

## **MODELO DE DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL ANALÍTICO PARA A DESCRIÇÃO DA CINÉTICA DE SECAGEM DE MADEIRA: OTIMIZAÇÃO E SIMULAÇÃO**

**Laerson Duarte da Silva, laerson.duarte@gmail.com<sup>1</sup>**  
**Pedro Luiz do Nascimento, pedropln@yahoo.com.br<sup>1</sup>**  
**Cleide M.D.P.S. e Silva, cleidedps@uol.com.br<sup>1</sup>**  
**Wilton Pereira da Silva, wiltonps@uol.com.br<sup>1</sup>**  
**Marcos A. A. Lins, ma1809al@yahoo.com.br<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Física, CCT, Av. Aprígio Veloso, 882, B. Universitário, 58.429-900, Campina Grande, PB, Brasil

**Resumo:** Este artigo compara modelos de difusão unidimensional para descrever a secagem de madeira. Os modelos são referentes às soluções analíticas da equação de difusão em uma parede infinita com condições de contorno do primeiro e terceiro tipos. As soluções analíticas foram acopladas a um otimizador baseado no método inverso, o que permite calcular os parâmetros de processo para um conjunto de dados experimentais. Uma vez determinados os parâmetros de processo, a cinética de secagem de madeira foi simulada através dos modelos propostos. Os resultados obtidos levam à conclusão de que o modelo unidimensional com condição de contorno do primeiro tipo não é adequado para a descrição da cinética de secagem. Já o modelo unidimensional com condição de contorno do terceiro tipo descreve adequadamente o processo.

**Palavras-chave:** Método inverso, Soluções analíticas, Distribuição de umidade, Simulação de secagem, Otimizador

### **1. INTRODUÇÃO**

A indústria de produtos de madeira desempenha um papel fundamental na economia de diversos países. Segundo Dincer (1998), em alguns países como o Canadá, essa indústria utiliza cerca de 1% do total da energia consumida, mesmo sem levar em conta a indústria de papel e celulose. Por outro lado, a secagem é uma das etapas mais importantes no processamento de madeira, sendo muito importante sobre a qualidade final do produto.

Em alguns trabalhos de pesquisa sobre secagem de madeira, apenas os dados experimentais são apresentados (Dedic e Zlatanovic, 2001) mas, em geral, a fim de descrever o processo de secagem, deve ser usado um modelo matemático. Vários modelos de secagem estão disponíveis na literatura e, entre estes, podem ser citados os seguintes: modelos empíricos (Dincer, 1998; Jian-Feng et al., 2007); modelos baseados na lei de Darcy (Pinheiro et al., 1998) e modelos de difusão. É muito comum usar modelos de difusão para descrever a cinética de secagem de madeira (Liu e Simpson, 1996; Dincer, 1998; Liu e Simpson, 1999; Baronas et al., 1999; Baronas et al., 2001; Liu et al., 2001; Kulasiri e Woodhead, 2005; Ricardez et al., 2005; Olek e Weres, 2007). Para descrever a cinética de secagem através de um modelo de difusão, devem-se conhecer as condições iniciais e de contorno. Na literatura, a condição de contorno usual é a do terceiro tipo (Liu e Simpson, 1996; Dincer 1998; Liu e Simpson, 1999; Baronas et al., 1999; Baronas et al., 2001; Liu et al., 2001; Olek e Weres, 2007), mas a do primeiro tipo é também utilizada em alguns trabalhos de pesquisa (Kulasiri e Woodhead, 2005; Ricardez et al., 2005).

Em muitos trabalhos de pesquisa, é adotado o modelo unidimensional (Liu e Simpson, 1996; Dincer, 1998, Liu et al., 2001; Kulasiri e Woodhead, 2005; Mellado, 2007). Em alguns trabalhos, a fim de garantir que o processo de difusão seja unidimensional, a superfície do produto é selada antes da secagem (Liu e Simpson, 1999; Tremblay et al., 2000; Olek e Weres, 2007; Jianfeng et al., 2007). Apesar dos modelos unidimensionais serem encontrados frequentemente na literatura, são encontrados também modelos bidimensionais (Baronas et al., 1999; Baronas et al., 2001; Ricardez et al., 2005) e tridimensionais (Dedic et al., 2003; Salin, 2008). Por outro lado, em geral, há trabalhos que consideram o meio homogêneo para descrever a cinética de secagem de madeira, (Liu et al., 2001; Ricardez et al., 2005; Kulasiri e Woodhead, 2005; Mellado, 2007). No entanto, existem autores que consideram a madeira como um meio heterogêneo (Perré e Turner, 2002).

