

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESTRUTURA MECÂNICA SUJEITA A TENSÕES COM FONTES CONTROLADAS

CAJUHI, Tuanny Raphaella Mendes, trmcajuhi@ifba.edu.br¹
BATISTA, Lurimar Smera, lurimar@ifba.edu.br¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), Rua Emídio dos Santos s/n, Barbalho, Salvador, Bahia.

Resumo. *Devido à necessidade de investigar problemas complexos em estruturas e reduzir custos, vários algoritmos de modelagem numérica têm sido desenvolvidos nos anos recentes. Tem-se a aplicação de modelos matemáticos através de simulações computacionais compostas por equações diferenciais, das quais obtemos equações algébricas com tratamento por métodos numéricos adequados como o Método das Diferenças Finitas (MDF). Investigar, através dessa modelagem ou simulação numérica, alterações físicas em estruturas mecânicas, é um modo bastante eficaz de obter respostas a respeito dos estímulos aplicados em uma estrutura. Utiliza-se um modelo estrutural baseado numa barra (modelo unidimensional) sujeita a tensões provenientes de duas fontes (estímulos) em suas extremidades de modo regular, que interagem entre si devido à própria propagação e ao longo da estrutura, sofrendo o aparecimento de anisotropias que implicam em falhas em pontos específicos como resultado da interação dessas tensões (ondas). A metodologia utilizada no trabalho baseia-se na atualização bibliográfica sobre o MDF e técnicas de programação, seguida da implantação dos algoritmos baseados no MDF para modelagem da estrutura mecânica unidimensional sob tensões, o que permite prever pontos de falha e os resultados das interações em cada ponto da estrutura. O estudo do modelo estrutural sujeito a tais fontes de tensão de propagação ondulatória pela simulação, permite entender o comportamento do material (estrutura), obtendo-se justificativas e previsão dos pontos de falha e interações na estrutura, logo, economia em termos de tempo e custo, bem como maior segurança.*

Palavras-chave: *simulação, estrutura, tensões, ondas, falhas.*

1. INTRODUÇÃO

A aplicação de modelos matemáticos com simulações computacionais compostas por equações diferenciais resulta em conhecimento mais prático e preciso. É através das equações diferenciais, com tratamento por métodos numéricos adequados como o Método das Diferenças Finitas, que obtemos equações algébricas de resolução mais simples. A Equação da Onda é representada por uma Equação Diferencial Parcial na qual o tempo e o espaço são as variáveis independentes que contribuem no resultado dinâmico do fenômeno da propagação de onda e, mais especificamente na propagação de ondas de tensão.

O fenômeno de propagação das ondas de tensão elásticas tem diversas aplicações práticas, e estas remontam aos primórdios do homem, como a aplicação de pancadas estrategicamente localizadas nas bordas de rochas, a fim de quebrá-las em locais específicos. O interesse pelo fenômeno de propagação de ondas, no que diz respeito às suas aplicações em engenharia, aumentou consideravelmente no século passado, com o aparecimento dos processos tecnológicos especiais que exigiam informação precisa à cerca do comportamento de estruturas e materiais quando sujeitos à solicitações dinâmicas intensas. (Cirne (1984)).

A propagação das ondas de tensão se dá uniformemente ao longo de estruturas consideradas homogêneas e isotrópicas. Quando o material não admite tais considerações, contendo pequenos defeitos (trincas) que possibilitam concentração de tensões, ele pode atingir a tensão ideal de fratura nestas pequenas regiões específicas antecipadamente aos valores teóricos calculados.

A Mecânica da Fratura quantifica e relaciona as variáveis do fenômeno das falhas. Seu estudo e equações aplicadas a um modelo sujeito a fontes de tensão de propagação ondulatória através da simulação, permite entender o comportamento do material (estrutura), obtendo-se justificativas na análise dos pontos de falha e suas interações na estrutura, o que é cada vez mais necessário na compreensão dos aspectos comportamentais mecânicos e ensaios dos materiais.

No século passado, Griffith formulou as primeiras equações da Mecânica da Fratura. Isto só foi possível devido à Mecânica dos Meios Contínuos que traz explicações específicas quanto ao comportamento dos materiais, relacionando

forças internas (interatômicas), deformações e esforços externos aplicados ao corpo em equilíbrio. (Branco (1994)).

