

## **ANÁLISE ESTÁTICA DE DUTOS ORTÓTROPAS UTILIZANDO-SE UM ELEMENTO FINITO DE CASCA CILÍNDRICA**

**Ângelo Vieira Mendonça<sup>1</sup>, Raimundo Aprígio de Menezes Júnior<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Departamento de Eng. Civil e Ambiental, Universidade Federal da Paraíba, cidade universitária, CEP 58059-900, Joao Pessoa, PB, Brasil.

<sup>2</sup>Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Paraíba, cidade universitária, CEP 58059-900, Joao Pessoa, PB, Brasil.

**Resumo:** *Este artigo lida com um elemento de casca cilíndrica para materiais ortótropos. As discussões aqui apresentadas podem ser vistas com uma versão estendida do elemento finito CYS (proposto originalmente por Djoudi e Bahai) orientado para materiais elásticos isotrópicos. Esse elemento finito de casca cilíndrica possui quatro nós funcionais com cinco graus de liberdade por nó e tem como principal característica, representar geometricamente superfícies cilíndricas de forma exata. Além disso, neste artigo são exibidas as formas explícitas da matriz de rigidez do CYS ortotrópico. Exemplos numéricos para alguns painéis cilíndricos são também analisados.*

**Palavras-chave:** *cascas, MEF, membrana, tubo*

### **1. INTRODUÇÃO**

Os Componentes estruturais denominados de cascas são aqueles formados por lâminas onde geralmente as superfícies médias não são planas, que em muitos casos tanto os efeitos de flexão quanto os de membrana são simultaneamente ativados. Dada a essa característica, é freqüente encontrar na literatura a designação de casca plana quando um componente estrutural de superfícies planas co-mobilizar ambos efeitos. Outras classificações podem ainda ser atribuídas à grande família das cascas dependendo do enfoque selecionado, tais como: modo de geração (translação e revolução), índice de esbeltez (delgada, espessa), relação raio/vão circunferencial (profunda, abatida), perfis de curvaturas (cilíndrica, esféricas, cônicas, etc). Apesar da grande diversidade da população das cascas, um fator dominante que torna sua representação matemática menos trivial é decorrente principalmente da complexidade de sua natureza geométrica.

Na literatura podem ser encontradas equações governantes para muitos tipos de cascas Ugural (2009), Soebel (1981), Flugge (1973), no entanto soluções analíticas estão disponíveis para poucos e específicos casos. Alternativamente às restrições das formas analíticas, surgem os métodos numéricos, que majoritariamente nos problemas de cascas são construídos segundo a filosofia do Método dos Elementos Finitos (MEF). Apesar do grande esforço da comunidade do MEF em atacar os problemas de cascas, ainda existem muitas lacunas para serem preenchidas, principalmente quando o objetivo é incorporar a representação não-plana das superfícies médias. A seguir uma breve descrição da evolução do MEF em cascas, desde a aproximação da geometria curva por planos até tentativas de desenvolvimento de elementos finitos curvos para casos específicos e suas extrapolações. Quando a geometria da casca é formada por planos é natural que os efeitos de membrana e flexão sejam calculados independentemente usando elementos originalmente destinados para análise de cada um desses efeitos. No entanto, quando a estrutura possui elementos co-planares ou com tendência a esse caso podem ocorrer problemas de compatibilização de graus de liberdade se o elemento finito de membrana possuir apenas graus de liberdade translacionais. Apesar disso vários pesquisadores, Sydenstricker & Landau (2000), Chen (1979), Bathe & Ho(1981), Fafart et al. (1989), formularam elementos finitos de cascas planas com essa abordagem, por exemplo o CST (Constant Strain Triangle) combinado com o DKT (Discrete Kirchhoff Theory) ou DST (Discrete Shear Theory) para análise de cascas. Alternativamente outros pesquisadores têm utilizado elementos de membrana possuindo um grau de liberdade associado à rotação do plano médio, dentre eles o FF (Free Formulation) de Bergan & Felippa (1985). Essas abordagens com elementos de cascas planas têm sido aplicadas até mesmo em casos em que a geometria da casca é curva, requerendo geralmente discretizações mais ricas para recuperação da geometria original.