Deve-se resolver a equação de difusão se um modelo difusivo for utilizado para descrever a cinética de secagem de um produto. Alguns trabalhos apresentam soluções analíticas para a equação de difusão, especialmente se a condição de contorno é do primeiro tipo (Kulasiri e Woodhead, 2005; Ricardez et al., 2005). Para a condição de contorno do terceiro

tipo, as soluções numéricas são frequentemente encontradas na literatura (Baronas et al., 1999; Liu e Simpson, 1999; Liu et al., 2001; Olek et al., 2005; Olek e Weres, 2007). Se uma solução analítica é proposta para a condição de contorno do terceiro tipo, normalmente, a série que representa a solução é expressa apenas pelo primeiro termo, e os parâmetros de processo são determinados por regressão (Dincer, 1998; Jian-Feng et al., 2007). Este procedimento dispensa o cálculo das raízes através da equação característica, e funciona bem se o valor do número de Biot for pequeno. Se o número de Biot não for pequeno, mais termos da série são necessários para representar a cinética de secagem. Então, uma possível razão para a falta de soluções analíticas na literatura para problemas de difusão com condição de contorno do terceiro tipo pode ser atribuída à grande quantidade de raízes, que deve ser determinada de forma a cobrir todo o domínio do número de Biot, quando são considerados muitos termos da série.

Para usar as soluções acima referidas na descrição da cinética de secagem, os parâmetros de processo devem ser conhecidos. Estes parâmetros podem ser determinados através de correlações empíricas (Pinheiro et al., 1998; Tremblay et al., 2000; Nabhani et al., 2003) ou através de processos de otimização, que normalmente utilizam o método inverso (Liu e Simpson, 1999; Liu et al., 2001; Olek e Weres, 2007). Uma vez conhecidos os parâmetros do processo, a simulação da cinética de secagem pode ser realizada, e o teor de umidade em um instante  $t$  em qualquer posição dentro da madeira pode ser determinado. O conhecimento da distribuição de umidade durante a secagem é importante porque os gradientes de umidade (e temperatura) produzem tensões internas que podem danificar a madeira (Allegretti e Ferrari, 2008).

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

Neste trabalho, serão usados modelos de difusão para descrever a secagem de madeira serrada. Estes modelos são unidimensionais com condições de contorno do primeiro tipo e do terceiro tipo. Neste sentido, serão apresentadas, a seguir, as expressões analíticas que descrevem o teor de umidade em função do tempo, para os modelos citados.

### 2.1. A Equação de Difusão

A Equação de difusão é muito usada para descrever o transporte de água em meios porosos, e pode ser escrita como (Luikov, 1968; Crank, 1992; Bird et al., 2001):

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M), \quad (1)$$

onde  $M$  é o teor de umidade em base seca,  $t$  é o tempo, e  $D$  é a difusividade efetiva da água. Para resolver a Eq. (1) devem ser definidas as condições iniciais e de contorno. Para resolvê-la analiticamente, devem-se estabelecer algumas hipóteses:

- o mecanismo de transporte de água no interior do sólido é somente a difusão líquida;
- a distribuição de umidade inicial deve ser uniforme;
- as dimensões do sólido não variam durante a difusão de água;
- o coeficiente de transferência convectiva de massa é constante durante a difusão de água;
- a difusividade efetiva da água não varia durante a difusão;
- o sólido é considerado homogêneo e isotrópico.

As soluções analíticas, considerando as hipóteses acima, podem ser obtidas para diversas geometrias através de separação de variáveis, e as soluções para uma parede infinita com condições de contorno do primeiro e terceiro tipos serão apresentadas a seguir.

#### 2.1.1. Parede Infinita com Condição de Contorno do Primeiro Tipo

A solução da Eq. (1) para a condição de contorno do primeiro tipo, em coordenadas cartesianas e supondo uma parede infinita com espessura  $L_1$  na direção  $x$ , é dada por (Luikov 1968; Crank 1992):

$$M(x, t) = M_{eq} + (M_0 - M_{eq}) \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \cos\left(\mu_{1n} \frac{x}{L_1/2}\right) \exp\left(-\mu_{1n}^2 \frac{D}{(L_1/2)^2} t\right), \quad (2)$$

onde  $M(x,t)$  é o teor de umidade no instante  $t$  numa posição  $x$  no interior da parede infinita,  $M_{eq}$  e  $M_0$  são, respectivamente, o teor de umidade de equilíbrio e teor de umidade inicial, e as expressões para  $A_{1n}$  (coeficientes da solução analítica dependente da posição para a condição de contorno do primeiro tipo) e  $\mu_{1n}$  (raízes da equação característica para condição de contorno do primeiro tipo) são dadas por:

$$A_{1n} = (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_{1n}} \quad \text{e} \quad \mu_{1n} = (2n-1) \frac{\pi}{2}. \quad (3a-b)$$

O valor médio do teor de umidade em um instante  $t$ , denotado por  $\bar{M}(t)$ , pode ser obtido através da expressão:

$$\bar{M}(t) = \frac{1}{L_1} \int M(x, t) dx, \quad (4)$$

onde a integração é realizada em todo o domínio (de  $-L_1/2$  até  $L_1/2$ ), que resulta em:

$$\bar{M}(t) = M_{eq} + (M_0 - M_{eq}) \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} \exp\left(-\mu_{1n}^2 \frac{D}{(L_1/2)^2} t\right), \quad (5)$$

em que  $B_{1n}$  são os coeficientes da solução analítica para o teor de umidade médio (condição de contorno do primeiro tipo), dado por:

$$B_{1n} = \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2}, \quad (6)$$

### 2.1.2. Parede Infinita com Condições de Contorno do Terceiro Tipo

Para um problema de difusão unidimensional, a condição de contorno do terceiro tipo é expressa da seguinte forma:

$$-D \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pm L_1/2} = h \left( M(x, t) \Big|_{x=\pm L_1/2} - M_{eq} \right), \quad (7)$$

onde  $h$  é o coeficiente de transferência convectiva de massa. Para esta condição de contorno, a solução é dada por (Luikov 1968; Crank 1992):

$$M(x, t) = M_{eq} + (M_0 - M_{eq}) \sum_{n=1}^{\infty} A_{3n} \cos\left(\mu_{3n} \frac{x}{L_1/2}\right) \exp\left(-\mu_{3n}^2 \frac{D}{(L_1/2)^2} t\right), \quad (8)$$

onde as expressões para  $A_{3n}$  (coeficientes da solução analítica dependente da posição para a condição de contorno do terceiro tipo) e  $\mu_{3n}$  (raízes da equação característica para condição de contorno do terceiro tipo) são dadas por:

$$A_{3n} = \frac{4 \sin(\mu_{3n})}{2\mu_{3n} + \sin(2\mu_{3n})} \quad \text{e} \quad \cot(\mu_{3n}) = \frac{\mu_{3n}}{Bi}, \quad (9a-b)$$

na qual  $Bi$  é o número de Biot dado por:

$$Bi_1 = \frac{hL_1/2}{D}, \quad (10)$$

Então, para um determinado número de Biot, se os  $\mu_{3n}$  são conhecidos, os coeficientes  $A_{3n}$  são completamente definidos. A Eq. (9b) é chamada equação característica e pode ser numericamente resolvida para qualquer número de Biot. Para tal, este trabalho segue a recomendação de Silva et al (2010), na qual os autores enfatizam que, para baixos números de Biot ( $Bi < 5$ ), apenas 5 termos da série produzem erros de truncamentos desprezíveis. Já para elevados números de Biot, por exemplo  $Bi = 200$ , mesmo a consideração de 16 termos resulta em um erro de truncamento de 1,7% em  $t = 0$  (que é o instante com erro de truncamento máximo). Portanto, um programa auxiliar foi escrito em Fortran, e as primeiras 16 raízes da Eq. (9b) foram calculadas para 469 valores especificados de números de Biot, de  $Bi = 0$  (o que corresponde a uma resistência infinita ao fluxo de água na superfície) até  $Bi = 200$  (que corresponde praticamente a uma condição de contorno de equilíbrio).

De acordo com a Eq. (4), o valor médio do teor de umidade em um instante  $t$  é dado como a seguir:

$$\bar{M}(t) = M_{eq} - (M_{eq} - M_0) \sum_{n=1}^{\infty} B_{3n} \exp\left[-\frac{\mu_{3n}^2}{(L_1/2)^2} Dt\right], \quad (11)$$

onde  $B_{3n}$  são os coeficientes da solução analítica para o teor de umidade médio (condição de contorno do terceiro tipo), e é dado por:

$$B_{3n} = \frac{2Bi^2}{\mu_{3n}^2 (Bi^2 + Bi + \mu_{3n}^2)}, \quad (12)$$

Então, para um determinado número de Biot, com os  $\mu_{3n}$  calculados pela Eq. (9b), os coeficientes  $B_{3n}$  são completamente definidos. Assim, a Eq. (11) pode ser usada para calcular a teor de umidade médio em um dado instante  $t$ .

## 2.2. Otimização: Determinação de Parâmetros

Para um conjunto de dados experimentais, as soluções analíticas apresentadas podem ser usadas para determinar os parâmetros de processo, se essas soluções forem acopladas a um otimizador. Neste caso, os parâmetros podem ser determinados pelo método inverso. Para tal, uma função objetivo é definida e, neste trabalho, o indicador estatístico qui-quadrado será utilizado para este fim (ver, por exemplo, Olek e Weres, 2007).

### 2.2.1. Otimizador para Soluções com Condições de Contorno do Primeiro Tipo

Para a condição de contorno do primeiro tipo, o teor de umidade médio em um instante  $t$  depende apenas da difusividade efetiva da água  $D$ . Então, para um determinado conjunto de dados experimentais, o qui-quadrado é definido da seguinte forma (Bevington 1992; Taylor 1997):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{[\bar{M}_i^{\text{exp}} - \bar{M}_i^{\text{ana}}(D)]^2}{\sigma_i^2}, \quad (13)$$

onde  $\bar{M}_i^{\text{exp}}$  é o teor de umidade médio do  $i$ -ésimo ponto experimental;  $\bar{M}_i^{\text{ana}}(D)$  é o teor de umidade médio no mesmo ponto, calculado através da Eq. (5);  $\sigma_i$  é o desvio-padrão do teor de umidade médio experimental no ponto  $i$ ,  $D$  é a difusividade efetiva da água e  $N_p$  é o número de pontos experimentais. Um valor ótimo para  $D$  pode ser determinado para cada conjunto de dados experimentais através da minimização da Eq. (13). Se  $\sigma_i$  não foi obtido experimentalmente e, portanto, é desconhecido, deve-se atribuir  $\sigma_i = 1$  a todos os pontos experimentais (Olek Weres, 2007 e Silva et al., 2009). Silva et al (2009), propuseram um algoritmo para determinar  $D$ , que é constituído essencialmente pelos seguintes passos:

