronáutica. Os menores custos e periculosidades em relação às aeronaves tripuladas fazem com que esses veículos aéreos sejam cada vez mais procurados entre empresas civis, militares, e até mesmo entre entusiastas amadores.

Uma das formas mais comuns de se guiar um VANT se dá através de uma seqüência de pontos fixos no espaço. Estes pontos fixos, conhecidos por “waypoints”, podem conter alguma informação que a aeronave deve coletar, podem indicar alvos terrestres, ou então podem ser utilizados simplesmente para garantir que a aeronave não passe por um obstáculo ou zona de perigo. Existem várias metodologias para gerar os pontos de passagem de acordo com a missão da aeronave, os obstáculos e os perigos do terreno. Entre esses trabalhos estão Atkins (2004) e Gu *et al.* (2004). Depois de gerados os pontos de passagem, pode-se estudar a melhor maneira de se controlar a aeronave entre eles, visando a otimização de uma função de custo como o tempo ou o consumo de combustível. É nessa área que se encontra o presente trabalho.

A restrição criada pelos pontos de passagem pode ser tratada matematicamente de várias maneiras. Em Yang and Zhao (2004) eles são tratados com funções de custo e em Moon and Kim (2003) são relaxados a uma região aceitável. No presente trabalho, o ponto de passagem é tratado rigorosamente como uma restrição pontual que, sob a abordagem do controle ótimo, dá origem a um problema de valor de contorno em múltiplos pontos. Para exemplificar a solução foram utilizados dados de um VANT acadêmico, desenvolvido para monitorar linhas de transmissão de energia elétrica. Neste caso, cada ponto de passagem corresponde uma torre da rede elétrica, na qual a aeronave deve coletar imagens para inspeção.

### **2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA**

#### **2.1 Equações dos estados, modelos aerodinâmico e propulsivo**

O modelo de aeronave adotado é conhecido na literatura como “ponto-massa” e tem origem na Segunda Lei de Newton para translação. Este modelo ignora a inércia de rotação da aeronave, consideração que é geralmente feita em problemas de desempenho, como o presente estudo. As equações do movimento, retiradas de Yang and Zhao (2004), são

dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{T - D}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{L}{mV} \cos \phi - \frac{g}{V} \cos \gamma \\ \dot{\psi} &= \frac{L}{mV \cos \gamma} \sin \phi \\ \dot{x}_T &= V \cos \gamma \cos \psi \\ \dot{y}_T &= V \cos \gamma \sin \psi \\ \dot{h} &= V \sin \gamma\end{aligned}\quad (1)$$

onde  $V$  é a velocidade do ar em relação à aeronave;  $\gamma$  é o ângulo de trajetória da aeronave;  $\psi$  é o ângulo de proa;  $x_T$ ,  $y_T$  e  $h_T$  são as coordenadas cartesianas;  $g$  é a aceleração da gravidade e  $m$  é a massa da aeronave.

Os controles deste modelo são: força de tração  $T$ , coeficiente de sustentação  $C_L$ , e inclinação lateral  $\phi$ .

A força aerodinâmica de sustentação  $L$  é igual a:

$$L = 0.5\rho V^2 S C_L \quad (2)$$

onde  $\rho$  é a densidade atmosférica,  $V$  é a velocidade do ar em relação à aeronave,  $S$  é uma área de referência da aeronave.

Analogamente, a força aerodinâmica de arrasto  $D$  é igual a:

$$D = 0.5\rho V^2 S C_D \quad (3)$$

onde  $C_D$  é o coeficiente de arrasto.

O modelo de coeficiente de arrasto  $C_D$  é parabólico em relação ao coeficiente de sustentação  $C_L$ :

$$C_D = C_{D_0} + k_1 C_L + k C_L^2 \quad (4)$$

onde  $C_{D_0}$ ,  $k$  e  $k_1$  são constantes.

Para o modelo propulsivo, tomou-se a seguinte equação de consumo de combustível, compatível com a motorização à pistão da aeronave:

$$\dot{m} = -c_F T V \quad (5)$$

onde  $c_F$  é uma constante.