Além da abordagem de casca plana, outros elementos foram desenvolvidos de modo a representar as cascas por elementos curvos. Hrennikof & Tezcan (1966), empregaram a forma curva na formulação de elemento de casca através de coordenadas polares. Entretanto, o método desses pesquisadores tem a desvantagem de não haver acoplamento entre

os efeitos de membrana e placa. De acordo com Fulton (1966), tal fato impede uma convergência mais acentuada dos elementos de casca cilíndrica em relação aos elementos de casca plana, mesmo quando é utilizada uma discretização mais rica. As análises demonstraram que para haver convergência, os elementos exigem uma discretização refinada e por esse motivo tem sido dada atenção ao desenvolvimento de elementos com interpolação de maior ordem. Cantin & Clough (1968), salientam que nenhum dos elementos desenvolvidos com base nas formas polinomiais para interpolação de  $u$ ,  $v$  e  $w$  satisfazem a todos os modos de corpo rígido, desse modo eles introduziram termos contendo funções trigonométricas e desenvolveram elementos com seis graus de liberdade. Os resultados obtidos com esse elemento demonstraram que a inclusão de termos para representar os deslocamentos de corpo rígido permitiu uma convergência significativa. Com a seqüência dos trabalhos para obter elementos com interpolação de alta ordem, Cowper et al (1979) propuseram interpolações de terceira e quinta ordem para os deslocamentos produzidos por flexão no intuito de obter uma maior convergência de resultados. A obtenção de elementos de interpolação de alta ordem não é o único desafio a ser resolvido, pois os mesmos produzem matrizes de rigidez com largura de banda excessiva. Neste sentido surge a necessidade de incrementar recursos computacionais, pois o tempo de execução para a solução da equação de equilíbrio é maior quando se utiliza este tipo de elemento. Uma outra estratégia está na adição de graus de liberdade internos no elemento, no entanto, tal possibilidade (caso não seja utilizado um procedimento de condensação estática de graus de liberdade) também aumenta a largura de banda da matriz tornando a análise demorada pelo mesmo motivo discutido anteriormente.

Assim, o desenvolvimento de elementos com interpolação de alta ordem e a exclusão de graus de liberdade adicionais pode ser uma contribuição significativa para análise de cascas através do MEF onde alguns elementos de cascas curvas foram desenvolvidos baseados no modelo de deformações assumidas. Sabir (1984) apresentou elementos triangulares e quadrangulares baseados na teoria de cascas abatidas baseadas no modelo de Donnel (1933,1938). Esses elementos foram desenvolvidos para análise elástica de cascas cilíndricas isotrópicas e os deslocamentos de corpo rígido foram interpolados por funções trigonométricas e parcelas polinomiais adicionais foram assumidas para as deformações. Além disso, ambos elementos de Sabir possuem cinco graus de liberdade por nó e as integrais para geração da matriz de rigidez eram calculadas numericamente. Djoudi & Bahai (2003, 2004a, 2004 b) propuseram algumas alterações no elemento quadrangular de Sabir: a primeira foi a mudança da interpolação por polinômios para os deslocamentos de corpo rígido; já segunda foi obtenção da matriz de rigidez na forma explícita.

No presente artigo é apresentada a dedução da matriz de rigidez incorporando-se materiais ortótropos a partir de alterações no elemento finito de casca cilíndrica proposto por Djoudi & Bahai (2003, 2004a, 2004 b).

## 2. MATRIZ DE RIGIDEZ

Nesta seção discute-se a obtenção da matriz de rigidez do elemento finito de cascas cilíndricas, neste trabalho, denominado de CYS (Cylindrical Shell). Esse elemento é baseado na teoria de cascas cilíndricas abatidas de Donnel (1938), enquanto que o elemento finito foi originalmente desenvolvido por Djoudi & Bahai (2003, 2004a,b). As principais hipóteses na teoria de cascas cilíndricas utilizadas na derivação do CYS são:

- a) Lâmina com única curvatura finita;
- b) Regime de pequenos deslocamentos, rotações e deformações;
- c) Conservação da planicidade das seções transversais em ambas configurações indeformada e deformada;
- d) Conservação da ortogonalidade entre a seção transversal e sua normal durante o processo de deformação;
- e) Material homogêneo, isotrópico, elasto-linear;
- f) O esforço cortante na direção radial é desprezado ( $Q_r = 0$ );
- g) A contribuição dos deslocamentos no plano médio ( $u$  e  $v$ ) na deformação de flexão é desprezada.

Convém notar que as hipóteses (e, f) são as restrições de Donnel para representação da casca cilíndrica abatida. Além disso, no elemento CYS deduzido por Djoudi & Bahai (2003) foi imposto de forma completa a hipótese d. No caso do presente artigo, o material poderá também ser ortótropo.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w}{r} \quad (1b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1c)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os deslocamentos axial, circunferencial e radial;  $r$  é o raio da casca.

