



VI CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA  
VI NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING  
18 a 21 de agosto de 2010 – Campina Grande – Paraíba - Brasil  
August 18 – 21, 2010 – Campina Grande – Paraíba – Brazil

## PLATAFORMA PARA CONTROLE DE PROCESSOS FÍSICOS EM TEMPO REAL UTILIZANDO UM PÊNDULO INVERTIDO

Rosa, Suéllia de Siquiera F. R.<sup>1</sup>; Avila, Suzana Moreira<sup>1</sup>; Coelho Júnior, Helbert de Oliveira<sup>1</sup>; Silva, Bruno Santiago Sousa da<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratório de Engenharia & Inovação –LEI, Faculdade de Engenharia do Gama-FGA, Univer. de Brasília- UnB

**Resumo:** Este trabalho apresenta resultados preliminares do processo de criação de uma plataforma para o controle de processos físicos em tempo real utilizando um computador. Para tal, utiliza-se um pêndulo invertido acoplado a uma base e um carro móvel com motores independentes. O pêndulo reage à variações de estado em tempo real e tenta manter o seu equilíbrio. Esse tipo de sistema tem aplicações importantes na indústria, proporcionando um controle maior aos processos industriais, fornece à robótica meios de manter o equilíbrio em diversos tipos de robôs, proporciona ainda uma placa de interface entre o computador e as partes mecânicas. Durante o desenvolvimento serão utilizadas diversas ferramentas computacionais tais como: MATLAB para a modelagem numérica, CATIA para projeto da estrutura mecânica, PROTEUS para visualizar os circuitos em um ambiente virtual, entre outras. Finalmente, será contruída a bancada experimental com o pêndulo invertido bem como os circuitos eletrônicos necessários para a comunicação com o computador e análise dos dados obtidos com os sensores. Os resultados dos dados experimentais são comparados com os obtidos numericamente.

**Palavras-chave:** Pêndulo, Controle, Circuitos

### 1. INTRODUÇÃO

Atualmente a automação do movimento é uma área de pesquisa que vem sendo estudada devido à sua larga utilização no cotidiano da sociedade, ganhando a cada dia mais importância. Neste contexto, o clássico problema do Pêndulo Invertido assume um papel relevante permitindo, de maneira simples, aplicar técnicas já consolidadas de controle. Por isso, muitas vezes este é citado como exemplo em disciplinas de engenharia relacionadas a esse tema. Por outro lado, é comum, no desenvolvimento de novas técnicas de controle, testá-las através do Pêndulo Invertido, o que fornece aos pesquisadores uma maneira de analisar a viabilidade da técnica proposta e sua possível utilização em problemas mais complexos.

Além desse aspecto didático e científico, o problema do Pêndulo Invertido possui uma variedade de aplicações diretas e indiretas, dentre estas podemos citar: braços robóticos, *segway*, monociclos automáticos e também o equilíbrio humano. Devido a essa vasta gama de aplicações, é extensa a quantidade de estudos na literatura a respeito desse assunto, sendo comum, em várias plataformas, modelos que simulam a robustez do sistema já controlado

Na Faculdade UnB-Gama da Universidade de Brasília foi recebido, por doação do Grupo LARA da Faculdade de Tecnologia da mesma instituição um sistema físico, o pêndulo inverso com carro sob trilhos, o qual já havia sido amplamente estudado por tal Grupo, Bauchspiess *et. al* (1997). Com objetivo de modelar o problema físico de equilíbrio de um pêndulo invertido, com alunos de terceiro semestre de engenharia, foi proposto o presente projeto que busca reformar o sistema existente – reformulando suas partes constituintes, realizar a sua modelagem, efetuar simulação numérica e propor um controle em tempo real para esse sistema.

De acordo com Ribeiro (2007) o Pêndulo Invertido típico é um dispositivo físico que se consiste de uma barra cilíndrica, usualmente metálica, a qual é livre para movimentar em torno de um ponto fixo. Esse ponto é montado em um carro que por sua vez é livre para mover na direção horizontal. O carro é acionado por um motor que pode exercer uma força variável no deslocamento do mesmo. A haste naturalmente tende a cair, pois sua posição vertical é uma condição de equilíbrio instável. Usa-se uma malha de controle com o objetivo de estabilizar a haste do pêndulo na posição vertical. Isso é possível exercendo-se uma força através do movimento do carro que tende a contrabalançar o comportamento original do pêndulo. A intensidade da força pode ser controlada a partir da informação da posição angular da haste.

Nesse contexto, percebe-se a real necessidade de implementar o controle do Pêndulo Invertido fisicamente em *hardware* e não apenas com simulação numérica, como encontramos na maioria das fontes que tratam do assunto. É bom destacar que, neste trabalho, não está sendo descartada a utilização da simulação. Aqui a simulação é utilizada como ponto de partida na fase de testes, antes da implementação em *hardware*. Mesmo considerando todas as variáveis

e parâmetros do sistema na simulação, quando esse modelo é substituído no sistema real, surgem várias discrepâncias que, invariavelmente tornam obrigatórios os ajustes no projeto proposto inicialmente. Por esse motivo, decidiu-se construir e controlar a plataforma em *hardware*.

Utilizaram-se diversas ferramentas para elaborar o projeto, entre elas o MATLAB, CATIA, PROTEUS, TRACKSMAKER e conhecimentos dos autores em linguagem de programação. Por fim, construiu-se um protótipo para ilustrar o processo de equilíbrio do pêndulo invertido. Utilizou-se o CATIA para projetar o conjunto novo trilho-pêndulo e o MATLAB para realizar as simulações numéricas e o dimensionamento das peças para um melhor funcionamento do sistema.