Escolheu-se fazer um voo com velocidade constante ( $\dot{V} = 0$ ) durante a manobra. Para isso adotou-se o seguinte controle de tração:

$$T = D + mg \sin \gamma \quad (6)$$

Na prática é inviável implementar essa lei de controle. Teria que se implementar um piloto automático com controle de tração a partir do erro de velocidade, por exemplo. Portanto, quanto maior for a capacidade do piloto automático regular a velocidade a partir da tração, maior é a validade dos resultados deste problema. Para otimizar a trajetória restaram os controles  $C_L$  e  $\phi$ .

Portanto, as equações dos estados são:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{L}{mV} \cos \phi - \frac{g}{V} \cos \gamma \\ \dot{\psi} &= \frac{L}{mV \cos \gamma} \sin \phi \\ \dot{x}_T &= V \cos \gamma \cos \psi \\ \dot{y}_T &= V \cos \gamma \sin \psi \\ \dot{h} &= V \sin \gamma \\ \dot{m} &= -c_F (D + mg \sin \gamma) V\end{aligned}\quad (7)$$

O vetor de estados é:

$$\mathbf{x} = [ \gamma \quad \psi \quad x_T \quad y_T \quad h \quad m ]^T \quad (8)$$

E o vetor de controles é:

$$\mathbf{u} = [ C_L \quad \phi ]^T \quad (9)$$

As equações dos estados Eq. (7) são representadas pela forma geral:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (10)$$

### 3. CONTROLE ÓTIMO

Nesta seção são apresentados, de forma resumida, alguns dos principais resultados da teoria do controle ótimo, utilizados para resolver os problemas deste estudo. Maiores detalhes podem ser encontrados em Bryson and Ho (1987).

#### 3.1 Controle ótimo sem restrições interiores

Considere um sistema contínuo no tempo ( $t$ ), com  $n$  estados ( $\mathbf{x} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ),  $m$  controles ( $\mathbf{u} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ), e sendo que os estados estão sujeitos à:

- uma restrição dinâmica, na forma de um sistema de equações diferenciais não-lineares:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (11)$$

- uma condição de contorno inicial

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad (12)$$

- e uma condição de contorno final

$$\Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad \Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p \quad (13)$$

Deseja-se encontrar o histórico do vetor de controles  $\mathbf{u}(t)$  que minimiza o índice de desempenho:

$$J(\mathbf{u}(\cdot)) := \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (14)$$

Por simplicidade de notação, indicação “ $(t)$ ” será usada apenas quando for necessário apontar um instante de tempo específico, como por exemplo, no instante final ( $t_f$ ).

Definindo a Hamiltoniana  $H$  e a função auxiliar  $\Theta$  conforme Bryson and Ho (1987):

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) := L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (15)$$

$$\Theta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, t) := \Phi(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\nu}^T \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^p$  são chamados de multiplicadores de Lagrange ou variáveis adjuntas. O vetor  $\boldsymbol{\lambda}$  também recebe o nome de vetor de coestados. Então, a teoria do controle ótimo conclui que uma solução para o problema deve satisfazer as seguintes condições necessárias:

- a equação dos coestados:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (17)$$

- o Princípio do Mínimo de Pontryagin:

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} H \quad (18)$$

em palavras,  $H$  deve ser mínimo em relação a  $\mathbf{u}$ , com  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ , sendo  $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$ . No caso em que não há restrições nos controles, ou seja  $\mathbf{U} \equiv \mathbb{R}^m$ , tem-se:

condição de estacionariedade:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (19)$$

condição de Legendre-Clebsch:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} > 0 \quad (20)$$

quando há mais de um controle ( $m > 1$ ), a condição Eq. (20) significa que a matriz  $\partial^2 H / \partial \mathbf{u}^2$  deve ser positiva definida.

- a condição de contorno:

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t_f} \quad (21)$$

- e, se o tempo final for livre, a condição de contorno adicional:

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + H \right) \Big|_{t_f} = 0 \quad (22)$$

onde  $\partial(\cdot)/\partial \mathbf{x} = [\partial(\cdot)/\partial x_1, \partial(\cdot)/\partial x_2, \dots, \partial(\cdot)/\partial x_n]$

Portanto, aplicando-se a teoria do controle ótimo sem restrições, chega-se a um problema de valor de contorno em dois pontos (TPBVP) definido por:

- um sistema de equações diferenciais composto pelas equações Eq. (11), (17).
  - uma condição de contorno inicial Eq. (12)
  - e condições de contorno finais Eq. (13), (21) e, se o tempo final for livre, Eq. (22)
- onde os controles são calculados a partir das condições Eq. (19) e (20).