Através da revisão da literatura, estudo dos materiais e seu comportamento, equações diferenciais representativas dos fenômenos, em especial a Equação Diferencial da Onda e aplicação de métodos de modelagem computacional como o Método das Diferenças Finitas, pode-se compreender e prever o comportamento das estruturas sob fontes de tensão controladas, logo sob propagação de ondas de tensão.

Este trabalho investiga, através da modelagem numérica, alterações comportamentais em estruturas mecânicas sujeitas a duas fontes de tensão.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As falhas em estruturas são consideradas defeitos decorrentes de diversos fatores como falta de controle e conhecimento do material em uso, suas diferentes formas de processamento e até mesmo considerações de variáveis insuficientes no projeto. As falhas podem ocorrer na forma de fraturas nas estruturas sob tensão de modo estático ou dinâmico, intermitente ou contínuo. Elas podem provocar, desde inutilização da peça como insegurança quanto a sua utilização, sendo estudadas pela Mecânica da Fratura, ramo voltado à quantificação das propriedades dos materiais, análise de seus níveis de tensão e defeitos geradores de trincas, bem como estudo do mecanismo de propagação destas trincas que geralmente ocasionam fraturas.

Os cálculos de fratura utilizam valores aproximados para o estudo dos fatores de concentração de tensões (K) e a resistência à fratura de determinado material sólido é função das forças de coesão que existem entre os átomos. Para a análise de tensões (σ) e sua distribuição na estrutura, os materiais são considerados meios contínuos e isto gera um valor específico de resistência à fratura. Griffith percebeu a diferença entre os valores de resistência teóricos e os reais, admitindo que qualquer material macroscopicamente homogêneo pode conter pequenos defeitos, microtrincas pré-existentes, que possibilitam concentração de tensões de tal modo que o material pode atingir a tensão ideal de fratura nestas pequenas regiões.

Considerando-se uma placa sujeita a tensões contendo trinca pré-existente como mostra a Fig. (1), a fenda só se propagará se existir energia em quantidade suficiente para realizar o trabalho de ruptura do material. Ao se aplicar tensões, o material poderá sofrer deformações e até chegar à fratura. Na prática, a distribuição das deformações específicas remete à distribuição das tensões, afinal estas grandezas são diretamente proporcionais numa certa faixa de admissão de aproximadamente 0, 5% de deformação correspondente ao regime elástico.

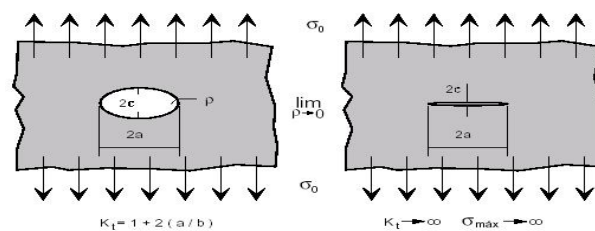


Figura 1. Placa sujeita a tensões com trinca pré-existente.

Analisar a distribuição das tensões de forma simplificada, consiste em admitir que quando propagadas as tensões (σ) baseadas em forças exteriores de ação (T), o material apresentará forças interiores de reação e com isto aplicar equações para o corpo em equilíbrio de forças. Idealmente, os materiais são considerados meios contínuos, homogêneos e isotrópicos, a fim de que as equações da Mecânica dos Sólidos sejam utilizadas com boas aproximações, assim, para uma peça uniforme a distribuição das tensões também o será.

Estabelecendo um diagrama de corpo livre bidimensional para a placa, Fig. (1), representa-se a distribuição de tensões normais (σ) e de corte (δ) na estrutura, Fig. (2). Estando o corpo em equilíbrio, cada direção Ox e Oy do eixo cartesiano também estará.

A estrutura bidimensional representada pelo diagrama de corpo livre, Fig. (2), pode ser estudada unidimensionalmente quando se consideram tensões nulas e invariáveis em uma direção. A dedução para esse tipo de estrutura é simples ao se considerar uma corda disposta ao longo do eixo Ox em equilíbrio estático, sem resistência à flexão e tensionada horizontalmente por uma força (T). Sendo T muito grande quando comparada ao peso da corda, esta se manterá reta e horizontal (tensionada) em sua posição de equilíbrio. Aplicando uma força P vertical no centro de gravidade da corda sem suprimir T , ela sofrerá um desvio para baixo. Se este desvio transversal a Ox for muito grande relativamente ao comprimento da estrutura, a teoria torna-se inaplicável pois a condição de equilíbrio será violada. No caso de desvio pequeno em relação ao comprimento da corda, Fig. (3), a condição de equilíbrio é mantida e pode-se aplicar relações trigonométricas. (Butkov (1973)).