No Brasil, não foram encontrados trabalhos nessa linha utilizando projeto real em hardware. A literatura existente em sua maioria se resume ao projeto e a simulação, geralmente na plataforma MATLAB, não abrangendo a construção de um protótipo físico o que configura o objetivo dessa pesquisa. O presente trabalho traz os resultados iniciais obtidos até o momento desde projeto.

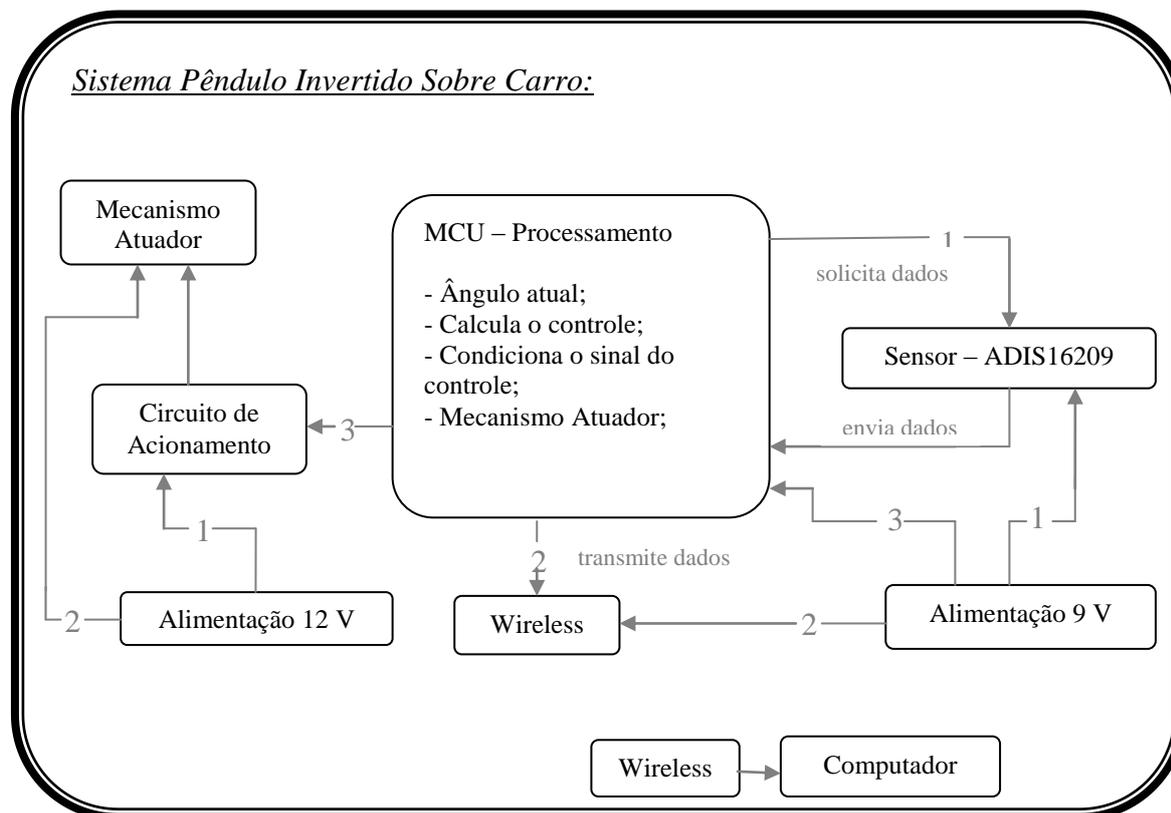
## 2. O NOVO SISTEMA FISICO PENDULO INVERTIDO DESENVOLVIDO

Visando a implementação de um sistema que aplique o Pêndulo Invertido e permita sua evolução para um protótipo com controle em tempo real, conforme já mencionado na parte introdutória deste artigo, reuniu-se uma série de requisitos e capacidades que o sistema deveria conter. De posse desses requisitos, buscou-se, através de pesquisas e revisões bibliográficas, componentes que atendessem a essas necessidades. Dentre os requisitos desejados para este projeto, lista-se abaixo:

- Sensor de precisão com fácil integração à plataforma de processamento;
- Plataforma de processamento de uso comercial e com um desempenho reconhecido;
- Possibilidade de comunicação sem-fio para realização de telemetria durante as fases de projetos de controle;
- Atuadores elétricos versáteis, de baixo consumo e baixa inércia.

Conta-se com um conjunto mecânico formando uma plataforma que suporta os equipamentos eletrônicos, bem como baterias e motores atuadores. A plataforma é livre para rotacionar com relação ao eixo das rodas, que, por sua vez, permitem que o conjunto mova-se na horizontal. O movimento horizontal, bem como o equilíbrio dinâmico do sistema, é fornecido através da atuação de um par de motores elétricos de corrente contínua, cada um atuando em uma das rodas. A transmissão de movimento entre o motor e as rodas é feito por meio de engrenagens plásticas.

Os motores, por sua vez, têm sua atuação descrita por um sinal discreto de controle advindo de um módulo central de processamento, responsável por coletar as informações necessárias para o cálculo de controle e disponibilizá-las de forma modulada. Outra função do módulo de processamento é realizar a comunicação com o meio externo, e para tanto utiliza o protocolo RS232. A Figura 1 abaixo apresenta em forma de diagrama a organização dos blocos constituintes de todo o sistema bem como a relação que estes guardam entre si.