- Um valor inicial próximo a zero ( $1 \times 10^{-20}$ ) é atribuído a  $D$ , e substituído na Eq. (5), para um certo número de termos  $nt$ . Neste trabalho, para a condição de contorno do primeiro tipo,  $nt$  é igual a 200, como sugerido por Silva et al (2009). Assim,  $\bar{M}_i^{\text{ana}}(D)$  pode ser calculado em um determinado tempo pela Eq. (5) e, conseqüentemente,  $\chi^2$  pode ser determinado para um conjunto de dados experimentais através da Eq. (13). Então, o valor de  $D$  é dobrado, e um novo  $\chi^2$  é calculado. O novo  $\chi^2$  é comparado com o valor antigo. Se o novo valor for inferior ao anterior,  $D$  é novamente dobrado, o valor correspondente de  $\chi^2$  é calculado, e comparado com o anterior. Este procedimento é repetido até que o último  $\chi^2$  calculado seja superior ao valor anterior. Desse modo, o antepenúltimo e o último valores de  $D$ , denominados respectivamente por  $D_a$  e  $D_b$ , definem uma região que contém o valor mínimo de  $\chi^2$ . O penúltimo valor da difusividade efetiva da água corresponde ao menor valor de  $\chi^2$  obtido nesse intervalo.
- O último procedimento pode ser usado para refinar os valores de  $D$  entre  $D_a$  e  $D_b$ , subdividindo esse intervalo em  $n_v$  valores de  $D$  uniformemente distribuídos. Em seguida, um intervalo mais refinado pode ser obtido, e este procedimento pode ser repetido até que um critério de convergência seja satisfeito.

O algoritmo descrito acima não necessita de um valor inicial de entrada, nem da definição de um intervalo de pesquisa para a determinação de um valor ótimo para "D". Isto é uma característica muito confortável do processo de otimização, pois o usuário do algoritmo só precisa informar o conjunto de dados experimentais, uma vez que as suposições de valores que definem o intervalo que contém o valor ótimo não são necessárias.

### 2.2.2. Otimizador para Soluções com Condição de Contorno do Terceiro Tipo

A fim de aplicar o otimizador descrito acima para a condição de contorno convectiva, a Eq. (13) deve ser devidamente adaptada. Neste caso, a função objetivo para a minimização torna-se:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_p} [\overline{M}_i^{\text{exp}} - \overline{M}_i^{\text{ana}}(D, Bi)]^2 \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (14)$$

A função objetivo dada pela Eq. (14) depende da difusividade efetiva da água, e também do número de Biot de transferência de massa ou, equivalentemente, do coeficiente de transferência convectiva de massa  $h$ . No entanto, para um determinado número de Biot, a Eq. (14) é apenas uma função da difusividade efetiva da água. Portanto, o otimizador desenvolvido por Silva et al (2009) pode ser aplicado para a minimização da Eq. (14), determinando um valor ótimo da difusividade efetiva da água para um número de Biot especificado. Admitindo que a difusividade efetiva da água  $D$  e que o coeficiente de transferência convectiva de massa  $h$  são independentes um do outro, o processo de minimização pode ser repetido para todos os 469 números de Biot, que cobrem o domínio de 0 a 200. Depois de uma varredura de todos os números de Biot, o menor qui-quadrado dos 469 mínimos é determinado. Uma vez que todo o domínio dos números de Biot de transferência de massa é varrido, não é necessário indicar os valores iniciais ou intervalos de busca para a determinação dos valores ótimos para  $Bi$  e  $D$  e, conseqüentemente, para  $h$ .

### 2.3. Programa Utilizado nesta Pesquisa

O programa utilizado nesta pesquisa para determinar parâmetros ótimos e para simular a cinética de secagem, foi desenvolvido em um computador Intel Pentium IV com 2 GB de memória RAM. O código fonte foi compilado em um estúdio chamado Compaq Visual Fortran 6.6.0 Edição Profissional, usando a opção de programação QuickWin Application e Plataforma Windows XP. O programa desenvolvido inclui uma opção para desenhar diagramas que representam as distribuições do teor de umidade em um determinado plano. As análises estatísticas foram realizadas através do programa LAB Fit Curve Fitting Software (Silva e Silva, 2009). Por outro lado, o conjunto de dados experimentais referentes à cinética de secagem foram extraídos da literatura e digitalizados utilizando o programa xyExtract Graph Digitizer, disponível na Internet.

### 2.4. Dados Experimentais

Com o intuito de testar o modelo proposto, será analisado, neste trabalho, um conjunto de dados experimentais obtidos por Mellado (2007) referindo-se à secagem de madeira serrada (*Pinus elliottii* Engelm.). Em seu estudo, Mellado (2007) usou madeira serrada com 20 anos de idade, obtida através de corte tangencial. A densidade da matéria seca foi de  $405 \text{ kg m}^{-3}$ . A amostra da madeira foi colocada em uma câmara com ar forçado à temperatura de  $40^\circ\text{C}$ , com umidade relativa de 40%, com velocidade de  $3 \text{ m s}^{-1}$  e dimensões  $36 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 745 \text{ mm}$ . Os valores do teor de umidade inicial e de equilíbrio são de respectivamente 1,213 e 0,070.