### 3.2 Controle Ótimo com restrição de ponto interior

Neste caso, é adicionado um conjunto de condições de contorno interiores no instante  $t = t_1$ :

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}(t_1), t_1) = 0 \quad t_0 < t_1 < t_f \quad (23)$$

onde  $\mathbf{N}$  é um vetor de funções com  $r$  componentes.

Seja  $t_1^-$  o instante de tempo tendendo à  $t_1$  pela esquerda e  $t_1^+$  pela direita. Então, da teoria do controle ótimo, tem-se que devem ser incluídas no problema de valor de contorno as seguintes condições interiores:

$$\lambda^T(t_1^-) = \lambda^T(t_1^+) + \mathbf{\Pi}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}(t_1)} \quad (24)$$

$$H(t_1^-) = H(t_1^+) - \mathbf{\Pi}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t_1} \quad (25)$$

onde  $\mathbf{\Pi}$  é um vetor de multiplicadores de Lagrange com  $r$  componentes, determinados tal que as  $r$  condições Eq. (23) são satisfeitas. O tempo  $t_1$  é determinado pela Eq. (25). As variáveis de estado são contínuas, ou seja, tem-se também a condição de contorno interior:

$$\mathbf{x}(t_1^-) = \mathbf{x}(t_1^+) \quad (26)$$

## 4. APLICAÇÃO DO CONTROLE ÓTIMO

Escolheu-se minimizar o consumo de combustível, portanto:

$$J(u(\cdot)) = \int_0^{t_f} (-\dot{m}) dt \quad (27)$$

Consequentemente, comparando com Eq. (14) tem-se que:

$$\Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (28)$$

$$L(\mathbf{x}, u) = -\dot{m} \quad (29)$$

Por definição, tem-se a seguinte Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) &:= L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \\ &= -\dot{m} + \lambda_\gamma \dot{\gamma} + \lambda_\psi \dot{\psi} + \lambda_{x_T} \dot{x}_T + \lambda_{y_T} \dot{y}_T + \lambda_h \dot{h} + \lambda_m \dot{m} = \\ &= c_F TV + \lambda_\gamma \left( \frac{L}{mV} \cos \phi - \frac{g}{V} \cos \gamma \right) + \lambda_\psi \left( \frac{L}{mV \cos \gamma} \sin \phi \right) + \\ &+ \lambda_{x_T} (V \cos \gamma \cos \psi) + \lambda_{y_T} (V \cos \gamma \sin \psi) + \lambda_h (V \sin \gamma) + \\ &+ \lambda_m (-c_F(D + mg \sin \gamma)V) \end{aligned} \quad (30)$$

### 4.1 Obtenção das equações dos coestados:

Da Eq. (17), tem-se as seguintes equações dos coestados:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_\gamma &= -\frac{\partial H}{\partial \gamma} = -\lambda_\gamma \frac{g}{V} \sin \gamma - \lambda_\psi \frac{0.5\rho SV C_L}{m} \sec \gamma \tan \gamma \sin \phi \\
&\quad + \lambda_{y_T} V \sin \gamma \cos \psi + \lambda_{x_T} V \sin \gamma \sin \psi \\
&\quad - \lambda_h V \cos \gamma - (1 - \lambda_m) m g c_F V \cos \gamma \\
\dot{\lambda}_\psi &= -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\lambda_{x_T} V \cos \gamma \cos \psi + \lambda_{y_T} V \cos \gamma \sin \psi \\
\dot{\lambda}_h &= -\frac{\partial H}{\partial h} = -\frac{0.5 SV C_L}{m} \frac{d\rho}{dh} (\lambda_\gamma \cos \phi + \lambda_\psi \sec \gamma \sin \phi) \\
&\quad - 0.5 c_F S V^3 C_D \frac{d\rho}{dh} (1 - \lambda_m) \\
\dot{\lambda}_m &= -\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{0.5\rho SV C_L}{m^2} (\lambda_\gamma \cos \phi + \lambda_\psi \sec \gamma \sin \phi) \\
&\quad - (1 - \lambda_m) g c_F V \sin \gamma \\
\dot{\lambda}_{x_T} &= -\frac{\partial H}{\partial x_T} = 0 \\
\dot{\lambda}_{y_T} &= -\frac{\partial H}{\partial y_T} = 0
\end{aligned} \tag{31}$$