### Figura1 - Diagrama organizacional do sistema Carro-Pêndulo Invertido

Ao desmontar e analisar os componentes mecânicos e eletrônicos do pêndulo que foi doado pelo grupo LARA, encontram-se vários defeitos que dificultavam o funcionamento do pêndulo. Alguns componentes do circuito eletrônico estavam faltando. Além disso, os circuitos foram montados de maneira desorganizada, impedindo assim que a informação fluísse sem interferências. Na parte mecânica foram encontradas diversas peças distorcidas e deformadas. Outro problema identificado era a fita de posição que continha várias dobras e falhas. A fita de posição era uma fita listrada com espaçamentos brancos e pretos alternados, onde um sensor ótico informava a posição do carro de acordo com o número de espaçamentos contados. O sistema de locomoção também continha falhas. Ele consistia em um motor elétrico, uma caixa de redução e uma correia afixada à parte inferior do carro. A correia não possuía mais alguns de seus dentes e havia sido montada no sistema utilizando grampos de papel e alguma espécie de cola. A haste do pêndulo estava bastante empenada e o eixo da caixa de redução está deformado. Por estes motivos entre outros, optou-se pela construção de um novo pêndulo para que o experimento ocorra de maneira mais eficiente.

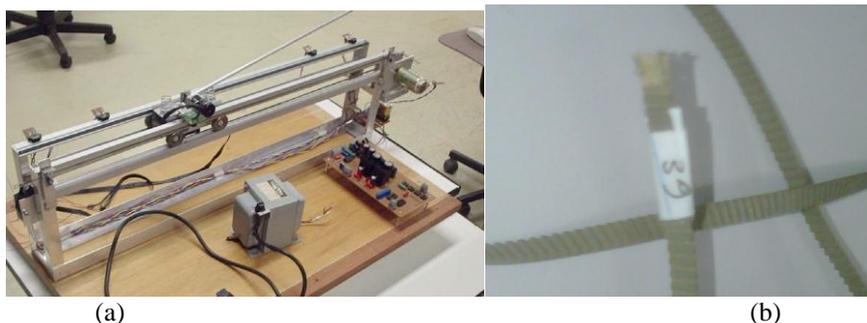


Figura 2. (a) Foto do antigo pêndulo que foi doado pelo LARA. (b) Detalhe da correia.

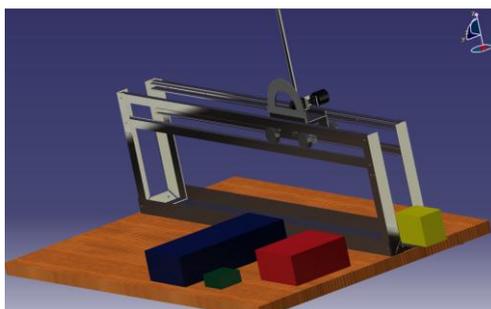
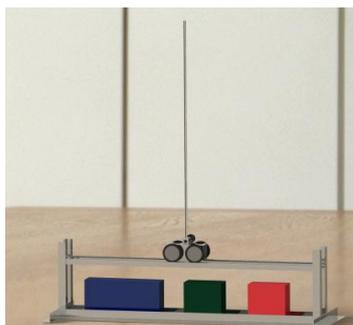


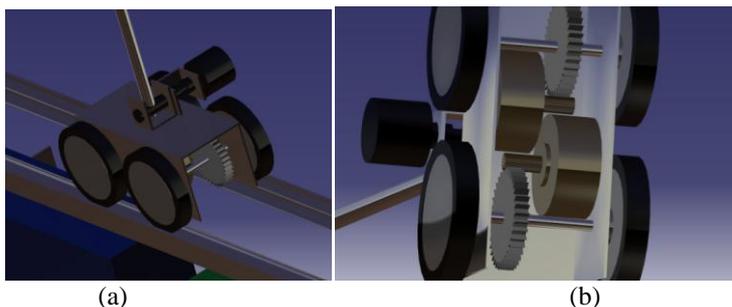
Figura 3. Modelo do pêndulo antigo no CATIA.

#### 2.1. Sistema Mecânico

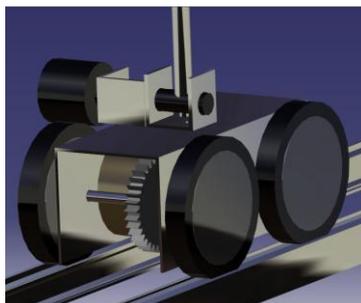
Para o desenvolvimento da parte mecânica do pêndulo, foi utilizada a ferramenta computacional CATIA V5R19. Em seu ambiente virtual, construiu-se toda a estrutura, bem como a localização de certos componentes-chaves para a operação correta do experimento. O carrinho, onde o pêndulo está fixado, move-se em um par de trilhos de maneira autônoma utilizando um motor acoplado na parte inferior de sua carcaça. Os trilhos, bem como toda a estrutura, são de alumínio e ficam suspensos há uma determinada altura com os circuitos alojados diretamente abaixo. O alumínio foi escolhido levando em consideração seu peso, resistência e facilidade de manuseio. As rodas de alumínio revestidas com borracha para aumentam o atrito, evitando o deslizamento desnecessário das rodas motrizes, fazendo com que a resposta seja mais rápida, precisa e eficiente.



**Figura 4. Modelo do Pendulo. Em vermelho pode-se notar o circuito da fonte, em verde o circuito da placa de interface e em azul o circuito da placa de aquisição e tratamento de dados.**



**Figura 5. (a) Detalhe do carro. (b) Detalhe dos motores com as reduções.**



**Figura 6. Detalhe do carro com as rodas em alumínio revestidas com borracha e do encaixe do pendulo ao sensor (neste caso um potenciômetro).**

## 2.2. Sistema Eletrônico

O pêndulo irá procurar o equilíbrio com base nos dados interpretados pelo computador. Para tal, a comunicação via USB aparenta ser a mais versátil. Futuramente, pretende-se utilizar a comunicação via *Bluetooth* e possivelmente pela internet, para que seja possível estender o experimento ao alcance de escolas e faculdades ao redor do globo.