No experimento, Mellado (2007) não determinou as incertezas experimentais dos teores de umidade médios, e neste trabalho será atribuído o valor 1 para essas incertezas. Por outro lado, os pares  $(t, \overline{M})$  para todos os pontos da cinética de secagem foram obtidos pela digitalização do gráfico que representa esta cinética.

Para as condições de secagem empregadas no experimento, o modelo de difusão líquida parece ser razoável, apesar de uma possível anisotropia e heterogeneidade do meio. Neste trabalho, admitiremos que estas características ocorrem em uma escala pequena e pode, portanto, ser descartada, bem como o encolhimento (Liu e Simpson, 1996; Dincer, 1998; Baronas et al., 1999; Liu e Simpson, 1999; Baronas et al., 2001; Kulasiri e Woodhead, 2005; Ricardez et al., 2005; Olek e Weres, 2007).

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A fim de comparar os modelos 1 e 2, cada um deles foi usado para descrever os dados experimentais da secagem de madeira serrada. Os resultados obtidos são apresentados a seguir.

### 3.1. Modelo 1: Unidimensional com Condição de Contorno do Primeiro Tipo

A condição de contorno do primeiro tipo é encontrada na literatura para descrever a cinética de secagem de madeira (Kulasiri e Woodhead, 2005; Ricardez et al., 2005), contudo esta condição de contorno é menos usual do que a condição de contorno convectiva. Para um conjunto de dados experimentais de secagem de madeira serrada ( $L_1 = 0,036 \text{ m}$  de espessura), utilizando o algoritmo de otimização descrito no item 2.2.1 juntamente com Eq. (5), a relação entre o qui-quadrado e difusividade pode ser observada na Fig. (1), nas vizinhanças do ponto ótimo.

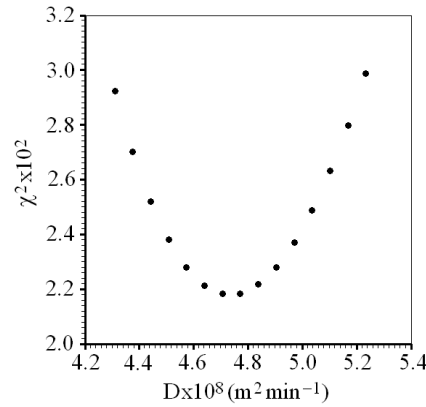


Figura 1. Modelo 1: qui-quadrado em função da difusividade nas vizinhanças do ponto ótimo.

O valor para a difusividade, determinado pela otimização, foi  $D = 7,890 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  ( $D = 4,734 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ min}^{-1}$ ), e os indicadores estatísticos foram:  $R^2 = 0,9883$  e  $\chi^2 = 2,1791 \times 10^{-2}$ . Usando Eq. (5) e o valor determinado para a difusividade, a cinética de secagem pode ser simulada, como apresentada na Fig. 2.

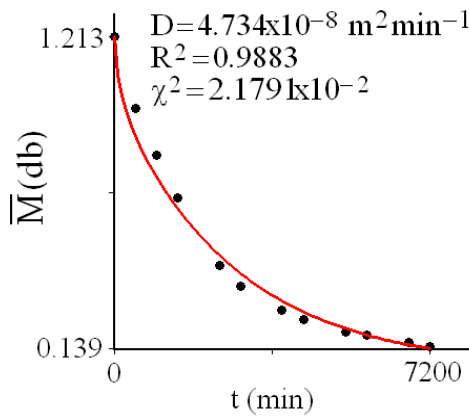


Figura 2. Cinética de secagem realizada através do modelo 1 (unidimensional com condição de contorno do primeiro tipo).

A inspeção visual da Fig. (2), bem como os indicadores estatísticos, permitem afirmar que os resultados obtidos para o modelo 1 não são bons. Por outro lado, pela Eq. (2) pode-se determinar o teor de umidade no contorno e no centro da parede infinita como função do tempo, e isso pode ser observado na Fig. (3).

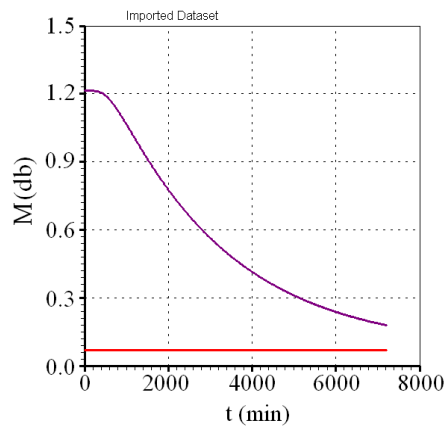


Figura 3. Evolução temporal do teor de umidade: no centro (superior) e no contorno (inferior) para a condição de contorno do primeiro tipo.

Para o modelo 1, a maior diferença entre os teores de umidade no centro e no contorno da parede infinita ocorre no início do processo de secagem ( $t = 0$ ) e é igual a  $M_0 - M_{eq}$ . Observa-se, que este modelo é muito simplificado e, para a secagem investigada, apenas o fluxo radial foi computado.