#### 4.2 Obtenção do controle ótimo:

Aplicando-se a condição de estacionariedade Eq. (19) no controle  $C_L$ , tem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial C_L} &= 0 \\
\frac{0.5\rho SV}{m} (c_F V^2 m (k + 2k_1 C_L) (1 - \lambda_m) + (\lambda_\gamma \cos \phi + \lambda_\psi \sec \gamma \sin \phi)) &= 0
\end{aligned} \tag{32}$$

Com esta condição já é possível encontrar uma expressão para  $C_L$ :

$$C_L = -0.5 \frac{k}{k_1} - 0.5 \frac{\lambda_\gamma \cos \phi + \lambda_\psi \sec \gamma \sin \phi}{c_F k_1 m V^2 (1 - \lambda_m)} \tag{33}$$

Daqui em diante será analisado apenas o caso em que  $C_L > 0$ , o que terá que ser verificado na trajetória encontrada para que ela seja válida.

Aplicando-se a condição de estacionariedade Eq. (19) agora no controle  $\phi$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \phi} &= 0 \\
\frac{0.5\rho SV C_L}{m} (\lambda_\psi \sec \gamma \cos \phi - \lambda_\gamma \sin \phi) &= 0
\end{aligned} \tag{34}$$

Como  $\rho$ ,  $S$ ,  $V$  e  $C_L$  são diferentes de zero:

$$(\lambda_\psi \sec \gamma \cos \phi - \lambda_\gamma \sin \phi) = 0 \tag{35}$$

Esta Eq. (35) possui mais de uma solução em  $\phi$ :

$$\begin{aligned}
\sin \phi &= + \frac{\lambda_\psi \sec \gamma}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \lambda_\psi^2 \sec^2 \gamma}} \quad \text{ou} \quad \sin \phi = - \frac{\lambda_\psi \sec \gamma}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \lambda_\psi^2 \sec^2 \gamma}} \\
\cos \phi &= + \frac{\lambda_\gamma}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \lambda_\psi^2 \sec^2 \gamma}} \quad \cos \phi = - \frac{\lambda_\gamma}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \lambda_\psi^2 \sec^2 \gamma}}
\end{aligned} \tag{36}$$

Por isso é preciso analisar também a condição de Legendre-Clebsch Eq. (20), onde:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial C_L^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial C_L \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \phi \partial C_L} & \frac{\partial^2 H}{\partial \phi^2} \end{pmatrix} > 0 \tag{37}$$

Desenvolvendo primeiro os termos da diagonal secundária:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \phi \partial C_L} = \frac{0.5\rho SV}{m} (\lambda_\psi \sec \gamma \cos \phi - \lambda_\gamma \sin \phi) \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial C_L \partial \phi} = \frac{0.5\rho SV}{m}(\lambda_\psi \sec \gamma \cos \phi - \lambda_\gamma \sin \phi) \quad (39)$$

Substituindo a Eq. (35), tem-se que esses termos são nulos:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \phi \partial C_L} = \frac{\partial^2 H}{\partial C_L \partial \phi} = 0 \quad (40)$$

Portanto os elementos da diagonal secundária da matriz  $\partial^2 H / \partial u^2$  são nulos. Então para que ela tenha autovalores positivos e assim seja positiva definida, os elementos de sua diagonal principal devem ser positivos. Analisando primeiramente o elemento em  $\phi$ :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \phi^2} = -\frac{0.5\rho SV C_L}{m}(\lambda_\gamma \cos \phi + \lambda_\psi \sec \gamma \sin \phi) > 0 \quad (41)$$

Como  $\rho$ ,  $S$ ,  $V$  e  $C_L$  são positivos, então:

$$(\lambda_\gamma \cos \phi + \lambda_\psi \sec \gamma \sin \phi) < 0 \quad (42)$$

A condição Eq. (35) juntamente com a condição Eq. (42) definem o controle de  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \sin \phi &= -\frac{\lambda_\psi \sec \gamma}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \lambda_\psi^2 \sec^2 \gamma}} \\ \cos \phi &= -\frac{\lambda_\gamma}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \lambda_\psi^2 \sec^2 \gamma}} \end{aligned} \quad (43)$$

O diagrama da Figura (1) mostra a relação entre o quadrante de  $\phi$  e os sinais dos coestados  $\lambda_\gamma$  e  $\lambda_\psi$ .