### 2.2.1 – Fonte de alimentação

A fonte para a alimentação do sistema é composta de 4 blocos principais. Primeiro têm-se os transformadores. Em seguida um retificador que consiste em uma ponte de diodos para converter a corrente de alternada para continua. Depois um filtro com vários capacitores para deixar a corrente estável. E por fim têm-se os reguladores que para o pólo positivo utilizamos o 7805 ou o 7812 e para o pólo negativo 7912 e o 7905.

### 2.2.2 – Aquisição e Tratamento de dados

O controle do motor, bem como a ligação de todos os sensores do sistema, encontra-se na placa de aquisição e tratamento de dados. Para evitar colisões entre o carrinho e o final do trilho, sensores ultrassônicos medirão a distância entre o carrinho e o fim de curso para que, quando certa distância for alcançada, o sentido de rotação do motor será invertido afastando o carrinho e evitando uma colisão que poderia danificar o experimento. Os sensores ultrassônicos servirão também para informar ao computador a exata localização e velocidade do carrinho em todos os momentos. Com a ajuda de um potenciômetro preso a haste do pêndulo, poderemos saber o atual ângulo de inclinação e sua variação. Esses dados são tratados antes de chegar ao computador para a retirada de impurezas nas medições como vibrações, interferência entre outros. Está em estudo também a utilização de um inclinômetro para medir a variação angular do pêndulo.

### 2.2.3 - Inclinômetro

Os sensores, como instrumentos para medição de grandezas físicas, são importantes elementos que integram sistemas de engenharia responsáveis por fornecer a informação necessária para a tomada de ações de controle. No problema do pêndulo invertido sobre carro, normalmente são encontradas quatro variáveis de estado, que nominalmente são: posição e velocidade angular; posição e velocidade linear horizontal. Para fins apenas de equilíbrio do pêndulo, ou seja, quando não se tem interesse em controlar a posição horizontal do conjunto, apenas a medida da posição angular do pêndulo é suficiente para o cálculo do controle.

Tendo tal fato em vista, a grandeza alvo de ser medida durante o funcionamento do sistema é a posição angular do pêndulo. Para tal tarefa existe uma série de soluções possíveis entre as quais as mais comuns são o uso de potenciômetros de precisão, acelerômetros ou inclinômetros.

Os potenciômetros são uma solução simples e de baixo custo, fornecem um sinal contínuo e proporcional ao ângulo, mas apresentam os inconvenientes de alta susceptibilidade a ruídos elétricos e mecânicos e necessidade de acoplamento a um referencial fixo. Como o sistema aqui explanado apresenta liberdade para mover-se rotacionalmente com relação ao eixo de suas rodas, a fixação de um referencial para a posição vertical é comprometida. O uso de acelerômetros, por sua vez, também é bastante comum para a medição de posição angular, pois elimina os problemas dos potenciômetros supracitados embora seja a um custo relativo superior. Mas talvez a maior desvantagem do uso de acelerômetros seja o fato de que a posição angular é obtida de forma indireta através da aceleração em eixos distintos, tornando a medida resultante dependente de outras variáveis, acumulando os erros e variações de suas medições iniciais. A alternativa selecionada, embora relativamente mais onerosa em termos de custo, será o uso de um inclinômetro. Dentre as diversas alternativas disponíveis de mercado e devido a pouca variação nos preços consultados dos diversos modelos pesquisados, optou-se por usar um inclinômetro digital modelo ADIS16209 *Analog Devices*. Este sensor foi escolhido para integrar este trabalho, em detrimento de outros modelos concorrentes, pelo seu desempenho superior tanto em velocidade de aquisição e transmissão de dados como também em precisão e, ainda, por permitir uma integração direta com o módulo de processamento através do protocolo de comunicação SPI (*Serial Peripheral Interface*).

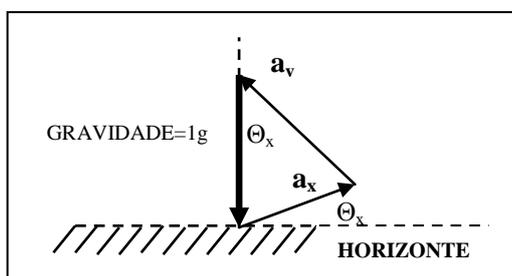


Figura 7. Modelo de funcionamento interno do ADIS16209. Fonte: Manual ADIS16209



Figura 8. Placa de desenvolvimento para ADIS16209. Fonte: Manual ADIS16209

De suas características comerciais destacam-se:

- Modo de operação de inclinação dual;
- Operação horizontal,  $\pm 90^\circ$ ;
- Alta acurácia,  $0.1^\circ$ ;
- Dados de inclinação digital, 14-bit,  $0.025^\circ$  de resolução;
- Dados de aceleração digital, 14-bit,  $0.244 \text{ mg}$  de resolução;
- Taxa de amostragem controlada digitalmente;
- Serviço de ativação de auto-teste;
- Compatível com a interface SPI;
- Saídas auxiliares: ADC e DAC, 12-bit;
- Alimentação: 3.0 V a 3.6 V;
- Resistência a choque de até 3500 g.

### 2.3. Sistema Comunicação

O pêndulo irá depender de um computador para realizar certas tarefas durante o experimento. Também será possível visualizar em tempo real de certos gráficos que ilustrarão o ângulo, a velocidade e a posição do pêndulo. Foi

decidido adotar a comunicação via USB para que esta interação seja feita. Também será utilizada uma comunicação WIRELESS para realizar essa interação, dessa forma dando mais liberdade ao experimento.