### 3.2. Modelo 2: Unidimensional com Condição de Contorno do Terceiro Tipo

Para uma parede infinita com condição de contorno do terceiro tipo, a utilização do algoritmo de otimização descrito no item 2.2.2 juntamente com a Eq. (11) permite determinar a relação entre o qui-quadrado e o número de Biot ( $Bi_1$ ), como pode ser observado na Fig. (4), nas vizinhanças do ponto ótimo.

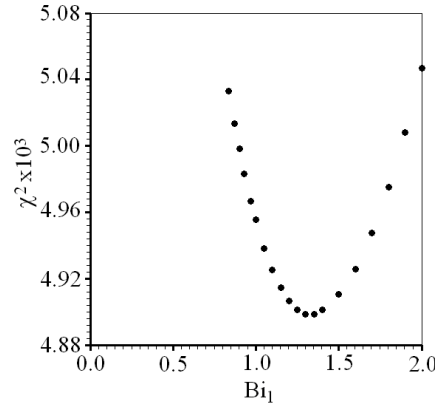


Figura 4. Modelo 2: qui-quadrado em função do número de Biot nas vizinhanças do ponto ótimo.

Para o modelo 2, os valores para a difusividade efetiva da água e para o coeficiente de transferência convectiva de massa, determinados por otimização, foram, respectivamente,  $D = 2,610 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  ( $D = 1,566 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ min}^{-1}$ ), e  $h = 1,922 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$  ( $h = 1,153 \times 10^{-5} \text{ m min}^{-1}$ ). O número de Biot foi 1,3250 e os indicadores estatísticos foram:  $R^2 = 0,9970$  e  $\chi^2 = 4,8983 \times 10^{-3}$ . Usando Eq. (11) e os valores determinados para  $D$  e  $h$ , a cinética de secagem pode ser simulada, como ilustra a Fig. (5).

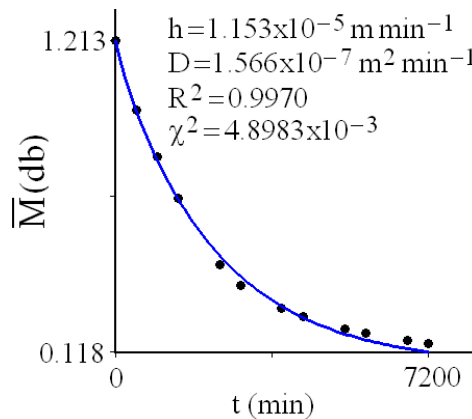
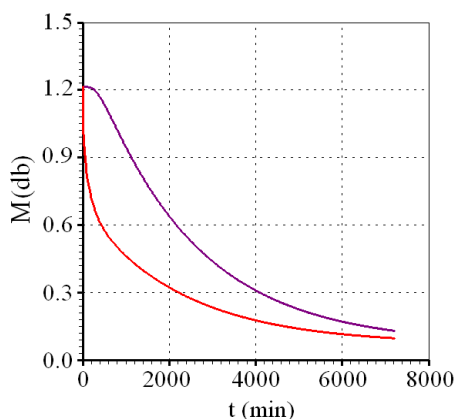


Figura 5. Cinética de secagem realizada através do modelo 2 (unidimensional com condição de contorno do terceiro tipo).

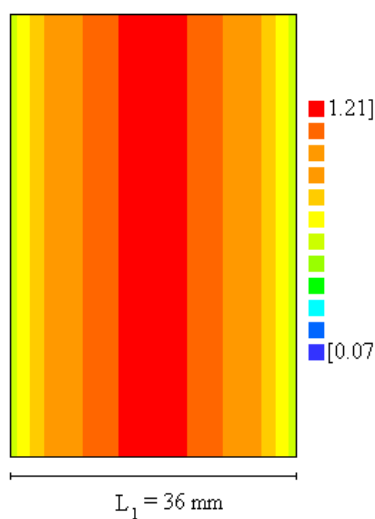
Para o modelo 2, os indicadores estatísticos são muito melhores do que aqueles obtidos para o modelo 1. Particularmente, o qui-quadrado do modelo 2 é reduzido em mais de quatro vezes em comparação com o qui-quadrado referente ao modelo 1. Com a Eq. (8) pode-se determinar o teor de umidade no contorno e no centro da parede infinita como função do tempo, como se observa na Fig. (6).



**Figura 6. Evolução temporal do teor de umidade: no centro (superior) e no contorno (inferior) para a condição de contorno do terceiro tipo.**

Pela inspeção da curva inferior na Fig. (6) é possível afirmar que nos instantes iniciais da secagem, o teor de umidade cai muito rapidamente no contorno, mas se observa que há uma resistência ao fluxo de água. Depois dos instantes iniciais, a diminuição do teor de umidade no contorno é mais lento do que no início. A partir dessas observações e dos resultados obtidos, parece claro que a condição de contorno adequada para o processo de secagem é a condição de contorno convectiva (Liu e Simpson, 1996; Dincer 1998; Liu e Simpson, 1999; Baronas et al., 1999; Baronas et al., 2001; Olek e Weres, 2007).