Já as curvaturas da casca ficam:

$$X_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2a)$$

$$X_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2b)$$

$$X_{xz} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2c)$$

Essas componentes de deformação e curvatura não podem ser consideradas independentes, pois são escritas em termos dos três deslocamentos e necessitam satisfazer as equações de compatibilidade, que são expressas por:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{X_x}{r} = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial X_{xy}}{\partial x} - 2 \frac{\partial X_x}{\partial y} = 0 \quad (3b)$$

$$\frac{\partial X_{xy}}{\partial y} - 2 \frac{\partial X_x}{\partial x} = 0 \quad (3c)$$

O elemento de casca CYS possui quatro nós com 5 graus de liberdade por nó, sendo três translações ( $u, v, w$ ) e duas rotações ( $\partial w / \partial x, \partial w / \partial y$ ), vide Fig. 1. (Convém notar que os graus de liberdade dos nós  $j$  e  $l$  não foram indicados para não saturar a figura), por isso as funções de forma possuem 20 constantes independentes.

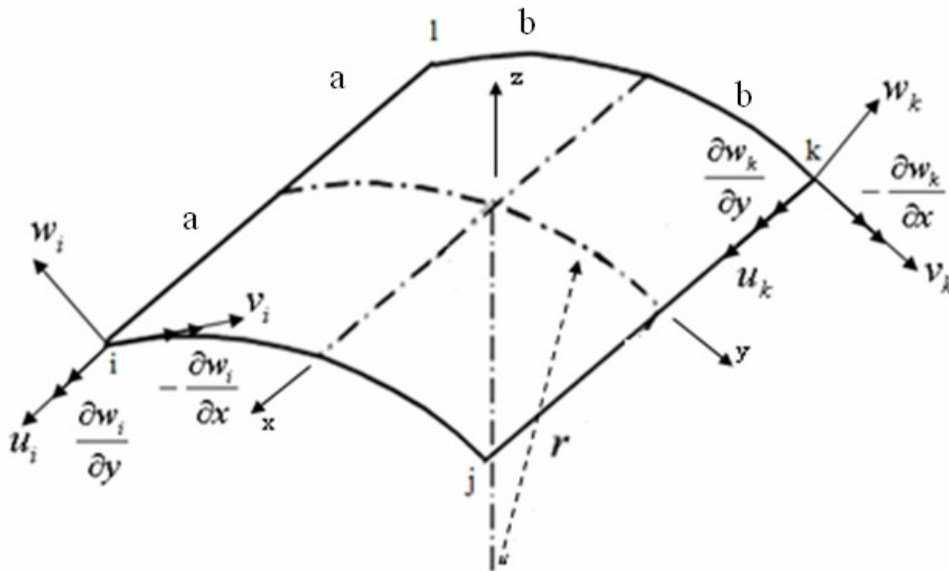


Figura 1 – Elemento de Cascas Cilíndricas

Os deslocamentos  $u, v, w$  recebem duas contribuições: as de corpo rígido e as decorrentes da mudança de forma da casca. Os primeiros podem ser obtidos a partir da integração das formas nulas das deformações/curvaturas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{w}{r} = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (4b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4c)$$

Como o elemento deve possuir 20 graus de liberdade, outras constantes são inseridas para expressar a segunda parcela dos deslocamentos, de forma que as deformações e curvaturas são dadas por.

$$\varepsilon_x = a_7 + a_8 y \quad (5a)$$

$$\varepsilon_y = a_9 + a_{10}x - 1/r(a_{12}x^2/2 + a_{13}x^3/6 + a_{14}yx^2/2 + a_{15}yx^3/6) \quad (5b)$$

$$\gamma_{xy} = a_{11} - (a_{10}y) \quad (5c)$$

$$X_x = a_{12} + a_{13}x + a_{14}y + a_{15}yx \quad (5d)$$

$$X_y = a_{16} + a_{17}x + a_{18}y + a_{19}xy \quad (5e)$$

$$X_{xy} = a_{20} + (2a_{14}x + a_{15}x^2 + 2a_{17}y + a_{19}y^2) \quad (5f)$$

Convém notar que os termos entre parênteses nas equações (5 b,f) foram convenientemente adotados de forma a atender a equação de compatibilidade (3 a,b,c). Agora se as equações (4 a,b,c) e (5) forem independentemente integradas, as formas finais dos deslocamentos (corpo rígido + mudança de forma) ficam:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [G_{11}(x, y)]\{\hat{a}\} + [G_{12}(x, y)]\{\hat{a}\} \quad (6a)$$