### 2.3.1 USB

O USB (*Universal Serial Bus*) surgiu em 1995 com a necessidade de se facilitar a comunicação de periféricos com o computador. A primeira versão a ser lançada no mercado, a 1.0, tinha velocidade máxima de transmissão de dados de 1,5 MB/s. Pouco tempo depois foi lançada a versão 1.1, com velocidade entre 1,5 MB/s e 12 MB/s. No início desse século, foi introduzida ao mercado a versão 2.0, com velocidade máxima de 480 MB/s. Com a instalação facilitada e muitas vezes desnecessária e uma taxa de transmissão de dados bastante razoável, o surgimento do USB permitiu a indústria investir em *pen-drives*, HDs externos, câmeras digitais entre outros sendo possível ligar até 127 dispositivos em uma única porta (em alguns casos, mais de 127) com a utilização de *hubs*.

O que permite essa facilidade da comunicação via USB é o controlador, ou seja, o HOST USB, que se comunica com os dispositivos através de seu *chipset* (controlador). Cabe a ele detectar se um dispositivo foi conectado ou removido, gerenciar o fluxo de dados, fornecer tensão e corrente aos dispositivos e monitorar os sinais do USB. A porta USB consegue suprir dispositivos que necessitem de 500mA e 5V no máximo (*BUS-POWERED*). Caso seja necessária uma corrente maior, o dispositivo utiliza uma alimentação externa (*SELF-POWERED*), deixando a porta USB apenas para comunicação de dados.

O cabo USB é composto por quatro fios e uma malha para a eliminação de ruídos simples. Destes quatro fios, dois são para a alimentação dos dispositivos (*vcc* e *gnd*) e os outros dois são para transmissão de dados (D+ e D-). Existe um padrão de cores onde o vermelho é o *VBUS* (5V), o preto é o *GND* (0V), o branco é o D- e o verde é o D+. Todos os sinais de dados trafegam por estes dois fios (D+ e D-) usando a codificação NRZI (*No Return to Zero Inverted*). Ou seja, o BIT 1 é codificado através de uma transição ocorrendo da voltagem maior para a menor, ou da menor para a maior. Já o BIT 0 (zero) é codificado quando não há transição e durante o intervalo de um BIT a voltagem é constante.

O protocolo é uma das partes mais importantes para o funcionamento da USB, pois é através dele que os dispositivos trocam informações com o computador. No HOST, o protocolo está disponível na forma de *drivers* e no dispositivo o protocolo pode ser encontrado dentro de um microcontrolador (por exemplo, o PIC), onde ele é escrito em *ASSEMBLY* ou C. Outra maneira seria a de um *chipset* que possua a funcionalidade do protocolo USB dentro de si.

No pêndulo, utilizar-se-á um protocolo, criado pelos autores deste projeto, para a comunicação entre a placa de interface e o computador. Os dados obtidos pelos sensores e os sinais de controle necessários para manter o equilíbrio trafegaram de acordo com este protocolo.

### 2.3.1 Wireless

Visando permitir a troca de informações entre o sistema e um meio computacional sem a influência e limitação de cabos externos, optou-se por incorporar ao sistema um módulo de comunicação sem-fio. O módulo a ser utilizado é o **WI232DTSFCC-R** que permite fazer a comunicação *wireless* entre o *hardware* e o *software* **MATLAB** necessária durante o acompanhamento dos dados reais. Este módulo foi escolhido pela sua facilidade de uso e pela sua capacidade de transmissão, podendo chegar, no modo **DTS**, a até 153.34 kbps em 32 canais com 600KHz de largura de banda para cada canal e, no modo de **baixa potência**, a 19.2 kbps e 84 canais, com cada canal ocupando 200KHz.

O módulo **WI232DTS** combina a versatilidade dos **UART's** (*Universal Asynchronous Receiver/Transmitter*) com ferramentas de *software* para criar uma solução transparente sem fio capaz de trabalhar com a maioria dos padrões de voltagem de sinal, dentre eles o **RS232/422/485**. No projeto descrito nesse artigo, o nível a ser usado é **RS232**. O **UART** basicamente traduz os dados entre as formas serial e paralelo. Em geral, o **UART** é um circuito integrado usado para comunicação serial entre um computador e um dispositivo periférico. Para esta aplicação, em que se utiliza o padrão **RS232**, o dispositivo responsável por implementar a funcionalidade do **UART** é o **MAX232**.

O padrão **RS232** utiliza níveis de tensão negativos para o valor lógico 1 e positivos para o nível lógico 0. Em geral, as tensões variam de -3 a -15V para o nível lógico alto (1) e +3 a +15 para o nível baixo (0). Uma característica importante desse componente é que sua tensão alimentação é da ordem de 3V, sendo, portanto, necessário utilizar um circuito regulador para converter a tensão padrão de alimentação (5V) para esse valor mencionado. Além disso, este módulo requer também uma **antena de 50  $\Omega$**  para placas de circuito impresso.

Para a comunicação com o **UART**, este módulo utiliza três sinais: **TXD**, **RXD** e **CTS**, sendo que o **RXD** é a entrada de dados, **TXD** é a saída e **CTS** é um sinal que indica o status do módulo. Assim, quando o **CTS** está em alto, o módulo está ocupado e o **UART** não deverá enviar nenhum dado a mais e, quando o **CTS** está em baixo, o módulo está livre para receber informações. Este módulo pode operar em dois modos: *Master/Slave* (Mestre/Escravo) e *Peer-to-peer* (igual para igual). Essas formas definem como os módulos podem comunicar entre si. No primeiro modo, os módulos definidos como *Slave* nunca podem se comunicar com outros módulos *Slave*. Qualquer outra combinação de modos podem se comunicar. No projeto do pêndulo, o módulo *Peer-to-Peer* será utilizado, de forma que qualquer módulo possa ouvir qualquer outro módulo. Para acessar os registradores programáveis do módulo, é preciso utilizar a porta **CMD** (porta 4 do dispositivo). Assim, quando **CMD** está em zero, todos os dados transferidos do **UART** são

interpretados como comandos para registradores de acesso. No entanto, se **CMD** está em alto, o módulo apenas terá a função de transmitir os dados recebidos através do canal sem fio.