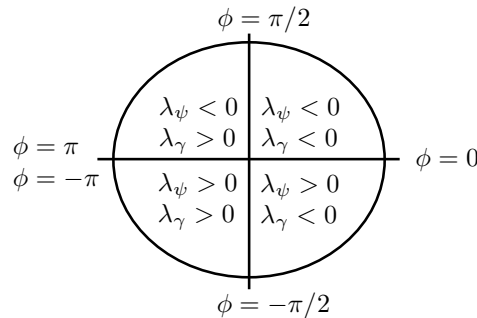


Figura 1. Relação entre o quadrante do controle  $\phi$  e os coestados  $\lambda_\gamma$  e  $\lambda_\psi$ .

Agora, analisando o elemento da diagonal principal em  $C_L$ :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial C_L^2} = c_F k_1 \rho SV^3 (1 - \lambda_m) > 0 \quad (44)$$

Como  $c_F$ ,  $k_1$ ,  $S$  e  $V$  são constantes positivas, então:

$$\lambda_m < 1 \quad (45)$$

Com esta Eq. (45) não foi utilizada na determinação de nenhum controle, então ela deve ser verificada na solução que for obtida. E sendo verdadeira, pode-se verificar na Eq. (33) que  $C_L$  será de fato positivo, como colocado anteriormente.

#### 4.3 Condição de contorno inicial:

No instante inicial, todos os estados são dados:

$$\gamma(0) = \gamma_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad x_T(0) = x_{T0}, \quad y_T(0) = y_{T0}, \quad h(0) = h_0, \quad m(0) = m_0 \quad (46)$$

#### 4.4 Obtenção das condições de contorno finais:

No instante final ( $t_f$ ), apenas a massa  $m(t_f)$  não é especificada:

$$\gamma(t_f) = \gamma_f, \quad \psi(t_f) = \psi_f, \quad x_T(t_f) = x_{Tf}, \quad y_T(t_f) = y_{Tf}, \quad h(t_f) = h_f \quad (47)$$

Portanto, tem-se a seguinte condição de contorno final:

$$\Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \begin{bmatrix} \gamma(t_f) - \gamma_f \\ \psi(t_f) - \psi_f \\ x_T(t_f) - x_{Tf} \\ y_T(t_f) - y_{Tf} \\ h(t_f) - h_f \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (48)$$

Tendo a expressão de  $\Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f)$  (vide Eq.(28)) e a expressão de  $\Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f)$  logo acima, obtém-se  $\Theta(\mathbf{x}(t_f), \boldsymbol{\nu}, t_f)$  pela definição Eq. (16):

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{x}(t_f), \boldsymbol{\nu}, t_f) &:= \Phi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\nu}^T \Psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \\ &= \nu_\gamma(\gamma(t_f) - \gamma_f) + \nu_\psi(\psi(t_f) - \psi_f) + \nu_{x_T}(x_T(t_f) - x_{Tf}) + \\ &+ \nu_{y_T}(y_T(t_f) - y_{Tf}) + \nu_h(h(t_f) - h_f) \end{aligned} \quad (49)$$

Aplicando-se a condição final Eq. (21) para o coestado  $\lambda_m$ :

$$\lambda_m(t_f) = \left. \frac{\partial \Theta}{\partial m} \right|_{t_f} \quad (50)$$

Mas, como  $\Theta$  não é função da massa final  $m(t_f)$ :

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial m} \right|_{t_f} = 0 \quad (51)$$

Então, tem-se:

$$\lambda_m(t_f) = 0 \quad (52)$$

E, como  $\Theta$  não é função do tempo final  $t_f$  tem-se:

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right|_{t_f} = 0 \quad (53)$$

Então, substituindo Eq. (53) na condição final Eq. (22) tem-se:

$$(H) \Big|_{t_f} = 0 \quad (54)$$

#### 4.5 Obtenção das condições de contorno interiores:

No ponto fixo de passagem são especificados os estados de posição espacial:  $x_T(t_1)$ ,  $y_T(t_1)$  e  $h(t_1)$ . Por isso, tem-se a condição de contorno interior:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}(t_1), t_1) = \begin{bmatrix} x_T(t_1) - x_{T1} \\ y_T(t_1) - y_{T1} \\ h(t_1) - h_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (55)$$