Supõe-se que a corda não é sujeita a nenhum outro tipo de força horizontal além de T , e que as forças atuando para que haja deformação em regime elástico são pequenas quando comparadas a T e agem permanentemente no sistema. Essas

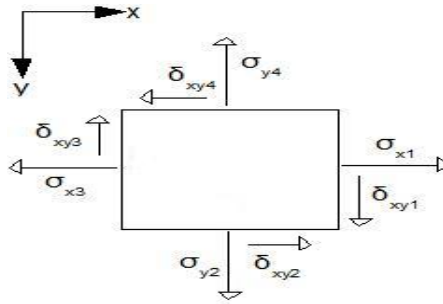


Figura 2. Distribuição de tensões normais e de corte em uma placa

restrições geram consequências tais que: a corda só pode sofrer deslocamento transversal, pois não há deslocamentos e movimentos iniciais de modo longitudinal nem rede subsequente desse tipo de forças, porém a força tangencial na corda é constante e igual a T , Eq. (1), correspondente ao elemento de corda da Fig. (4).

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T \tag{1}$$

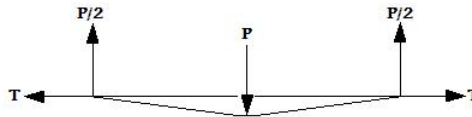


Figura 3. Representação das forças T e P e deflexão em condição de equilíbrio.

Estando as forças externas em equilíbrio, as internas também o estarão. Um elemento de corda sob essas condições tem considerações que mantém-se ao longo do tempo, sendo mantidas as forças. Devido à pequena deflexão, o cosseno da Eq. (1) aproxima-se da unidade, constatando a imposição de equilíbrio onde forças internas são iguais às externas.

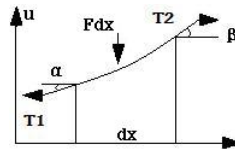


Figura 4. Elemento de corda sujeito a T e F em condição de equilíbrio.

Para quaisquer instante (t) e espaço (x), a equação de deflexão em equilíbrio de forças em um elemento de corda dx com propriedade intensiva (ρ), regido pela Segunda Lei de Newton, pode ser representada por Eq. (2),

$$T(\sin \beta - \sin \alpha) + F dx - \rho g dx = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Através de aproximações trigonométricas, obtém-se a representação geral da Equação Diferencial da Onda unidimensional, Eq. (3).

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) - \rho g dx = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

Na Equação (3), alguns termos podem ser suprimidos tais que sejam desprezíveis, quando comparados às outras grandezas envolvidas no problema. Suprimindo o segundo e terceiro termos da Eq. (3), esta transforma-se em:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4}$$

Para a forma geral Eq. (3) em função da velocidade de propagação da onda c , tem-se a Eq. (5) que é aplicada a qualquer estrutura aproximadamente unidimensional a exemplo de uma barra sujeita a tensão, tal que $c(x) = \sqrt{\frac{T}{\rho(x)}}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5}$$

A Equação da Onda está relacionada à propagação proveniente de excitação externa a exemplo de fontes de tensão mecânica ou de solicitação impulsiva. Ao ser aplicada em uma barra, tem-se movimento denominado propagação de ondas de tensão. Em um corpo sólido unidimensional, a propagação das ondas de tensão se dá por todo o seu comprimento. Essas ondas possuem velocidade finita, e para barras de seção uniforme, é fácil deduzir a velocidade de propagação das ondas de tensão em função da densidade e das tensões atuantes, admitindo-se que a passagem das ondas é uniforme ao longo da barra, e que esta se mantém inalterada.