Cada registrador do módulo possui duas cópias: uma em memória *Flash* (volátil) e outra em **RAM**. No momento em que é inicializado, o módulo carrega as informações armazenadas na **RAM** para a memória *Flash*. Assim, para operar, o módulo, necessita apenas dos valores contidos nos registradores *Flash* e as mudanças nas configurações permanecerão depois que o módulo for desligado apenas caso sejam gravadas nos registradores **RAM**. Para implementação desse aplicativo deve-se levar em conta dois itens fundamentais o primeiro o cálculo do Link Budget (potência gasta em todo o percurso de TxD e RxD) o qual é feito através da formula disponível no *datasheet* do fabricante e o segundo item é a para que a comunicação se dê de forma adequada, os dois módulos deverão permanecer no mesmo modo (**LP** ou **DTS**) e devem possuir o mesmo canal de transmissão e recepção.

## 2.4. Modelo Matemático

Nas seções anteriores encontram-se às diversas classes e aplicações de pêndulos invertidos, já nesta seção pode-se ver a modelagem matemática do pêndulo invertido simples sobre carro, uma vez que este modelo será utilizado para tratar o projeto desenvolvido neste trabalho. Visando um experimento mais completo, realizou-se a simulações do antigo Pêndulo Invertido e do novo Pêndulo Invertido na plataforma MATLAB, de modo que, ao construir um protótipo físico, este teria um controle maior e mais eficiente. A Figura 10 apresenta os diagramas de corpo livre para o carro e o pêndulo.

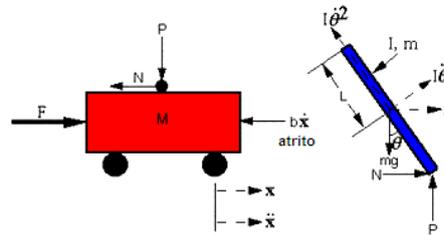


Figura 9. Diagrama de corpo livre de um Pêndulo Invertido simples sobre carro.

A equação de movimento, de acordo com a Segunda Lei de Newton, inicialmente para o carro, na direção horizontal, é:

$$M \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + N = F \quad (1)$$

A força horizontal exercida na horizontal devido ao momento do pêndulo é dada por:

$$T = r \times F = I\ddot{\theta} \quad (2)$$

$$F = \frac{l\dot{\theta}}{r} = \frac{ml^2\dot{\theta}}{l} = ml\ddot{\theta} \quad (3)$$

Então, somando-se todas as forças horizontais atuando no diagrama de corpo livre do pêndulo chega-se a uma expressão para N:

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (4)$$

Substituindo então as equações (3) e (4) na equação (1) obtém-se:

$$(M + m)\ddot{x} + b \cdot \dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (5)$$

A segunda equação de movimento do sistema, obtida garantindo-se o equilíbrio na direção vertical, é dada por:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (6)$$

As equações (5) e (6) tratam-se de equações não-lineares e, portanto precisam ser linearizadas em torno de um ponto de operação, para simplificar a sua análise. Como o objetivo é equilibrar o pêndulo, pode-se considerar que próximo à posição de equilíbrio, ou seja, para valores de  $\theta$  pequenos, são válidas as aproximações:  $\sin \theta \cong 0$ ,  $\cos \theta \cong 1$  e  $\dot{\theta}^2 \cong 0$ . Sendo assim, as equações (5) e (6) linearizadas são dadas por:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\theta} = u \quad (7)$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta = ml\ddot{x} \quad (8)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace às equações (7) e (8) acima, considerando as condições iniciais como sendo nulas, as equações do sistema ficam:

$$(M + m)s^2X(s) + bsX(s) - mls^2\theta(s) = u(s) \quad (9)$$

$$(I + ml^2)s^2\theta(s) - mgl\theta(s) = mls^2X(s) \quad (10)$$

Como o objetivo é equilibrar o pêndulo, a função de transferência de interesse é aquela que relacione o ângulo do pêndulo dada uma força de entrada. Para tanto, primeiramente isola-se a o termo X(s) na equação (10)

$$X(s) = \left[ \frac{(I+ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \theta(s) \quad (11)$$

E em seguida substitui-se a expressão de X(s) na equação [7], agora isolando o termo  $\theta(s)$  e negligenciando o termo  $bsX(s)$ , ou seja, considerando desprezível o atrito viscoso. A equação final, depois de desenvolvida fica:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{\frac{s^2}{A_p^2} - 1} \quad (12)$$

onde,

$$K_p = \frac{1}{(M+m)g} \quad (13)$$

$$A_p = \pm \sqrt{\frac{(M+m)mgl}{(M+m)(I+ml^2)-(ml)^2}} \quad (14)$$

### 3. RESULTADOS

Através de análise da resposta ao degrau da equação (12) – projetou-se um Pêndulo Invertido com em que a  $M$  é a massa do carro (0.983 Kg),  $m$  é a massa do pêndulo (2.085 Kg),  $I$  é o momento de inércia calculado e  $l$  é o centro de massa do pêndulo. Substituindo esses valores, à seguinte equação para o Pêndulo Invertido:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{0,034}{16,229s^2 - 1} \quad (15)$$