Aplicando-se a Eq. (24) para  $\gamma$ ,  $\psi$  e  $m$  tem-se:

$$\lambda_\gamma(t_1-) = \lambda_\gamma(t_1+) + \boldsymbol{\Pi}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \gamma(t_1)} \quad (56)$$

$$\lambda_\psi(t_1-) = \lambda_\psi(t_1+) + \boldsymbol{\Pi}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \psi(t_1)} \quad (57)$$

$$\lambda_m(t_1-) = \lambda_m(t_1+) + \boldsymbol{\Pi}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial m(t_1)} \quad (58)$$

Mas, como:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \gamma(t_1)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \psi(t_1)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial m(t_1)} = \mathbf{0} \quad (59)$$

Substituindo, tem-se as condições de contorno interiores:

$$\lambda_\gamma(t_1-) = \lambda_\gamma(t_1+) \quad (60)$$

$$\lambda_\psi(t_1-) = \lambda_\psi(t_1+) \quad (61)$$

$$\lambda_m(t_1-) = \lambda_m(t_1+) \quad (62)$$

E como:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t_1} = \mathbf{0} \quad (63)$$

Substituindo na Eq. (25) tem-se a condição interior:

$$H(t_1-) = H(t_1+) \quad (64)$$

Além disso, também sabe-se que as variáveis de estado são contínuas Eq. (26), então tem-se as condições de contorno interiores:

$$\gamma(t_1-) = \gamma(t_1+), \quad \psi(t_1-) = \psi(t_1+), \quad x_T(t_1-) = x_T(t_1+), \quad y_T(t_1-) = y_T(t_1+), \quad h(t_1-) = h(t_1+) \quad (65)$$

Em resumo, tem-se um problema de valor de contorno em múltiplos pontos (PVCMP) definido por:

- um sistema de equações diferenciais composto pelas equações dos estados Eq. (7), retirando-se a equação da velocidade, e pelas equações dos coestados Eq. (31);
  - uma condição de contorno inicial Eq. (46);
  - condições de contorno finais Eq. (48), (52), e (54);
  - e condições de contorno interiores Eq. (55), (60), (64), e (65).
- onde os controles ótimos são dados por Eq. (33) e (43).

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As condições de contorno dos estados foram escolhidas para simular um veículo aéreo não tripulado saindo de uma pista, passando por um ponto fixo no espaço, e chegando a uma outra pista, de mesmo nível da primeira, 100 metros. O ponto de passagem encontra-se elevado de 60 em relação ao início da trajetória e está deslocado lateralmente em relação à linha reta que une as duas pistas, portanto a trajetória ótima se desenvolve nas três dimensões do espaço.

Tabela 1. Condições de contorno dos estados.

estados iniciais	estados no ponto de passagem	estados finais
$\gamma_0 = 0^\circ$	$\gamma_1$ livre	$\gamma_f = 0^\circ$
$\psi_0 = 70^\circ$	$\psi_1$ livre	$\psi_f = 70^\circ$
$x_{T_0} = 0$ m	$x_{T_1} = 400$ m	$x_{T_f} = 1000$ m
$y_{T_0} = 0$ m	$y_{T_1} = 600$ m	$y_{T_f} = 1000$ m
$h_0 = 100$ m	$h_1 = 160$ m	$h_f = 100$ m
$m_0 = 21,03$ kg	$m_1$ livre	$m_f$ livre

A tabela a seguir contém os parâmetros da aeronave utilizada neste estudo.

Tabela 2. Parâmetros da aeronave.

$g = 9,8065$ m/s <sup>2</sup>	$S = 8,83 \times 10^{-1}$ m <sup>2</sup>	$c_F = 8,79 \times 10^{-7}$ s <sup>2</sup> /m <sup>2</sup>
$C_{D_0} = 4,23 \times 10^{-2}$	$k = -2,5 \times 10^{-2}$	$k_1 = 6,9 \times 10^{-2}$

Para se resolver numericamente o problema de valor de contorno em múltiplos pontos desenvolvido na seção anterior utilizou-se o método da colocação descrito em Kierzenka and Shampine (2001). Ao inicializar a busca da solução numérica é necessário fornecer uma estimativa inicial dos estados e dos coestados. Na inicialização dos estados utilizaram-se



funções lineares entre os estados iniciais e seus respectivos valores finais. Mas, como não se tem informações sobre a trajetória dos coestados, foram necessárias algumas tentativas até se conseguir uma solução.