A consideração de que a barra se mantém inalterada não é totalmente válida pois, durante a propagação do pulso, há contrações e expansões que geram distribuição não uniforme das tensões e com isso, alteração da estrutura da barra associada ao movimento das partículas constituintes da mesma. Partindo das considerações da Mecânica da Fratura, as estruturas possuem pontos de descontinuidade ou defeitos, sendo ótimas candidatas à geração e propagação de trincas. A existência dessas heterogeneidades leva o material a um comportamento diferente daquele dito homogêneo e isotrópico, afinal a propagação das ondas neste, não ocorrerá uniformemente.

A propagação das ondas de tensão provenientes de duas fontes ao longo de estruturas homogêneas e isotrópicas ocorre de maneira contínua e estável, o que não é válido para estruturas não homogêneas. A modelagem matemática desse fenômeno permite descrever o comportamento mecânico da barra sujeita a tensões quantitativa e qualitativamente.

3. METODOLOGIA

A estrutura mecânica qualificada é uma barra metálica que permite aproximação unidimensional satisfatória quanto à representação do fenômeno de propagação relativo ao comportamento da estrutura.

A modelagem do espalhamento da onda, é realizada por solução aproximada da equação diferencial, Eq. (5), através do método numérico das Diferenças Finitas, transformando o problema em equações algébricas lineares solucionáveis através de sistemas de equações. (Wang and Anderson (1982)).

Utilizando as aproximações das derivadas de segunda ordem espacial e temporal,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{x-1}^t - 2u_x^t + u_{x+1}^t}{(\Delta x)^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_x^{t-2} - 2u_x^{t-1} + u_x^t}{(\Delta t)^2}. \quad (6)$$

Substituindo as aproximações da derivada, Eq. (6), na Eq. (5), obtém-se a solução aproximada da equação diferencial da onda unidimensional,

$$\frac{u_{x-1}^t - 2u_x^t + u_{x+1}^t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{c^2(x)} \frac{u_x^{t-2} - 2u_x^{t-1} + u_x^t}{(\Delta t)^2}. \quad (7)$$

Desenvolvendo algebricamente a expressão, obtém-se,

$$u_x^{t+1} = \lambda^2(u_{x+1}^t - 2u_x^t + u_{x-1}^t) + 2u_x^t - u_x^{t-1}. \quad (8)$$

Onde $\lambda(x) = c(x) \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Variando-se o comprimento horizontal ($x = x_0 \dots x_n$) e o tempo ($t = t_0 \dots t_n$), a Eq. (8) é representada na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} u_0^{t+1} \\ u_1^{t+1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t+1} \\ u_n^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^t \\ u_1^t \\ \vdots \\ u_{n-1}^t \\ u_n^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_0^{t-1} \\ u_1^{t-1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t-1} \\ u_n^{t-1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Os Métodos Analíticos Clássicos permitem o cálculo da resposta exata dos deslocamentos, deformações e tensões na estrutura em todos os seus diversos pontos, mas essas soluções nem sempre são conhecidas, pois fogem das aplicações práticas do dia-a-dia. Procedimentos numéricos adequados como o Método das Diferenças Finitas, permitem estudo geral e com precisão aceitável para fenômenos e/ou estruturas mais complexos. (Ruggiero and Lopes (2006), Hoffman (2001)).

A redução de erro para a discretização é alcançada fazendo Δx tender a zero. Em termos geométricos, esta redução corresponde a uma maior divisão da malha, que para uma estrutura unidimensional corresponde a maior quantidade de nós em seu comprimento, portanto, sucessiva divisão de seus intervalos, conforme Fig. (5). A tal refinamento e conhecimento das condições de valor inicial, corresponde aproximação real dos resultados das equações diferenciais, logo, aproximação da real situação problema.

As soluções são obtidas numericamente e interpretadas de acordo com as expectativas teóricas para o modelo e respectivo ensaio propostos. A previsão dos pontos de falha e interações na estrutura mecânicas sujeitas a duas fontes de tensão, são obtidas através da comparação de modelos de propagação de ondas para meios homogêneos, com densidade uniforme, e não-homogêneos, com densidades variáveis.

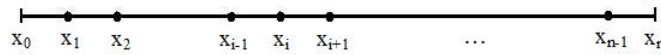


Figura 5. Representação de malha unidimensional

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Durante a propagação das ondas de tensão, cada partícula compositora do sistema sofre deslocamentos ínfimos e a velocidade de propagação dos pulsos ondulatórios dependem do material e dimensão da força aplicada T . Sendo o material um metal, a velocidade de propagação ondulatória neste meio é maior que a relativa ao ar. A presença de microtrincas geradoras de fraturas na estrutura macroscopicamente contínua, incita a existência de microporos no material.