Conforme já foi descrito neste artigo, o sistema de pêndulo invertido sobre carro é instável em malha aberta, e um dos objetivos do presente artigo é incorporar um compensador que o torne estável em malha fechada, de forma que o novo pêndulo possa ser mantido em equilíbrio na posição vertical. Na tentativa de equilibrar o sistema de pêndulo invertido, uma força horizontal deve ser aplicada ao carro, com sentido e magnitude dados pelo resultado da ação de controle, computada para a posição angular do pêndulo em um dado instante no tempo. Essa força, é gerada por um par de motores elétricos de corrente contínua alimentados por uma bateria de 12V. Os dois motores elétricos usados para aplicar a força de controle ao sistema são fabricados pela *Globe Motors Inc.*, modelo IM-13 sem a redução, de forma que o regime transitório é mais prolongado, resultado em um período de aceleração maior. A função de transferência final de todo o mecanismo atuador e que será usada no acionamento do sistema será:

$$\frac{F(s)}{E(s)} = \frac{0.3137s}{0.4405s + 1} \quad (16)$$

A função de transferência da planta do sistema (atuador e Pêndulo Invertido) a ser controlado é dada por:

$$planta = \frac{\theta(s)}{E(s)} = \frac{0,05956 s}{7,141 s^3 + 16,23 s^2 - 0,4401 s - 1} \quad (17)$$

Ao simular a planta em malha aberta e fechada ela se manteve instável. Ao se discretizar a função obtêm-se:

$$planta = \frac{\theta(z)}{E(z)} = \frac{1,004 \cdot 10^{-5} z^2 - 3,732 \cdot 10^{-7} z - 9,669 \cdot 10^{-6}}{z^3 - 2,628 z^2 + 2,256 z - 0,6281} \quad (18)$$

O projeto do compensador Proporcional Integral Derivativo (PID) realizado para o sistema proposto foi feito utilizando a ferramenta SISOTOOL do *software* Matlab.

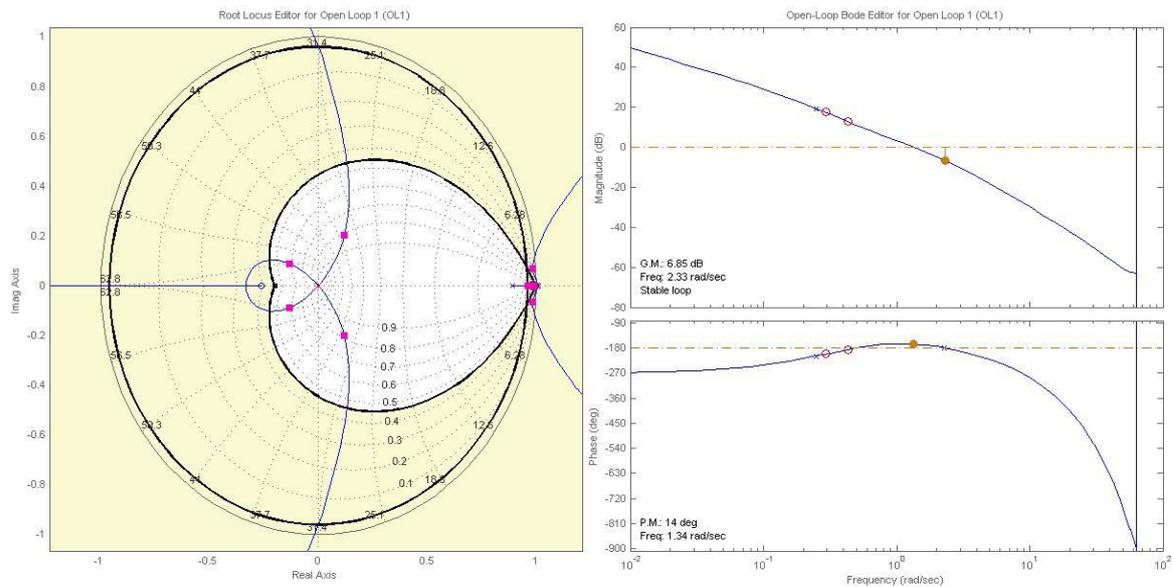


Figura 10 - LGR e Diagrama de bode do sistema não compensado em malha aberta.

É importante também mencionar que o projeto foi feito considerando a forma discreta da função de transferência do sistema. A taxa de amostragem utilizada foi de 50 ms pelo fato de que, em testes experimentais com o motor em bancada, identificou-se que este era o tempo mínimo entre os acionamentos para que o motor fosse capaz de responder da forma requerida. Com períodos de amostragem menores o motor se comporta com um filtro passa-baixas e não responde satisfatoriamente aos sinais de entrada. O sistema deve obedecer às seguintes especificações, que para uma entrada em degrau devem ser: sobre-passo (*overshoot*) menor que 20% (taxa de amortecimento maior que 0,5) e tempo de assentamento (*settling time*) menor ou igual a 5 segundos. O controlador projetado para o sistema tem a seguinte função:

$$C_{PID} = K \frac{(z-z_0)(z-z_1)}{(z-1)z} = 2663 \frac{(z-0,87)(z-0,95)}{(z-1)z} \quad (19)$$

A Figura 12 a seguir, representa a resposta do sistema compensado em resposta a um degrau unitário. Pode-se notar que o sobre-passo é de aproximadamente 10% e o tempo de assentamento de aproximadamente 5 segundos, conforme estabelecido nos requisitos de projeto do compensador.