Além disso foi preciso empregar uma técnica conhecida por homotopia, que consiste em obter a solução para um caso mais simples e utilizá-la como estimativa inicial para a solução de um caso mais complicado. Neste caso, a homotopia foi feita em três etapas. Na primeira aumentou-se gradativamente a altitude  $h_1$  do ponto de passagem de 105 para 120, 140 e depois 160 metros. Então, fez-se uma homotopia na em  $x_{T_1}$  de 280 para 350 e 400 metros, junto com uma homotopia em  $y_{T_1}$  de 280 para 450 e 600 metros. Na terceira etapa fez-se uma homotopia na proa de partida  $\psi_0$  e de chegada  $\psi_f$ , de  $50^\circ$  para  $60^\circ$  e  $70^\circ$ , ambas.

As Figuras (2), (3) e (4) mostram a solução encontrada, e cada segmento de trajetória é representado por uma cor.

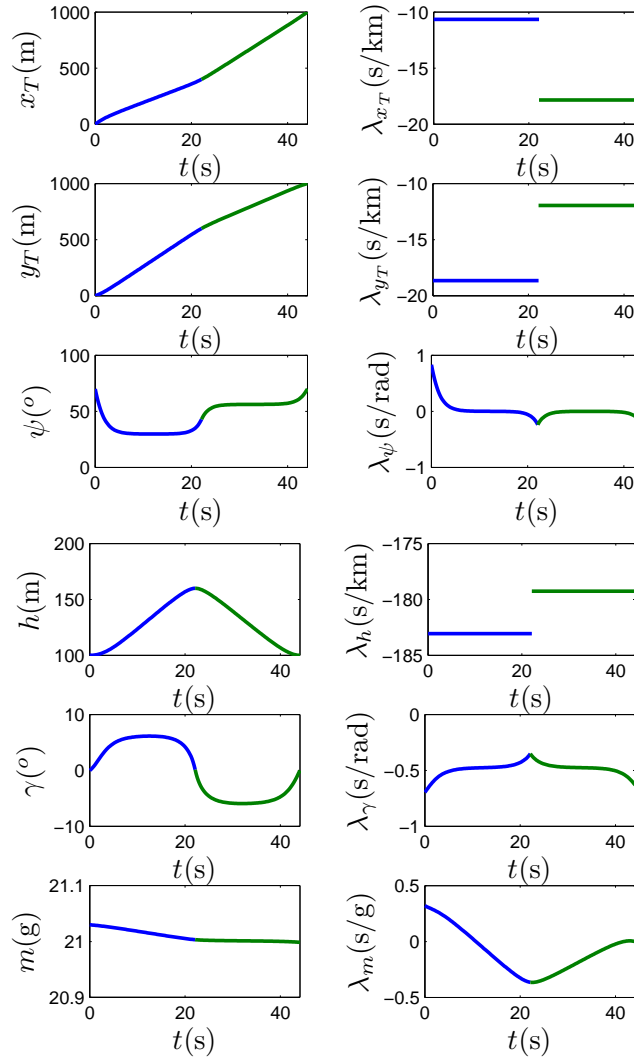


Figura 2. Estados e coestados do VANT passando por um ponto fixo no espaço.

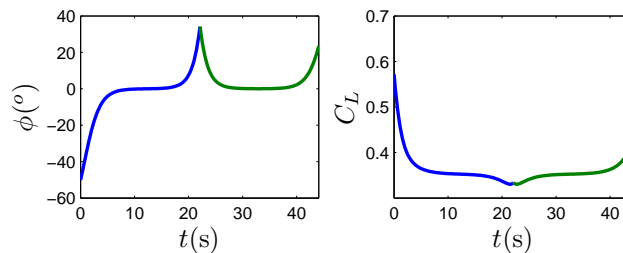


Figura 3. Controles ótimos do VANT passando por um ponto fixo no espaço.

Pode-se notar que o controle de  $\phi$  é solicitado apenas próximo aos pontos de contorno. Como consequência disso,

tem-se que a trajetória ótima é, durante a maior parte do percurso, feita com as asas niveladas.