Inicialmente analisa-se o espalhamento da onda através de uma barra homogênea com ρ_1 constante, sujeita a tensões provenientes de duas fontes (estímulos) constantes e uniformes, A e B, localizadas nas extremidades, conforme Fig. (6). Considera-se amplitude da onda igual a 1 nas extremidades da barra (condição de contorno), ou seja $u(A) = u(B) = 1$.

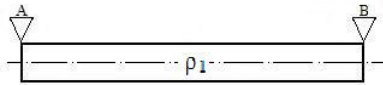


Figura 6. Barra unidimensional homogênea com propriedade ρ_1 constante, sujeita a tensões provenientes de duas fontes A e B.

A Fig. (7) apresenta o espalhamento da onda em função do tempo (t) e do comprimento horizontal (x) em um modelo de uma barra homogênea com velocidade de propagação igual a 1 e com fontes de tensão (A e B) localizadas nas suas extremidades. Para tempos menores que $40ms$ as ondas propagam-se uniformemente ao longo da barra. Após o choque das ondas a configuração da propagação é não uniforme, entretanto, contínua.

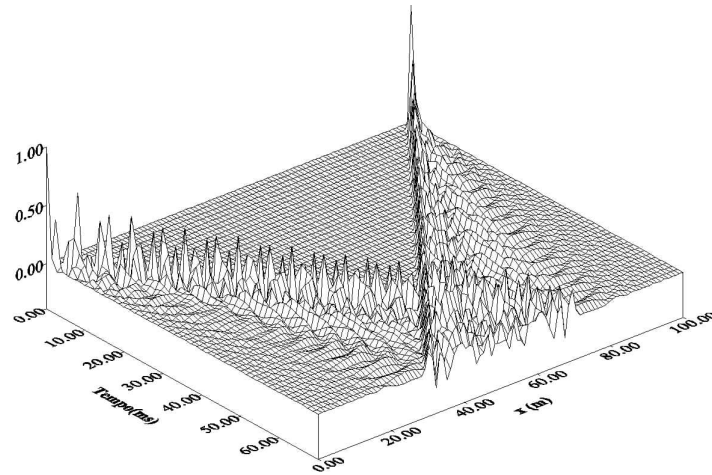


Figura 7. Representação 3d da variação do espalhamento da onda em relação ao tempo e à distância horizontal, em um modelo de uma barra homogênea .

As ondas provenientes de cada fonte interagem entre si devido à própria propagação ao longo da estrutura e contribuem para deformação da barra. Estas deformações implicam em falhas em pontos específicos como resultado da interação das tensões (ondas), tornando a barra uma estrutura anisotrópica.

O modelo da barra não homogênea, Fig. (8), apresenta a variação da densidade (ρ_1 e ρ_2), sujeita a fontes de tensão A e B. Assim como no modelo homogêneo, considera-se amplitude da onda igual a 1 nas extremidades da barra não homogênea (condição de contorno), ou seja $u(A) = u(B) = 1$.

A sequência de Figuras (9) a (12) apresentam o espalhamento da onda em função do tempo (t) e do comprimento horizontal (x) de modelos de barras não homogêneas. O campo de ondas é calculado para modelos de barras com velocidades de propagação na região central igual a: 0,8 (Fig. 9); 0,6 (Fig. 10); 0,4 (Fig. 11); e 0,2 (Fig. 12). Conservando $c = 1$ nas demais áreas da barra.

Na sequência de Figuras (9) a (12) observa-se que as ondas propagam-se uniformemente ao longo da barra para tempos menores que $40ms$. Na região deformada, local do choque das ondas, modelos homogêneo e não homogêneo,

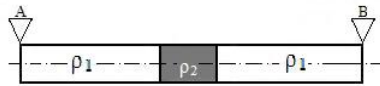


Figura 8. Barra unidimensional heterogênea com propriedade ρ_1 e ρ_2 , sujeita a tensões provenientes das fontes A e B.