Onde  $\{\hat{a}\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{10}\}$ ,  $\{\hat{a}\}^T = \{a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{20}\}$ ,

$$[G_{11}(x, y)] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{y^2}{2r} & 0 & 1 & 0 & y & x & x \cdot y & 0 & -y \\ \frac{-y}{r} & -x \cdot \frac{y}{r} & \frac{-y^2}{2r} & 0 & 1 & -x & 0 & \frac{-x^2}{2} & y & x \cdot y \\ 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[G_{12}(x, y)] = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-y^4}{24r} & 0 & \frac{-y^5}{120r} & \frac{-y^3}{12r} \\ \frac{x}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y^3}{6r} & \frac{y^3x}{6r} & \frac{y^4}{24r} & \frac{y^4}{24r} & x \cdot \frac{y^2}{4r} \\ 1 & -x \cdot \frac{y}{2} & \frac{-y^3}{6} & -x^2 \cdot \frac{y}{2} & -x^3 \cdot \frac{y}{6} & \frac{-y^2}{2} & -x \cdot \frac{y^2}{2} & \frac{-y^3}{6} & \frac{-x \cdot y^3}{6} & -x \cdot \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

As rotações podem ser escritas pela diferenciação dos deslocamentos radiais na Eq.(6a), resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{Bmatrix} = [G_{21}(x, y)]\{\hat{a}\} + [G_{22}(x, y)]\{\hat{a}\} \quad (6b)$$

Com

$$[G_{21}(x, y)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[G_{22}(x, y)] = \begin{pmatrix} 0 & -x & \frac{-x^2}{2} & -x \cdot y & \frac{-(x^2 \cdot y)}{2} & 0 & \frac{-y^2}{2} & 0 & \frac{-y^3}{6} & \frac{-y}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-x^2}{2} & \frac{-x^3}{6} & -y & -x \cdot y & \frac{-y^2}{2} & \frac{-(x \cdot y^2)}{2} & \frac{-x}{2} \end{pmatrix}$$

Se as Eqs. (6 a) e (6 b) forem escritas na forma matricial ficam:

$$\{\delta\}^T = \left\{ u \quad v \quad w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \text{ ou } \{\delta\} = [G(x, y)]\{a_i\} \quad (7 a)$$

Onde

$$[G(x, y)] = \begin{bmatrix} G_{11}(x, y) & G_{12}(x, y) \\ G_{21}(x, y) & G_{22}(x, y) \end{bmatrix}$$

Quando as coordenadas geométricas de cada nó da casca forem substituídas na Eq.(7 a), então:

$$\{\delta_e\} = [C]\{a_i\} \quad (7 b)$$

Onde

$$\{\delta_e\}^T = \left\{ u_i \quad v_i \quad w_i \quad \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad \frac{\partial w_i}{\partial y} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \frac{\partial w_j}{\partial x} \quad \frac{\partial w_j}{\partial y} \quad u_k \quad v_k \quad w_k \quad \frac{\partial w_k}{\partial x} \quad \frac{\partial w_k}{\partial y} \quad u_l \quad v_l \quad w_l \quad \frac{\partial w_l}{\partial x} \quad \frac{\partial w_l}{\partial y} \right\}$$

As constantes ( $a_i$ ) podem ser obtidas pela inversão de (7b):

$$\{a_i\} = [C]^{-1}\{\delta_e\} \quad (7 c)$$

A partir das Eqs. (7 b) e (7 c), os deslocamentos e rotações de interesse podem ser escritos em função dos graus de liberdade do elemento resultando em:

$$\{\delta\} = [N]\{\delta_e\} \quad (7 d)$$

Onde  $[N] = [G(x, y)] \cdot [C]^{-1}$  são as funções interpoladoras.

A energia potencial é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int \{\psi\}^T [D]\{\psi\} dA \quad (7 e)$$

onde o vetor das curvaturas  $[\psi]$  e a matriz constitutiva ortótropa  $[D]$  são dados por:

$$\{\psi\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \quad X_x \quad X_y \quad X_{xy}\} \quad (7 f)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{M1} & D_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{M2} & D_{M4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{M3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{B1} & D_{B2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{B2} & D_{B4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{B3} \end{bmatrix} \quad (7 g)$$

Com

$$D_{M1} = hE_1^2 / (E_1 - \nu^2 E_2),$$

$$D_{M4} = hE_1 E_2 / (E_1 - \nu^2 E_2),$$

$$D_{M2} = \nu D_{M4}, \quad D_{M3} = hE_{12},$$

$$D_{B1} = h^3 E_1^2 / [12(E_1 - \nu^2 E_2)],$$

$$D_{B4} = h^3 E_1 E_2 / [12(E_1 - \nu^2 E_2)],$$

$$D_{M2} = \nu D_{M4},$$

$$D_{M3} = h^3 E_{12} / 12$$

onde  $h$  é a espessura;  $(E_1, E_2)$  são os módulos de elasticidade longitudinal segundo às direções principais 1 e 2 de ortotropia;  $(E_{12}, \nu)$  são o módulo de elasticidade transversal entre as direções 1 e 2 e o coeficiente de Poisson.