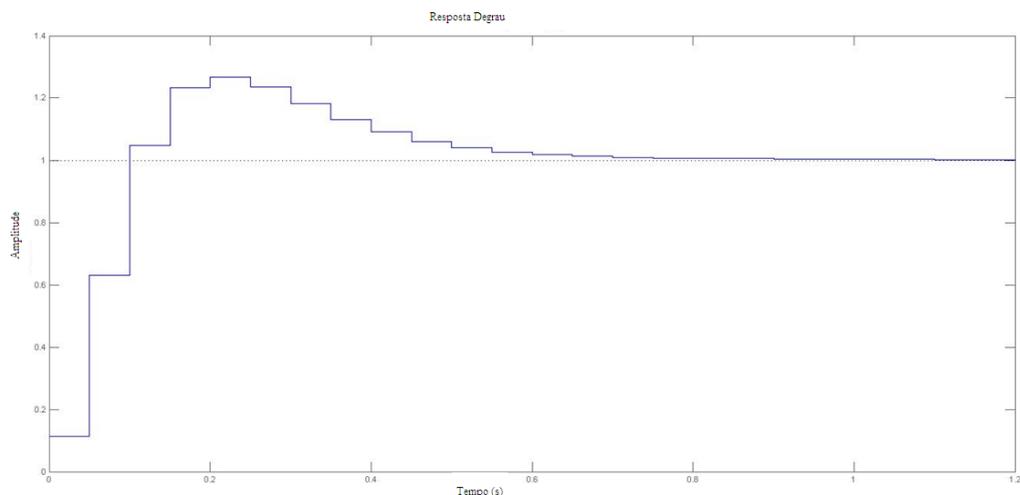


Figura 11 : Resposta a entrada degrau do sistema compensado.

#### 4. CONCLUSÃO

Uma grande dificuldade que circunda qualquer atividade da engenharia é a de descrever em um modelo teórico o comportamento de um sistema físico, pois sob o conforto da simplicidade muitos modelos tem sua capacidade de descrição dos fenômenos físicos limitada. A diferença que muitas vezes é observada entre um modelo teórico e um real não está na falha da teoria utilizada, mas na limitação do modelo teórico adotado em descrever todas as características relevantes do fenômeno estudado. Com base no descrito é que se justifica a importância de se utilizar ferramentas computacionais poderosas e realizar o caminho inverso nesse processo – onde neste artigo fora proposto realizou um modelo matemático da planta do Pêndulo Invertido e por tentativa e erro – dentro de um range delimitado pela literatura e análise do CATIA obteve um sistema de mais fácil equilíbrio, não deixando apenas para o controlador a tarefa de ajustar todo o sistema dentro da especificação. Com tal resposta obtida pode-se construir um Pêndulo Invertido instável porém com capacidades reais de equilibra-se mais facilmente. Os motores escolhidos e seus ensaios podem ser inseridos com e sem redução onde verificou-se que a segunda opção resulta em um sistema melhor para se controlar – esse foi outro ponto de vantagem ao se realizar o projeto aqui chamado de inverso. Alguns pontos poderão ainda ser inseridos no sistema (tal como folgas, zona morta do mecanismo atuador e atritos), com isso ao se trazer da simulação o sistema implementado nota-se que o modelo simulado fica mais fidedigno ao testado em bancada. Outro ponto que se ressalva é que esse artigo proporcionou aos alunos recém-egressos na instituição uma visão de se aplicar conceitos de computação, cálculo e sistemas de controle tendo com isso uma oportunidade de conectar idéias e estender conceitos aprendidos.

## 5. AGRADECIMENTOS

Agradecimentos a Algenor Silva e Halleson Lima, técnicos do Laboratório de Engenharia & Inovação – LEI do Campus Gama da Universidade de Brasília (UnB) por sua inestimável colaboração. Ao Grupo LARA da Faculdade de Tecnologia pela doação do pêndulo.

## 6. REFERÊNCIAS

- ADIS 16209, 2009, High Accuracy, Dual Axis Digital Inclinator and Accelerometer, Analog Devices.  
Bauchspies, A.; Drummond, A.C.; Romariz, A.R.S., Sept. 1997, “Servocontrole Não-Linear Auto-Sintonizado por Redes Neurais de Base Radial”, I3.SBAI-Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Vitória/ES, pp.430-435.  
Dorf, R. C., 2000, “Sistemas de Controle Moderno” – Editora LCT, 4 Edição.  
Norman, N., 2000, “Engenharia de Sistemas de Controle”, Editora LCT, 3 Edição.  
Ogata, K., 2003, “Engenharia de Controle Moderno”, 4 Ed. São Paulo Prentice Hall.  
Ribeiro, R., 2007, “Implementação de um sistema de controle de um Pêndulo Invertido”, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Itajubá, pp.86.  
Sultan, K., 2004, “Inverted Pendulum – Analysis, design and implementation”, Institute of Industrial Electronics Engineering (IIEE), Pakistan.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# PLATFORM FOR CONTROLLING PHYSICAL PROCESS IN REAL TIME UTILIZING AN INVERTED PENDULUM

Rosa, Suélia de Siquiera F. R.<sup>1</sup>; Avila, Suzana Moreira<sup>1</sup>; Coelho Júnior, Helbert de Oliveira<sup>1</sup>; Silva, Bruno Santiago Sousa da<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratory of Engineering and Innovation–LEI, Faculty of Engineering of Gama–FGA, Univer. of Brasilia-UnB

**Abstract:** *This work presents the preliminary results of the creation of a platform for controlling physical process in real time using a computer. Therefore, an inverted pendulum is utilized attached to a base and a moving car with independent motors. The pendulum reacts to the variations of state in real time and tries to keep its balance. This type of system has important applications in the industry, giving a greater control of industrial processes, supplying robotics ways of maintaining balance in several types of robots, providing also an interface between mechanical parts and the computer. During the development different computational tools will be utilized such as: MATLAB for numerical modeling, CATIA for the development of the mechanical structure, PROTEUS to visualize circuits in a virtual environment, among others. Finally, the experimental platform with the inverted pendulum will be constructed as well as the electronic circuits necessary for the communication with the computer and the analysis of the data obtained from the sensors. The results of the experimental data will be compared with the data obtained numerically.*

**Keywords:** *Pendulum, Control, Circuits*