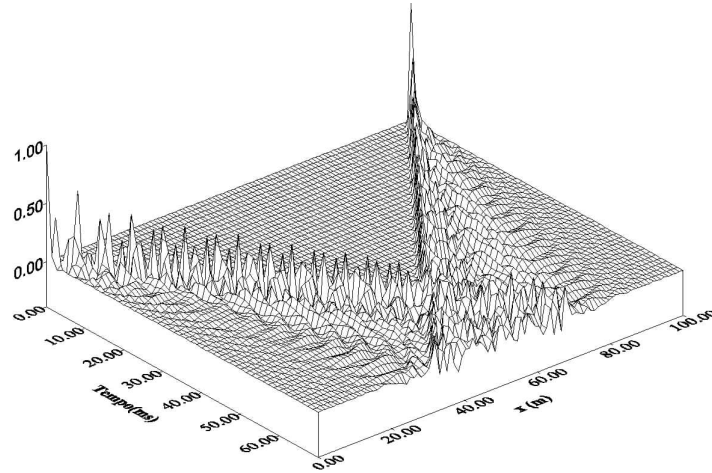


Figura 9. Representação 3d da variação do espalhamento da onda em relação ao tempo e à distância horizontal, em um modelo de uma barra não homogênea com velocidades de propagação na região central igual a 0,8.

ocorre a dispersão das ondas. Para os modelos com velocidade de propagação inferior ou igual a 0,4, Fig. (11) e Fig. (12), observa-se a descontinuidade da onda na região central.

Através dos resultados obtidos com o modelo isotrópico, Fig. (7), e os modelos anisotrópicos, Fig. (9) a (12), observa-se a evolução da fratura na região de concentração de tensões ou de choque das ondas. A comparação dos modelos em estudo especifica o local de deformação estrutural do material, quando sujeito a fontes de tensão nas suas extremidades.

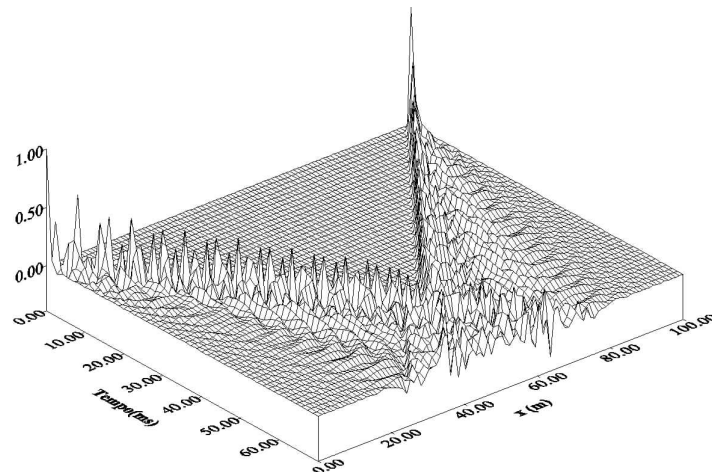


Figura 10. Representação 3d da variação do espalhamento da onda em relação ao tempo e à distância horizontal, em um modelo de uma barra não homogênea com velocidades de propagação na região central igual a 0,6.

5. CONCLUSÃO

A simulação numérica do espalhamento da onda através do método das Diferenças Finitas, aplicada ao modelo estrutural sujeito a fontes de tensão nas extremidades, demonstra eficiência na avaliação do comportamento do material em regiões de falhas ou fraturas. O estudo do modelo estrutural sujeito a tais fontes permite obter justificativas e previsão dos pontos de falha e interações na estrutura, logo, economia em termos de tempo e custo, bem como maior segurança.

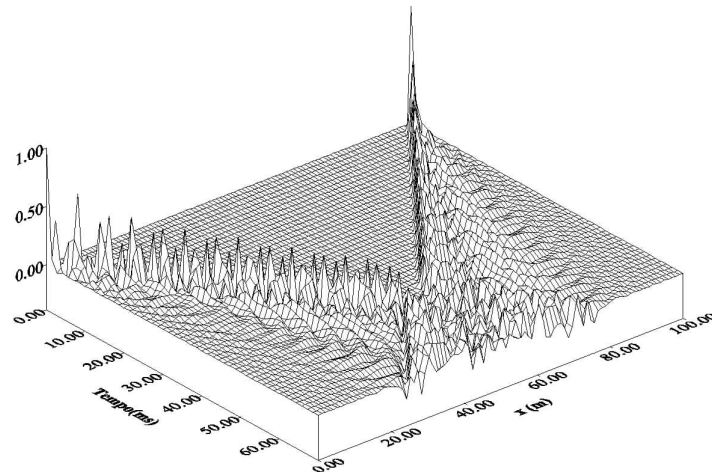


Figura 11. Representação 3d da variação do espalhamento da onda em relação ao tempo e à distância horizontal, em um modelo de uma barra não homogênea com velocidades de propagação na região central igual a 0,4.