O vetor das deformações e curvaturas  $\{\psi\}$  pode ser escrito em função dos graus de liberdade pela aplicação das relações (1 a,b,c; 2 a,b,d,e) de uma forma apropriada nas linhas do vetor  $\{\delta\}$  dado em 7d, resultando em:

$$\{\psi\} = [B][a_i] \quad (8 a)$$

ou

$$\{\psi\} = [B][C]^{-1}[\delta_e] \quad (8 b)$$

Introduzindo-se a Eq.(8b) na Eq.(7), a energia potencial fica:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K] \{\delta_e\} \quad (8 c)$$

onde a matriz de rigidez  $[K]$  é dada por:

$$[K] = \int_A [C^{-1}]^T [B]^T [D][B][C] dA \quad (8 d)$$

O cálculo das integrais na Eq.(8d), resulta em:

$$[K] = [C^{-1}]^T \left\{ \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b [B]^T [D][B] dx dy \right\} [C^{-1}] = [C^{-1}]^T [Q][C^{-1}] \quad (8 e)$$

Os valores explícitos da matriz Q na Eq.(8e) podem ser calculados computando as contribuições dos efeitos de membrana e de flexão conforme discutido a seguir:

$$[Q] = \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b [B_m]^T [B_b]^T \begin{bmatrix} [D_m] & [0] \\ [0] & [D_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_m] \\ [B_b] \end{bmatrix} dx dy \quad (9)$$

Onde

$$[D_m] = \begin{bmatrix} D_{M1} & D_{M2} & 0 \\ D_{M2} & D_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & D_{M3} \end{bmatrix}$$

$$[D_b] = \begin{bmatrix} D_{B1} & D_{B2} & 0 \\ D_{B2} & D_{B4} & 0 \\ 0 & 0 & D_{B3} \end{bmatrix}$$

As matrizes  $B_m$  e  $B_b$  na Eq. (9) são obtidas a partir da Eq. (5), isto é:

$$\begin{aligned} [\psi_m] &= [B_m] \{\bar{a}\} \\ [\psi_b] &= [B_b] \{\bar{a}\} \end{aligned}$$

Com

$$[B_m] = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2/2r & -x^3/6r & -yx^2/2r & -yx^3/6r \\ 0 & 0 & 0 & -y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[B_b] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\{\bar{a}\}^T = \{a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15}\},$$

$$\{\bar{\bar{a}}\}^T = \{a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15} \quad a_{16} \quad a_{17} \quad a_{18} \quad a_{19} \quad a_{20}\}$$

Após a integração na Eq.(9), seguida da superposição dos termos dos efeitos de membrana e de flexão, os elementos não-nulos da matriz  $[Q]$  ficam:

$$Q(7,7) = 4D_{M1}ab, \quad Q(7,9) = 4D_{M2}ab,$$

$$Q(7,12) = -(2/3)D_{M2}a^3b/r, \quad Q(8,8) = 4D_{M1}ab^3/3,$$

$$Q(8,14) = -(2/9)D_{M2}a^3b^3/r, \quad Q(9,9) = 4D_{M4}ab,$$

$$Q(9,12) = -(2/3)D_{M4}a^3b/r, \quad Q(10,10) = (4/3)D_{M4}a^3b/3 + 4D_{M3}ab^3/3,$$

$$Q(10,13) = -(2/15)D_{M4}a^5b/r, \quad Q(11,11) = 4D_{M3}ab,$$

$$Q(12,12) = 4D_{B1}ab + D_{M4}a^5b/(5r^2), \quad Q(12,16) = 4D_{B2}ab,$$

$$Q(13,13) = (4/3)D_{B1}a^3b + D_{M4}a^7b/(63r^2),$$

$$Q(13,17) = (4/3)D_{B2}a^3b, \quad Q(14,14) = (4/3)D_{B1}ab^3 + (16/3)D_{B3}a^3b + D_{M4}a^5b^3/(15r^2),$$

$$Q(14,18) = (4/3)D_{B2}ab^3, \quad Q(15,15) = (4/9)D_{B1}a^3b^3 + (4/5)D_{B3}a^5b + D_{M4}a^7b^3/(189r^2),$$