O conhecimento da diferença entre o teor de umidade no centro e no contorno da parede infinita é importante, devido essa diferença causar tensões que podem danificar a madeira. A maior diferença, de 0,560 (ou seja, 1,146 no centro e 0,586 no contorno), aparece em  $t = 472$  min. Nesse instante, usando a Eq. (8), a distribuição de umidade na parede infinita pode ser observada pelo diagrama de cores, conforme se observa na Fig. (7).



**Figura 7. Distribuição do teor de umidade em  $t = 472$  min determinado através do modelo 2 (unidimensional com a condição de contorno do terceiro tipo).**

Obviamente, a distribuição do teor de umidade no interior da parede infinita pode ser diferente daquela apresentada na Fig. (7), se as hipóteses estabelecidas na Seção 2.1 não forem totalmente corretas. Mas, pelo menos, a distribuição apresentada serve como uma primeira idéia em relação ao processo investigado. Por outro lado, mais uma vez, observa-se que apenas o fluxo radial foi computado.

### 3.3. Análises

A análise a seguir pressupõe que as hipóteses estabelecidas na seção 2.1 para o meio de difusão são aceitáveis para o processo de secagem sob investigação. Neste caso, os resultados obtidos neste trabalho podem ser resumidos na Tabela 1.



**Tabela 1. Resultados para parâmetros determinados através dos modelos 1 e 2.**

Modelo	D (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )	h (m s <sup>-1</sup> )	R <sup>2</sup>	χ <sup>2</sup>
1	7.890x10 <sup>-10</sup>	-	0.9883	2.1791x10 <sup>-2</sup>
2	2.610x10 <sup>-9</sup>	1.922x10 <sup>-7</sup>	0.9970	4.8983x10 <sup>-3</sup>

Uma inspeção da Tab. (1) indica que o modelo 1 é muito pobre e deve ser desconsiderado na descrição do processo de secagem de madeira serrada. Uma comparação entre as indicadores estatísticos dos modelos 1 e 2 indica que o modelo 2 é melhor do que o modelo 1, como era esperado. Alguns minutos após o instante 472 minutos, por exemplo, em t = 504 min, cada modelo permite calcular o índice de umidade médio, e os resultados são apresentados na Tabela 2.

**Tabela 2. Resultados para  $\bar{M}(504 \text{ min})$  obtidos através dos quatro modelos.**

Modelo	$\bar{M}(504 \text{ min})$
1	0.8630
2	0.9537

Observando-se a Tab. (2) verifica-se que o valor do teor de umidade médio determinado pelo modelo 2 (igual a 0,954) é significativamente diferente do teor de umidade médio determinado através do modelo 1 (igual a 0,863).

#### 4. CONCLUSÃO

A descrição da cinética de secagem de madeira através do modelo com condição de contorno convectiva é muito mais adequada do que a descrição através do modelo com condição de contorno de equilíbrio.

A análise da cinética de secagem envolvendo o modelo 2 indica que na parte final do processo de secagem, o valor da difusividade efetiva da água deve ser um pouco menor do que o valor obtido. Então, para uma descrição rigorosa do processo de secagem, uma expressão adequada para a difusividade efetiva da água, que diminui quando diminui o teor de umidade, pode render melhores resultados do que os resultados obtidos no presente artigo. Neste caso, as soluções analíticas apresentadas neste artigo devem ser substituídas por uma solução numérica, que permite simular processos de difusão envolvendo difusividade variável. Mas, pelo menos, os resultados apresentados neste estudo servem como uma primeira e boa idéia sobre o processo investigado. Além disso, os resultados obtidos para os parâmetros de processo podem ser usados como valores iniciais em outros processos de otimização.

#### 5. REFERÊNCIAS

- Allegrette O, Ferrari S (2008) A sensor for direct measurement of internal stress in wood during during: experimental tests toward industrial application. *Drying Technology* 26(9):1150-1154
- Baronas R, Ivanauskas F, Sapagovas M (1999) Modelling of wood drying and an influence of lumber geometry on drying dynamics. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vilnius, IMI 4:11-22
- Baronas R, Ivanauskas F, Juodeikiene I, Kajalavicius A (2001) Modelling of moisture movement in wood during outdoor storage. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 6(2):3-14
- Bevington PR, Robinson DK (1992) *Data reduction and error analysis for the Physical Sciences*. Second ed., WCB/McGraw-Hill, Boston
- Bird RB, Stewart WE, Lightfoot EN (2001) *Transport phenomena*. 2<sup>nd</sup> Ed., John Wiley & Sons, Inc, New York
- Crank J (1992) *The Mathematics of Diffusion*. Clarendon Press, Oxford, UK
- Dedic AD, Zlatanovic M (2001) Some aspects and comparisons of microwave drying of beech (*Fagus moesiaca*) and fir wood (*Abies alba*). *Holz als Roh- und Werkstoff* 59(4):246-249
- Dedic AD, Mujumdar AS, Voronjec, DK (2003) A three dimensional model for heat and mass transfer in convective wood drying. *Drying Technology* 21(1):1-15
- Dincer I (1998) Moisture transfer analysis during drying of slab woods. *Heat and Mass Transfer* 34(4):317-320
- Jian-feng Z, Ji-you G, Ying-chun C (2007) Analysis of moisture diffusivity of larch timber during convective drying condition by using Crank's method and Dincer's method. *Journal of Forestry Research* 18(3):199-203
- Kulasiri D, Woohed I (2005) On modelling the drying of porous materials: analytical solutions to coupled partial differential equations governing heat and moisture transfer. *Mathematical Problems in Engineering* 2005(3):275-291
- Liu JY, Simpson WT (1996) Mathematical relationship between surface emission and diffusion coefficients. *Drying Technology* 14(3-4):677-699
- Liu JY, Simpson WT (1999) Inverse determination of diffusion coefficient for moisture diffusion in Wood. *Proceedings of 33<sup>RD</sup> ASME National Heat Transfer Conference: Heat and Mass Transfer in Porous Media*, August 15-17, Albuquerque, New Mexico