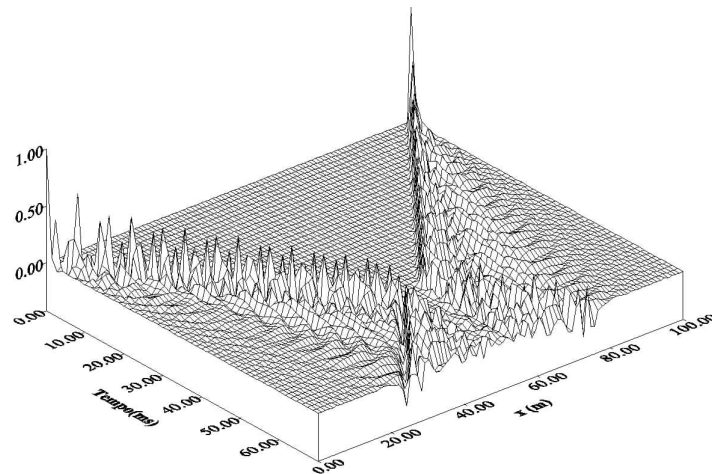


Figura 12. Representação 3d da variação do espalhamento da onda em relação ao tempo e à distância horizontal, em um modelo de uma barra não homogênea com velocidades de propagação na região central igual a 0,2.

6. AGRADECIMENTOS

Agradecemos o suporte dado pelo CNPQ.

7. REFERÊNCIAS

- Branco, C.A.G.M., 1994. *Mecânica dos Materiais*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, Portugal.
- Butkov, E., 1973. *Mathematical Pshysics*. Companhia de Publicação Addison Wesley, Nova Iorque, Estados Unidos da América.
- Cirne, J.M.O., 1984. *Propagação de Ondas de Tensão Longitudinais em Barras de Seção Variável*. Ph.D. thesis, Universidade de Engenharia do Porto, Porto.
- Hoffman, J.D., 2001. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Ed. Marcel Dekker, Inc., Nova Iorque, Estados Unidos da América.
- Ruggiero, M.A.G. and Lopes, V.L.R., 2006. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Ed. Makron Books, São Paulo, Brasil.
- Wang, H.F. and Anderson, M.P., 1982. "Finite difference and finite element methods". In *Introduction to Groundwater Modeling*. Universidade de Wisconsin, Madison, Estados Unidos da América, Vol. 1, p. 235.

NUMERICAL SIMULATION OF MECHANICAL STRUCTURE STRAINED WITH CONTROLLED SOURCES

CAJUHI, Tuanny Raphaella Mendes, trmcajuhi@ifba.edu.br¹
BATISTA, Lurimar Smera, lurimar@ifba.edu.br¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), Rua Emídio dos Santos s/n, Barbalho, Salvador, Bahia.

Abstract. Investigate complex problems in structures and reduce costs are necessities, and many algorithms about mechanical structures have been developing in recent years. Mathematical models composed by differential equations are applied through computational simulations. The Finite Difference Method (FDM) is used to obtain algebraic equations. Investigate physical changes on mechanical structures through modeling or numerical simulation is so effective to obtain answers about stimulus applied on a structure. The structural model consists a bar (unidimensional model) strained proceeding by two sources (stimuli) on its extremities regularly, that interact themselves because own propagation and the propagation along the structure that supportes anisotropies implicating cracks in specific points of structure, the result of interaction (waves). The methodology utilized in this paper is based on updating bibliography about FDM and techniques of programation, successive implantation of algorithms based on FDM to modelate unidimensional strained structures. The process allows to foreknowledge crack points and result of interactions in each point of the structure. The study of structural model strained with wave propagation through simulation, allows to understood the behavior of the material (structure), obtaining explanations and foreknowledge about crack points and structural interactions, so economy in time, costs and more security.

Palavras-chave: simulation, structure, stresses, waves, cracks.