$$Q(15,19) = (4/9)D_{B2}a^3b^3 + (4/9)D_{B3}a^3b^3,$$

$$Q(15,20) = (4/3)D_{B3}a^3b, \quad Q(16,16) = 4D_{B4}ab,$$

$$Q(17,17) = (16/3)D_{B3}ab^3 + (4/3)D_{B4}a^3b,$$

$$Q(18,18) = (4/3)D_{B4}ab^3, \quad Q(19,19) = (4/9)D_{B4}a^3b^3 + (4/5)D_{B3}ab^5,$$

$$Q(19,20) = (4/3)D_{B3}ab^3, \quad Q(20,20) = 4D_{B3}ab$$

Conforme mencionado anteriormente os valores da matriz Q para o caso isótropo foram deduzidos originalmente por Djoudi & Bahai (2003, 2004a, 2004 b). A condição de isotropia pode ser recuperada da situação ortótropa incorporada em Q (deduzida no presente artigo), bastando-se atribuir  $D_{M1} = D_{M4}$  e  $D_{B1} = D_{B4}$ .

### 3. ANÁLISE NUMÉRICA

Nesta seção são apresentados dois exemplos de aplicação: a) tubo isótropo com diafragmas rígidos nas extremidades e pinçado no meio do vão e b) tubo ortótropo engastado isopressurizado. O problema "a" está indicado nas Figs. 2a e 2b e suas propriedades geométricas e mecânicas estão mostradas na tabela 1. Por uma questão de simetria apenas um dos octantes é analisado utilizando-se as malhas 4x4, 6x6, 8x8 e 10x10 com uma força  $P/4$  aplicada no ponto A. Na Fig. 2b é mostrada uma discretização 2x2 e as condições de contorno do problema "a" são: arco AB,  $\partial w/\partial x = u = 0$ ; arco CD,  $\partial w/\partial y = v = w = 0$ ; reta BC,  $\partial w/\partial y = v = 0$  e reta DA,  $\partial w/\partial y = v = 0$ .

Tabela 1 – Constantes para análise do tubo pinçado

$\alpha = \pi/2 \text{ rad}$	$R = 300in$	$a = 600in$	$P = 1lb$
$h = 3in$	$E = 3 \times 10^6 \text{ psi}$	$\nu = 0,3$	

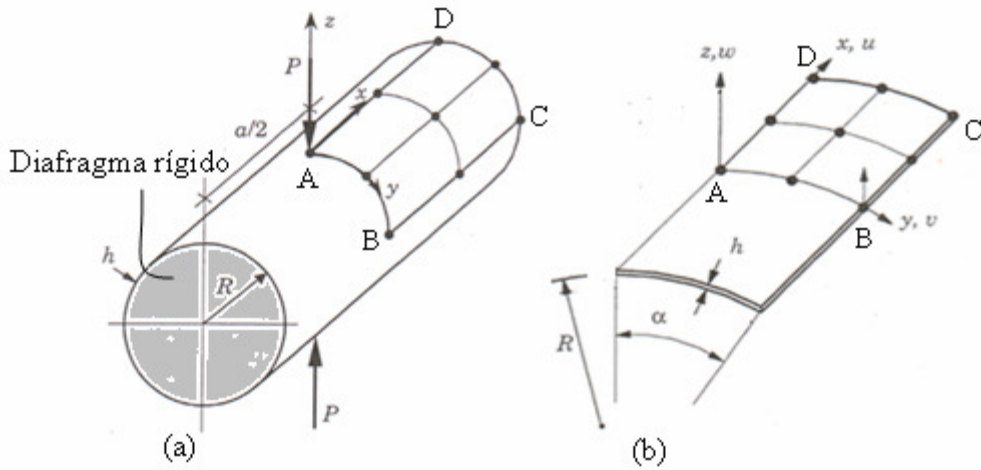


Figura 2 – (a) tubo pinçado; (b) discretização 2x2

Os resultados numéricos adimensionalizados são apresentados na Fig. 3 onde o valor analítico de referência para a máximo deslocamento radial  $w_{\max} = -1,8248 \cdot 10^{-5}$  in pode ser encontrado em Flugge (1973).