Também é interessante notar que, ao passar pelo ponto fixo, ocorre uma descontinuidade na primeira derivada de  $\phi$ . Isso ocorre devido à descontinuidade dos coestados de  $x_T$ ,  $y_T$  e  $h$ , que primeiramente acarretam numa descontinuidade na derivada dos coestados  $\lambda_\gamma$  e  $\lambda_\psi$  (vide Eq.(31)) e por causa disso provocam a descontinuidade na derivada do controle  $\phi$  (vide Eq.(43)).

Da Figura (2) verifica-se que durante toda a trajetória  $\lambda_m$  é menor que 1, e por isso respeita a condição Eq. (45).

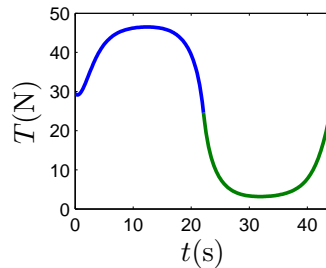


Figura 4. Tração do VANT passando por um ponto fixo no espaço.

Na Figura (4) nota-se que a tração, responsável neste estudo por manter a velocidade constante, não excede valores absurdos, como por exemplo valores negativos. Caso contrário teria de se incluir restrições de controles na abordagem do Controle Ótimo.

## 6. CONCLUSÕES

A abordagem do problema de trajetória ótima passando por um ponto fixo com menor consumo de combustível foi feita sem problemas pelo Controle Ótimo, resultando num problema de valor de contorno em múltiplos pontos (PVCMP). O método indireto da colocação precisou ser utilizado juntamente com o método da homotopia para resolver numericamente o PVCMP. Os resultados se mostraram coerentes e a análise da trajetória e do histórico de controle obtidos pode ser útil em trabalhos futuros para desenvolver leis de controle que se assemelhem ao máximo ao controle ótimo apresentado. Essas leis de controle, embora sub-ótimas, seriam mais fáceis de se implementar na prática.

## 7. AGRADECIMENTOS

O autor agradece o apoio da CAPES (produtividade em pesquisa).

## 8. REFERÊNCIAS

- Atkins, E.M., 2004. "Dynamic waypoint generation given reduced flight performance". In *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, EUA.
- Bryson, A.E. and Ho, Y.C., 1987. *Applied Optimal Control*. Hemisphere, Washington, D. C.
- Gu, D.W., Karnal, W. and Postlethwaite, I., 2004. "A uav waypoint generator". In *AIAA 1st Intelligent Systems Technical Conference*. Chicago, Illinois, EUA.
- Kierzenka, J. and Shampine, L.F., 2001. "A bvp solver based on residual control and the matlab pse". *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 27, No. 3, pp. 299–316.
- Moon, G. and Kim, Y., 2003. "Optimum flight path design passing through waypoints for autonomous flight control systems". In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*.
- Yang, H.I. and Zhao, Y.J., 2004. "Efficient trajectory synthesis through specified waypoints". In *AIAA 3rd Unmanned Unlimited Technical Conference, Workshop and Exhibit*.

## 9. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.



**VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING**  
**18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil**  
*August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil*

## **OPTIMAL TRAJECTORY OF AN AIRPLANE PASSING THROUGH A WAYPOINT IN THE 3D SPACE**

**Mauricio Andrés Varela Morales, morales@ita.br**  
**Pedro Paglione, paglione@ita.br**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Divisão de Engenharia Aeronáutica, Departamento de Mecânica do Voo, Pça. Mal. Eduardo Gomes, 50 - Vila das Acácias. CEP 12228-900, São José dos Campos, SP - Brasil

***Abstract.** In this work we study the problem where the optimal trajectory of an aircraft must meet an interior constraint of passing through a fixed point in space. The approach adopted is the Pontryagin's Minimum Principle, which transforms the interior constrained optimization problem into a boundary value problem at multiple points (PVCMP). The objective functional minimized in this study is the fuel consumption and the equations of motion employed correspond to the point-mass model in the 3D space with constant speed. The parameter values adopted are from an academic unmanned aerial vehicle. To solve the MPBVP the collocation indirect method was used.*

**Keywords:** trajectory optimization, Pontryagin's Minimum Principle, waypoints

### **1. RESPONSIBILITY NOTICE**

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.