- Liu JY, Simpson WT, Verrill SP (2001) An inverse moisture diffusion algorithm for the determination of diffusion coefficient. *Drying Technology* 19(8):1555-1568
- Luikov AV (1968) *Analytical Heat Diffusion Theory*. Academic Press, Inc. Ltd, London
- Mellado ECER (2007) Modelo de transferência de calor e massa na secagem de madeira serrada de pinus. 155 p. Tese de doutorado em Engenharia Florestal do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Florestal do Setor de Ciências Agrárias da Universidade Federal do Paraná, PR, Brasil
- Nabhani M, Tremblay C, Fortin Y (2003) Experimental determination of convective heat and mass transfer coefficients during wood drying. 8<sup>th</sup> International IUFRO Wood Drying Conference, 225-230
- Olek W, Perré P, Weres J (2005) Inverse analysis of the transient bound water diffusion in wood. *Holzforschung* 59(1):38-45
- Olek W, Weres J (2007) Effects of the method of identification of the diffusion coefficient on accuracy of modeling bound water transfer in wood. *Transport in Porous Media* 66(1-2):135-144
- Perré P, Turner IW (2002) A heterogeneous wood drying computational model that accounts for material property variation across growth rings. *Chemical Engineering Journal* 86(1-2):117-131
- Pinheiro, P.C.C., Raad, T.J., Yoshida, M.I.: Model of a process for drying *Eucalyptus spp* at high temperatures. *Brazilian Journal of Chemical Engineering* 15(4), 382-395 (1998)
- Ricardez AP, Suárez JR, Berumen LA (2005) The drying of red oak at vacuum pressure. *Maderas. Ciencia y Tecnología* 7(1):23-26
- Salin JG (2008) Drying of liquid water in wood as influenced by the capillary fiber network. *Drying Technology* 26(5):560-567
- Silva WP, Precker JW, Silva CMDPS, Gomes, JP (2010) Determination of the effective diffusivity and convective mass transfer coefficient for cylindrical solids via analytical solution and inverse method: Application to drying of rough rice. *Journal of Food Engineering* 98(3):302-308
- Silva WP, Precker JW, Silva CMDPS, Silva, DDPS (2009) Determination of the effective diffusivity via minimization of the objective function by scanning: Application to drying of cowpea. *Journal of Food Engineering* 95(2):298-304
- Silva WP, Silva CDPS (2009) LAB Fit Curve Fitting Software, on line: [www.labfit.net](http://www.labfit.net), accessed on October, 2009
- Taylor JR (1997) *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books, 2nd Edition, Sausalito, California
- Tremblay C, Cloutier A, Fortin Y (2000) Experimental determination of the convective heat and mass transfer coefficients for wood drying. *Wood Science and Technology* 34(3):253-276

## ONE-DIMENSIONAL DIFFUSION ANALYTICAL MODEL TO DESCRIPTION OF THE KINETICS OF WOOD DRYING: OPTIMIZATION AND SIMULATION

Laerson Duarte da Silva, [laerson.duarte@gmail.com](mailto:laerson.duarte@gmail.com)<sup>1</sup>

Pedro Luiz do Nascimento, [pedropln@yahoo.com.br](mailto:pedropln@yahoo.com.br)<sup>1</sup>

Cleide M.D.P.S. e Silva, [cleidedps@uol.com.br](mailto:cleidedps@uol.com.br)<sup>1</sup>

Wilton Pereira da Silva, [wiltonps@uol.com.br](mailto:wiltonps@uol.com.br)<sup>1</sup>

Marcos A. A. Lins, [ma1809al@yahoo.com.br](mailto:ma1809al@yahoo.com.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Física, CCT, Av. Aprígio Veloso, 882, B. Universitário, 58.429-900, Campina Grande, PB, Brazil

**Abstract:** This article discusses the one-dimensional diffusion model to describe the drying of wood. This model refers to the analytic solution of an infinite slab with boundary conditions of the first kind and third kind. The analytical solutions were coupled to an optimizer based on the inverse method, which allows calculate the process parameters for a set of experimental data. Once the process parameters were determined, the drying kinetics of wood was simulated through each proposed model. The results permit to the conclusion that the one-dimensional model with boundary condition of the first kind is not suitable for drying kinetics. On the other hand, the one-dimensional model with boundary condition of the third kind adequately describes the kinetics of drying.

**Keywords:** inverse method, analytical solutions, distribution of moisture, Drying simulation, Optimizer