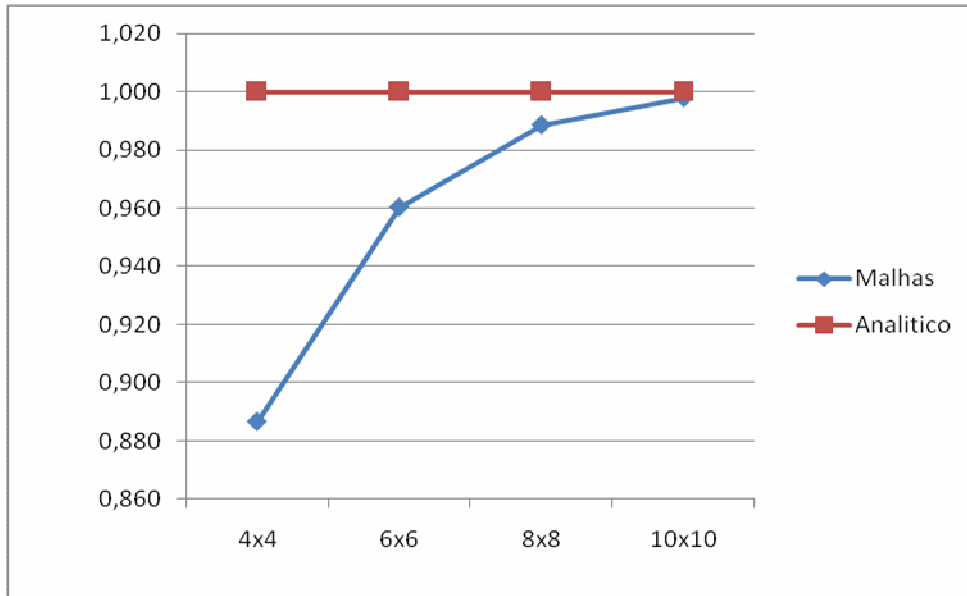


Figura 3 – Estudo de Convergência

A Fig. 4 mostra o problema “b” que é um duto isopressurizado com uma pressão  $p_0$  e está engastado em suas extremidades. Os parâmetros mecânicos e geométricos são dados na tabela 2 e ilustrados na figura 4. Na análise foram utilizadas as malhas 4x4, 6x6, 8x8, 10x10 para representação de um painel formado por um octante do tubo em razão da simetria do problema. Convém notar que a discretização utilizada nesse exemplo é mesma do problema do tubo pinçado, vide figura 2b. As condições de contorno do problema “b” são: arco AB,  $\partial w / \partial x = u = 0$ ; arco CD,  $\partial w / \partial y = \partial w / \partial x = u = v = w = 0$ ; reta BC,  $\partial w / \partial y = v = 0$  e reta DA,  $\partial w / \partial y = v = 0$ .

Tabela 2 – Constantes para análise do duto

$R = 20$ in	$a = 20$ in	$h = 1$ in
$E_1 = 7,5 \times 10^6$ psi	$E_2 = 2,0 \times 10^6$ psi	$G_{12} = 1,25 \times 10^6$ psi
$\nu = 0,25$	$p_0 = 6,41 / \pi$	



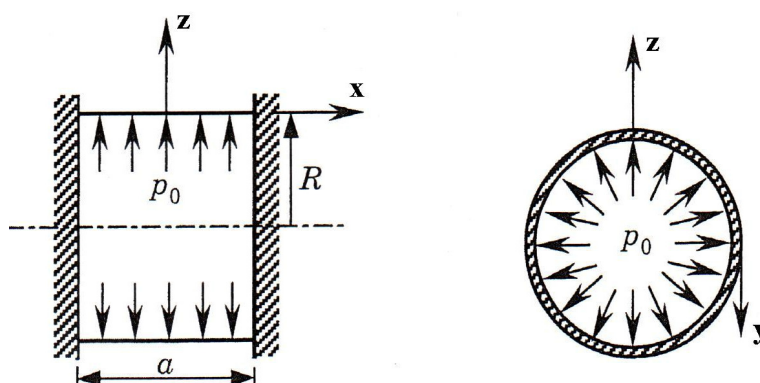


Figura 4 – Duto engastado isopressurizado

Já na tabela 3 estão indicados os resultados numérico e analítico Rao (1978) para o deslocamento radial máximo.

Tabela 3- Deslocamento radial máximo  $w(\text{in})$

4x4	6x6	8x8	10x10	Rao(1978)
0,3424	0,3557	0,3606	0,3629	0,3666

#### 4. CONCLUSÕES

Neste artigo o elemento finito de cascas cilíndricas abatidas isotrópicas (CYS) proposto por Djoudi e Bahai foi revisitado e modificado de forma a possibilitar análises com materiais ortótropos. A forma explícita da matriz de rigidez do CYS ortótropo também é disponibilizada.

#### 5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo suporte financeiro destinado a esta pesquisa

#### 6. REFERÊNCIAS

- Batoz, J.L. & Lardeur, P.(1989). A discrete shear triangular nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28, p. 533-560.
- Bergan, P. G.; Felippa, C. A.(1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom, *Comp. Meths. in Applied Mech. Eng.*, v.50, p.25-69.
- Bathe, K. J; Ho. L. W.(1981). A simple and effective element for analysis of general shell structures. *Computers and Structures*. Vol 13, p673-681.
- Brebbia, C.A., Connor, J.J., 1967. Stiffness matrix for shallow rectangular shell element, *J. Eng. Mech. Div. ASCE93 (EM5)* pp.43–65.
- Chen K. K, (1979). A triangular plate finite element for large displacement elastic-plastic analysis of automobile structural components. *Computers and Structures*. Vol 10, p203-215.
- Cantin G, Clough R.W. (1968), A curved cylindrical shell Finite element, *AIAA J.* 6, 1057–1062.
- Cowper G.R, Lindberg G.M. Olsen M.D. (1979), A shallow shell finite element of triangular shape, *Int. J. Solids Struct.* 6, 1133–1156.
- Chung, H., 1981. Free vibration analysis of circular cylindrical shells, *J. Sound Vibration* 74 (3) pp. 331–350.
- Djoudi, M.S., Bahai, H., 2004a. A cylindrical strain-based shell element for vibration analysis of shell structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, 40 pp.1947–1961.

- Djoudi, M.S., Bahai, H., 2004b. Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with openings, *Thin-Walled Structures* 42, pp.575–588.
- Djoudi, M.S., Bahai, H., 2003. A shallow shell finite element for the linear and non-linear analysis of cylindrical shells, *Engineering Structures* 25 pp. 769–778.
- Fafart M; Dhatt G, Batoz J. L. (1989). A new descrit Kirchhoff plate/Shell element with procedure. *Computers and Structures*. Vol 31, p591-606.
- Flugge, W. 1973. *Stress in shells*. Second Edition, Springer-Verlag, Berlin.
- Fulton R.E, Epink R.T, Walz J.E. (1966), The accuracy of finite element method in continuum problems, *Proceedings of the Fifth US National Congress of Applied Mechanics*, ASME, New York, p. 272.
- Hrennikof A, Tezcan S.S. (1966), Analysis of cylindrical shells by the finite element method, *Symposium of Problems of Interdependence of Design and Construction of Large Span Shells for Industrial and Civic Buildings*, Leningrad.
- Palazotto, A.N., Dennis, S.T., 1992. *Nonlinear analysis of shell structures*, AIAA Education Series, Washington Series.
- Rao, K. P., 1978,. A rectangular laminated anisotropic shallow thin shell finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15, p.13-33.
- Sabir, A. (1984). Strain-based finite elements for the analysis of cylinders with holes and normally intersecting cylinders. *Nuclear engineering and design*, vol. 76, n.2, pp. 111-120.
- Simo, J.C., Fox, D.D., Rifai, M.S., 1989. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: the linear theory. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering* pp.53-92.
- Soebel, W., 1981. *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker, New York.
- Ugural, A. 2009. *Stress in beams, plates, and shells*. Third edition, CRC Press, New York.
- Williams, F.W., Kennedy, D., Butler, R. , Anderson, M.S., 1991. VICONOPT: program for exact vibration and buckling analysis or design of prismatic plate assemblies, *AIAA J.* 29 (11) pp.1927–1928.

## 7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso neste trabalho.

# STATIC ANALYSIS OF ORTHOTROPIC DUCTS USING A FINITE ELEMENT OF CYLINDRICAL SHELL

Ângelo Vieira Mendonça<sup>1</sup>, Raimundo Aprígio de Menezes Júnior<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dept. Civil and Environmental Engng, Federal University of Paraíba, cidade universitária, Cep 58059-900, Joao Pessoa, PB, Brazil

<sup>2</sup>Mechanical Engineering graduate Program, Federal University of Paraíba, cidade universitária, CEP 58059-900, Joao Pessoa, PB, Brazil.

**Abstract.** *This paper deals with a cylindrical shell element for orthotropic materials. The discussions presented here can be seen as extended version of the CYS finite element (originally proposed by Djoudi and Bahai) oriented for isotropic elastic materials. This cylindrical shell finite element has four nodes with five degrees of freedom each so that it represents the cylindrical surfaces of the shell in an exact way. In addition, the explicit forms of stiffness matrix for the orthotropic CYS are shown. Numerical examples for some cylindrical shells are analyzed as well.*

**Keywords:** *Shells, FEM, Membrane, Tube*